Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali a coefficienti razionali e con i poli appartenenti ad una progressione geometrica.

Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali a coefficienti razionali e con i poli appartenenti ad una progressione geometrica

Di Giovanni Ricci, Pisa

1. Sia $f(z)$ una funzione razionale di z a coefficienti razionali; nello sviluppo

$$f(z) = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t^2} z^2 + \dots \qquad (t_k \geqq 1,\ (s_k\,,\ t_k) = 1\,;\ \ k = 0, 1, 2, \dots)$$

la successione dei coefficienti (che risultano razionali) soddisfa alla ben nota condizione di EISENSTEIN[1]), cioè esiste un intero T tale che T^k è divisibile per t_k $(k = 1, 2, \dots)$; questa condizione, ben lontana dall' essere caratteristica, ci dice fra l'altro che è limitato il numero degl' interi primi divisori del prodotto $t_0\, t_1 \dots t_k$ comunque grande sia k. Estremamente più complicata risulta la natura aritmetica della successione s_0, s_1, s_2, ... dei numeratori. Su questo argomento G. PÓLYA[2]) ha determinato tutte le funzioni razionali per le quali è limitato il numero dei divisori primi distinti di tutti i prodotti $s_0\, s_1 \dots s_k$; questo autore è giunto al risultato seguente: Siano $P(z)$ un polinomio in z a coefficienti razionali; a, b numeri razionali; m intero naturale. Consideriamo le quattro seguenti operazioni

$$\text{(I)}\quad f^*(z) = f(z) + P(z)\,; \qquad \text{(II)}\quad f^*(z) = a\, f(z)\,; \qquad \text{(III)}\quad f^*(z) = f(bz)$$

$$\text{(IV)}\quad f^*(z) = f_0(z^m) + z\, f_1(z^m) + \dots + z^{m-1} f_{m-1}(z^m)\ .$$

Ebbene, tutte le funzioni razionali che godono della proprietà indicata si ottengono dalla serie geometrica $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots$ mediante l'applicazione di un numero finito di operazioni (I), (II), (III) e (IV).

Inoltre G. SZEGÖ[3]) ha studiate le serie $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

---

[1]) Ved. per esempio *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze, II, p. 139, Leipzig 1925.

[2]) *G. Pólya*, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen, Journal für Mathematik, Bd. 151 (1921), pp. 1—31.

[3]) *G. Szegö*, Ueber Potenzreihen mit endlichen vielen verschiedenen Koeffizienten, Sitzungsber. d. Preussischen Akad. d. Wiss. 1922, pp. 88—91.

che hanno soltanto un numero finito di coefficienti distinti, concludendo fra l'altro che se $f(z)$ è razionale ha necessariamente la forma

$$f(z) = P(z)\,(1 - z^m)^{-1} \qquad (m \text{ intero naturale e } P(z) \text{ polinomio in } z).$$

2. In questa Nota ci proponiamo di dimostrare il seguente:

Teorema A. Se la funzione $f(z)$ razionale in z, a coefficienti razionali, ha soltanto i poli semplici

$$1, \ \frac{1}{a^{m_1}}, \ \frac{1}{a^{m_2}}, \ \ldots, \ \frac{1}{a^{m_h}} \qquad (h \geqq 1)$$

(a, m_1, m_2, ..., m_h razionali interi; $|a| \geqq 2$; $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_h$) la successione s_0, s_1, s_2, s_3, ... dei numeratori del suo sviluppo

$$(1) \qquad f(z) = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t_2} z^2 + \ldots \quad (t_k \geqq 1, \ (s_k, t_k) = 1; \ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gode delle due seguenti proprietà:

(I) qualunque sia l'intero primo p, l'esponente $l_x(p)$ della massima potenza di p che divide il prodotto $s_0 s_1 s_2 \ldots s_x$ soddisfa alla limitazione

$$l_x(p) < \frac{Kx}{\log p}$$

essendo K indipendente da x e p.

(II) detto P_x il massimo divisore primo del prodotto $s_0 s_1 s_2 \ldots s_x$ risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 4.$$

Osservazione 1^a. Siano c, c_0, c_1, ..., c_h razionali interi non nulli, e $g(z)$ polinomio in z e poniamo

$$(2) \qquad f(z) = g(z) + \frac{1}{c} \left\{ \frac{c_0}{1 - z} + \frac{c_1}{1 - a^{m_1} z} + \ldots + \frac{c_h}{1 - a^{m_h} z} \right\}$$

si consideri il polinomio

$$F(y) = c_0 + c_1 y^{m_1} + c_2 y^{m_2} + \ldots + c_h y^{m_h}$$

e diciamo n il massimo fra i gradi dei suoi fattori irriducibili. Dalla dimostrazione che segue risulterà che alla (II) potrà sostituirsi quest' altra più precisa limitazione

$$\text{(II}') \qquad \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 2 + \frac{2}{n}.$$

Anzi si può precisare ancora più:

(II″) se $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$, il numero $M_\alpha(x)$ degl' interi primi distinti maggiori di $\alpha x \log x$ che dividono il prodotto $s_0 s_1 \dots s_k$ soddisfa alla limitazione

$$M_\alpha(x) > \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha\right\} x + O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

Osservazione 2ª. Se lo sviluppo di $f(z)$ gode delle proprietà (I) e (II), tali proprietà valgono anche per lo sviluppo di ogni funzione

$$(3) \qquad f(z) + P(z),\ \beta f(z),\ \int_0^z dz \int_0^z dz \dots \int_0^z f(z)\, dz,\ f^{(k)}(z),\ f(\gamma z)$$

($P(z)$ polinomio a coefficienti razionali, β e γ razionali, $k = 1, 2, 3, \dots$) ad eccezione dell' ultima $f(\gamma z)$ per la quale la proprietà (I) risulta soddisfatta soltanto per p maggiore di un conveniente p_0; infatti dobbiamo escludere i fattori primi del numeratore di γ pei quali la (I) non risulta valida. Quanto alla derivata

$$f^{(k)}(z) = k!\ \frac{s_k}{t_k} + \frac{(k+1)!}{1!}\ \frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} z + \frac{(k+2)!}{2!}\ \frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} z^2 + \dots$$

si osservi che detto v_x l'esponente della massima potenza di un numero primo p che divide $(x!)^k$ risulta

$$v_x = k \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^s}\right] \leqq k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x}{p^s} = \frac{kx}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \frac{kx}{p-1} =$$
$$= \frac{k \log p}{p-1} \cdot \frac{x}{\log p};$$

dunque la proprietà (I) permane tutte le volte che si deriva.

Possiamo concludere in conseguenza del Teorema A che:

Ogni funzione $f^*(z)$ di z, ottenuta dalla $f(z)$ assegnata in (2), mediante un numero finito di operazioni successive del tipo di quelle schematicamente indicate in (3), possiede uno sviluppo a coefficienti razionali analogo a (1) la cui successione dei numeratori $s_0^*, s_1^*, s_2^*, \ldots$ gode delle due proprietà:

Per ogni intero primo p maggiore di un conveniente p_0, l'esponente $l_x(p)$ della massima potenza di p che divide il prodotto $s_0^* \, s_1^* \ldots s_x^*$ soddisfa alla limitazione $l_x(p) < \dfrac{K p}{\log p}$, essendo K indipendente da x e p;

detto P_x il massimo divisore primo del prodotto $s_0^* \, s_1^* \ldots s_x^*$ risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 4 .$$

3. Per dimostrare il Teorema A sopra enunciato ci serviremo dei due lemma seguenti, che già in se stessi possono presentare un qualche interesse.

Lemma B. Se $F(y)$ è un polinomio in y di grado $\geqq 1$, a coefficienti interi e irriducibile, e $h(p)$ è il numero delle radici distinte secondo (mod. p) della congruenza

$$F(y) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p) \qquad\qquad (p \text{ primo}),$$

risulta

$$\sum_{p \leqq \eta} h(p) = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) . \tag{4}$$

Osservazione. Questa proposizione ci dice che ogni polinomio $F(y)$ irriducibile, rispetto alla somma $\Sigma\, h(p)$ si comporta asintoticamente come un polinomio di primo grado $a y + b$ pel quale la (4) è evidentemente valida perché si riduce alla formula nota

$$\sum_{p \leqq \eta} 1 - \sum_{p \mid (a,b)} 1 = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) .$$

La (4) è analoga alla formula $\displaystyle\sum_{p \leqq \eta} \frac{h(p) \log p}{p} = \log \eta + O(1)$ stabilita da T. NAGEL[4]).

[4]) *T. Nagel,* Généralisation d'un théorème de Tchebytcheff, Journal de Mathématiques 8e. s., t. 4 (1921), pp. 343 – 356, ved. p. 352.

Lemma C. Sia

$$G(x) = F(a^x) = c_0 + c_1 a^x + c_2 a^{2x} + \ldots + c_n a^{nx} \qquad (5)$$
$$(c_0 \neq 0,\ c_n \neq 0,\ n \geqq 1,\ |a| \geqq 2)$$

essendo $a, c_0, c_1, \ldots, c_n$ interi e $F(y)$ irriducibile. Diciamo P_x per $x \geqq 1$ il massimo divisore primo del prodotto

$$G(1)\, G(2) \ldots G(x)$$

risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 2 + \frac{2}{n} \ ;$$

anzi, più precisamente: Se $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$, il numero $M_\alpha(x)$ degl' interi primi distinti maggiori di $\alpha\, x \log x$ che dividono il prodotto $G(1)\, G(2) \ldots G(x)$ soddisfa alla condizione

$$M_\alpha(x) > \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha\right\} x + O\left(\frac{x \log\log x}{\log x}\right). \qquad (6)$$

4. Veniamo a dimostrare il Lemma *B*.

Sia in primo luogo $c_n = 1$, cioè $F(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1} + y^n$ e consideriamo il corpo algebrico $K(\theta)$ generato da una radice θ di $F(y) = 0$. Denotiamo con $h(p, r)$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$, il numero degl' ideali primi diversi di grado r che dividono l'ideale principale $[p]$ generato dal numero razionale primo p. Denotiamo con $\mathfrak{p}_r$ gl' ideali primi di grado r del corpo $K(\theta)$; abbiamo $N\mathfrak{p}_r = p^r$. Inoltre posto

$$[p] = \Pi\, \mathfrak{p}_1 \cdot \Pi\, \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \Pi\, \mathfrak{p}_n$$

convenendo di porre $= 1$ ogni prodotto che eventualmente risultasse vuoto di fattori, risulta

$$p^n = N[p] = p^{h(p,1)} \cdot p^{2h(p,2)} \cdot \ldots \cdot p^{nh(p,n)}$$

per cui $n = h(p, 1) + 2h(p, 2) + \ldots + nh(p, n)$ e in particolare per qualunque r risulta

$$h(p, r) \leqq n\ . \qquad (7)$$

E' noto[5]) che il numero $\pi(\eta)$ degl' ideali primi di un corpo algebrico aventi la norma $\leqq \eta$ è dato dalla formula

$$\pi(\eta) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \eta} 1 = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right); \tag{8}$$

d'altra parte pel significato di $h(p, r)$ e per la (7) risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{p}_1 \\ N\mathfrak{p}_1 \leqq \eta}} 1 = \sum_{p \leqq \eta} h(p, 1), \\ &\sum_{\substack{\mathfrak{p}_i \\ N\mathfrak{p}_i \leqq \eta}} 1 = \sum_{p^i \leqq \eta} h(p, i) \leqq n \sum_{p^i \leqq \eta} 1 = \frac{n\, i\, \eta^{\frac{1}{i}}}{\log \eta} + o\left(\frac{\eta^{\frac{1}{i}}}{\log \eta}\right) = o\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) \\ &\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Tutte le volte che p non divide l'*indice* dell' intero θ del corpo algebrico $K(\theta)$ si ha $h(p, 1) = h(p)$ (DEDEKIND)[6]). Il numero degl' interi razionali primi che dividono l' indice di θ è finito, quindi sommando membro a membro le (9) otteniamo

$$\pi(\eta) = \sum_{p \leqq \eta} h(p, 1) + o\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) = \sum_{p \leqq \eta} h(p) + o\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right).$$

Da questa e dalla (8) segue la (4) nel caso particolare $c_n = 1$.

Ma la (4) vale ancora in generale: infatti se $F(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n$ e si pone $z = c_n y$ risulta

$$c_n^{n-1} F(y) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = H(z)$$

ed esclusi gl' interi primi razionali che dividono c_n (in numero finito) le due congruenze $F(y) \equiv 0 \pmod{p}$, $H(z) \equiv 0 \pmod{p}$ hanno un egual numero di radici distinte secondo (mod. p), e la (4), valendo per $H(z)$, vale anche per $F(y)$.

5. Veniamo a dimostrare il Lemma *C*.

Senza alterare la generalità possiamo supporre $c_n \geqq 1$ e c_0 primo con a in guisa che, per qualunque intero positivo x, $G(x)$ risulti primo con a;

---

[5]) *E. Landau,* Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig 1918, p. 111.

[6]) Ved. per es. *L. Bianchi,* Teoria dei numeri algebrici, Pisa 1923, p. 404.

infatti in caso contrario potremmo assumere l' intero positivo k abbastanza grande e porre

$$d\, G_1(x) = G(x+k) = F(a^{x+k}) = d(c_0' + c_1' a^x + c_2' a^{2x} + \dots + c_n' a^{nx})$$

con d opportuno divisore di c_0 e $c_0' = \frac{c}{d}$ primo con a; allora saremmo ridotti a dimostrare l'asserto per la funzione $G_1(x)$.

Scelti due numeri reali γ e γ' tali che

$$\text{(10)} \qquad 0 < \gamma < c_n |a|^{-n} < c_n < \gamma' = c_n + |c_{n-1}| + \dots + |c_0|$$

risulta per $\xi' \leq \xi$

$$\text{(11)} \quad |G([\xi'])| \leq c_n |a|^{n[\xi']} + |c_{n-1}| |a|^{(n-1)[\xi']} + \dots + |c_0| < \gamma' |a|^{n[\xi']} \leq \gamma' |a|^{n\xi},$$

e per qualunque $\xi > 0$

$$|G([\xi])| \geq \left(c_n - \frac{|c_{n-1}| + \dots + |c_0|}{|a|^{[\xi]}}\right) |a|^{n[\xi]},$$

dunque si può determinare un numero $\xi_0 > 0$ abbastanza grande in guisa che per $\xi \geq \xi_0$ si abbia per le (10)

$$\text{(12)} \qquad |G([\xi])| > \gamma |a|^n \cdot |a|^{n[\xi]} > \gamma |a|^{n\xi} .$$

Dalle (11) e (12) si conclude: Posto $a' = |a|$, per $\xi \geq \xi_0$ e qualunque $\xi' \leq \xi$ valgono le disuguaglianze

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} n\,\xi \log a' + \log \gamma < \log |G([\xi])| < n\,\xi \log a' + \log \gamma', \\ \log |G([\xi'])| < n\,\xi \log a' + \log \gamma' . \end{cases}$$

Posto per $\xi \geq \xi_0$

$$\text{(14)} \qquad \Phi(\xi) = \log |G(1)\, G(2) \dots G([\xi])|,$$

abbiamo per le (13)

$$\Phi(\xi) \geq \Phi(\xi_0) + \sum_{m=[\xi_0+1]}^{[\xi]} (n\, m \log a' + \log \gamma)$$

$$= \Phi(\xi_0) + \frac{n \log a'}{2} ([\xi] + [\xi_0] + 1)([\xi] - [\xi_0]) + ([\xi] - [\xi_0]) \log \gamma$$

$$\text{(15)} \quad = \frac{n \log a'}{2} \xi^2 + O(\xi) .$$

6. Andiamo adesso a valutare il contributo portato nella funzione $\Phi(\xi)$ dalla potenza di un numero primo p che divide il prodotto $|G(1)\,G(2)\ldots G(\xi)|$. Sia $(a, b) = 1$ e diciamo $g(b)$ l'esponente cui appartiene a (mod. b), cioè il minimo intero positivo per cui $a^{g(b)} \equiv 1$ (mod. b). Se x_0 soddisfa alla congruenza

$$G(x) = F(a^x) \equiv 0 \pmod{b}\,, \tag{16}$$

l'intero $a^{x_0} = y_0$ soddisfa evidentemente alla congruenza

$$F(y) \equiv 0 \pmod{b}\,; \tag{17}$$

e inversamente a una radice y_0 della (17) corrispondono come radici della (16) tutte quelle eventuali della congruenza binomia

$$a^x \equiv y_0 \pmod{b}\,. \tag{18}$$

Ma il numero degl' interi positivi $\leq \xi$ che soddisfano la (18) è $\leq \left[\frac{\xi}{g(b)}\right] + 1$, dunque, detto $h(b)$ il numero delle radici distinte secondo (mod. b) della (17), il numero degl' interi positivi $\leq \xi$ che soddisfano la (16) è

$$\leq h(b)\left(\left[\frac{\xi}{g(b)}\right] + 1\right)\,. \tag{19}$$

L'intero primo p entra in ogni fattore $G(m)$ del prodotto $G(1)\,G(2)\ldots G([\xi])$ a una potenza il cui esponente è $\leq \left[\frac{\log |G(m)|}{\log p}\right]$, e quindi per la seconda delle (13) non supera

$$k = k(p, \xi) = \left[\frac{n\,\xi \log a' + \log \gamma'}{\log p}\right]. \tag{20}$$

Ne segue che detto $l(p)$ l'esponente della massima potenza di p che divide il prodotto $G(1)\,G(2)\ldots G([\xi])$ abbiamo per la (19)

$$l(p) \leq h(p)\left(\left[\frac{\xi}{g(p)}\right] + 1\right) + h(p^2)\left(\left[\frac{\xi}{g(p^2)}\right] + 1\right) + \ldots + h(p^k)\left(\left[\frac{\xi}{g(p^k)}\right] + 1\right)$$

$$\leq \xi \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(p^i)}{g(p^i)} + \sum_{i=1}^{k} h(p^i)\,. \tag{21}$$

E' noto che[7]) qualunque sia l'intero positivo i risulta $h(p^i) \leqq n\, D^2$ essendo D il discriminante di $F(y)$; inoltre se p non divide D allora $h(p^i) = h(p) \leqq n$.

E' noto che[8]) se p è primo dispari non divisore di a, e p^r è la massima potenza di p che divide $a^{g(p)} - 1$, allora risulta

$$g(p^i) = g(p) \qquad \text{per } i \leqq r, \qquad\qquad g(p^i) = p^{i-r} g(p) \qquad \text{per } i > r;$$

se a è della forma $4h + 1$ e 2^r è la massima potenza di 2 che divide $a - 1$, allora risulta

$$g(2^i) = 1 \qquad \text{per } i \leqq r, \qquad\qquad g(2^i) = 2^{i-r} \qquad \text{per } i > r;$$

se a è della forma $4h + 3$ e 2^r è la massima potenza di 2 che divide $a + 1$, allora risulta

$$g(2) = 1,\ g(2^i) = 2 \qquad \text{per } 2 \leqq i \leqq r, \qquad\qquad g(2^i) = 2^{i-r} \qquad \text{per } i > r.$$

Se a è dispari risulta in ogni caso

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(2^i)} \leqq 1_1 + 1_2 + \ldots + 1_r + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = r + 1\,;$$

e se p è primo dispari non divisore di a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(p_i)} = \frac{1}{g(p)}\left(r + \frac{1}{p-1}\right). \tag{22}$$

Ricordando che in ogni caso è $h(p^i) \leqq n\, D^2$ si conclude per la (20) e la (21)

$$l(p) \leqq \xi \frac{n\, D^2}{g(p)}\left(r + \frac{1}{p-1}\right) + n\, D^2 \frac{n\, \xi \log a' + \log y'}{\log p} \tag{23}$$

dunque

$$l(p) = O(\xi) \qquad \text{per } \xi \to +\infty\,. \tag{24}$$

Pel significato di $g(p)$, con p dispari è $|a^{g(p)} - 1| \geqq p^r$ con $r \geqq 1$, quindi $a'^{g(p)} \geqq p^r - 1$, da cui

7) *T. Nagel*, l. c. in 4).

8) Ved. per es. *M. Cipolla*, Teoria dei numeri. Analisi indeterminata, Enciclopedia Mat. elementari, vol. I°, Milano 1929, p. 281.

$$(25) \quad g(p) = \frac{r \log p}{\log a'} \frac{\log (p^r - 1)}{\log p^r} > \frac{r \log p}{\log a'} \left(1 + \frac{1}{(p^r - 1) \log (p^r - 1)}\right)^{-1} >$$
$$> \frac{r \log p}{\log a'} \left(1 + \frac{2}{p - 1}\right)^{-1}$$

e sostituendo nella (23) risulta subito

$$(26) \qquad l(p) \leqq \frac{K_1 \xi}{\log p}$$

essendo K_1 abbastanza grande, indipendente da p e ξ. Aumentando eventualmente K_1, in base alla (24) si conclude che la (26) vale anche per il numero primo 2.

Sia adesso p primo dispari non divisore di D; dalle (21) e (22), tenendo conto che è $h(p^i) = h(p)$ risulta

$$l(p) \leqq \frac{h(p) \xi}{g(p)} \left(r + \frac{1}{p - 1}\right) + h(p) \frac{n \xi \log a' + \log \gamma'}{\log p},$$

e per la (25)

$$l(p) \leqq \frac{h(p)}{\log p} \left\{ (n + 1) \xi \log a' + \frac{4 \xi \log a'}{p - 1} + \log \gamma' \right\},$$

da cui

$$(27) \quad l(p) \log p \leqq h(p) \left\{ (n + 1) \xi \log a' + \frac{4 \xi \log a'}{p - 1} + \log \gamma' \right\}.$$

7. Siamo adesso in grado di costruire un' espressione maggiorante di $\Phi(\xi)$, poiché, tenendo conto che gl' interi primi non superiori a $|D|$ sono in numero finito, per la (24) risulta

$$\Phi(\xi) = \sum_p l(p) \log p = O(\xi) + \sum_p{}' \, l(p) \log p$$

essendo la somma Σ' estesa agl' interi p primi dispari, maggiori di $|D|$. Posto $\eta = \alpha \xi \log \xi$, con α reale e positivo, denotiamo con $M_\alpha(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto $G(1)\, G(2) \ldots G([\xi])$ tutti maggiori di η; essendo $h(p) \leqq n$ e per ogni intero primo $p > \eta$

$$\frac{4 \xi \log a'}{p - 1} + \log \gamma' < K_2 \quad \text{(indipendente da } p \text{ e } \xi)$$

abbiamo per la (27)

$$\Phi(\xi) \leqq O(\xi) + \sum_{p \leqq \eta}{}' \, l(p) \log p + M_\alpha(\xi) \left\{ n(n+1)\, \xi \log a' + n K_2 \right\}$$

$$\leqq O(\xi) + (n+1)\, \xi \log a' \sum_{p \leqq \eta}{}' \, h(p) + 4\, \xi \log a' \sum_{p \leqq \eta}{}' \frac{h(p)}{p-1} +$$

$$+ \log \gamma' \sum_{p \leqq \eta}{}' \, h(p) + M_\alpha(\xi) \left\{ n(n+1)\, \xi \log a' + n K_2 \right\},$$

e per il Lemma B, essendo $\eta = \alpha\, \xi \log \xi$ e quindi anche

$$\sum_{p \leqq \eta}{}' \, h(p) = \alpha\, \xi + O\left(\frac{\xi \log \log \xi}{\log \xi} \right), \; \sum_{p \leqq \eta}{}' \frac{h(p)}{p-1} \leqq n \sum_{p \leqq \eta} \frac{1}{p-1} =$$
$$= O(\log \log \xi),$$

perveniamo alla limitazione

$$\Phi(\xi) \leqq \alpha\, (n+1)\, \xi^2 \log a' + O\left(\frac{\xi^2 \log \log \xi}{\log \xi} \right) +$$
$$+ M_\alpha(\xi) \left\{ n(n+1)\, \xi \log a' + n K_2 \right\}.$$

Dal confronto di questa con la (15) ricaviamo

$$M_\alpha(\xi) \leqq \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha \right\} \xi + O\left(\frac{\xi \log \log \xi}{\log \xi} \right)$$

e il Lemma C risulta dimostrato.

8. Dal Lemma C segue immediatamente il Teorema A. Infatti osservando che è

$$\frac{c_s}{1 - a^{m_s} z} = c_s \left\{ 1 + a^{m_s} z + a^{2m_s} z^2 + \dots \right\}$$

si conclude che sviluppando la funzione $f(z)$ assegnata dalla (2) nella serie (1), basta assumere l'indice k maggiore del grado di $g(z)$ per avere:

$c_k' \, s_k = c_0 + c_1 a^{k m_1} + c_2 a^{k m_2} + \dots + c_h a^{k m_h}$ (c_k' opportuno divisore di c)

quindi $c_x' \, s_x = F(a^x)$ dove si ponga $F(y) = c_0 + c_1 y^{m_1} + \dots + c_h y^{m_h}$ e si prenda $x > x_0$ conveniente. Scomposto il polinomio $F(y)$ nei suoi fattori irriducibili

$$F(y) = F_1(y)\, F_2(y) \dots F_t(y)$$

e detto $l_{s,x}(p)$ l'esponente della massima potenza di p che divide il prodotto $F_s(1)\,F_s(2)\ldots F_s(x)$ risulta per la (26)

$$l_{s,x}(p) \leqq \frac{K_s\,x}{\log p}$$

ed essendo $l_x(p) = l_{1,x}(p) + \ldots + l_{t,x}(p)$ almeno per $x \geqq x_0$ e $p > c$ ne segue la proprietà (I).

In modo ovvio dalla (6) segue quanto si è affermato nell' Osservazione 1ª. del n° 2; ne risulta dimostrata anche la proprietà (II).

Il Teorema A è dimostrato.

(Reçu le 3 janvier 1934)