

# Sopra le tangenti principali e i punti circolari delle superficie algebriche.

Autor(en): **Longhi, Ambrogio**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **6 (1934)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7593>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sopra le tangenti principali e i punti circolari delle superficie algebriche

Di AMBROGIO LONGHI, a Lugano

È noto come l'esatta determinazione del numero dei *punti circolari*, od *ombelichi*, di una superficie algebrica  $F^n$ , generale nel suo ordine  $n$ , venne eseguita per la prima volta dal Voß<sup>1)</sup> e più tardi, mediante il principio della conservazione del numero, da Schubert<sup>2)</sup>.

Il problema si può far consistere nella ricerca dei punti di  $F^n$  aventi ciascuno la proprietà che le rette ivi osculatrici ad  $F^n$  si appoggino entrambe, in punti distinti, al *cerchio assoluto* dello spazio: se a tale cerchio si sostituisce una generica curva algebrica, nasce una questione più generale, che, quale prima estensione del problema degli ombelichi, fu posta, e risolta in vari modi, da L. Berzolari<sup>3)</sup>; mentre venne poi trattata di nuovo, anche per una superficie non priva di singolarità, da M. Pieri<sup>4)</sup>.

Il medesimo problema fu in seguito maggiormente generalizzato da L. Brusotti<sup>5)</sup>, imponendo alle due tangenti principali in un punto di  $F^n$  la condizione di giacere entrambe in un dato complesso.

In questo mio lavoro estendo anzitutto il risultato del Prof. Brusotti al caso di una superficie dotata di singolarità, determinando insieme il numero dei punti di essa in cui le tangenti principali appartengono una ad uno e l'altra all'altro dei due complessi assegnati.

Per una superficie  $F^n$  generale, mi soffermo poi alquanto sulla curva dei punti di contatto delle rette osculatrici contenute in un complesso prestabilito, e considero pure, fra altro, la curva di quei punti in ciascuno dei quali una coppia di tangenti situate nel complesso, e la coppia

---

<sup>1)</sup> A. Voss, Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. (Mathem. Annalen, 9, 1876).

Una soluzione inesatta dello stesso problema trovasi nella seconda edizione del trattato: Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes (Parte II, pp. 43—46). Cfr.: terza edizione (Leipzig, 1880), II, pp. 46—49.

<sup>2)</sup> H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie (Leipzig, 1879), p. 244.

<sup>3)</sup> L. Berzolari, Sopra un problema che comprende quello di trovare il numero degli ombelichi di una superficie generale d'ordine  $n$  (Atti Accad. Torino, 30, 1895).

<sup>4)</sup> M. Pieri, Di alcune questioni metriche circa le superficie algebriche (Giornale di Matem., 35, 1897).

<sup>5)</sup> L. Brusotti, Il conteggio degli ombelichi di una superficie algebrica nella metrica di Cayley ed un problema più generale. (Rend. Circolo Matem. di Palermo, 48, 1924).

delle tangenti principali, si separano armonicamente: quando, in particolare, il complesso consta di tutte le rette cicliche dello spazio, alla prima curva appartengono sempre, come nodi, gli ombelichi di  $F^n$ ; mentre la seconda si riduce al luogo (di cui ritrovo l'ordine già noto ed assegno gli altri principali caratteri) dei punti di  $F^n$  aventi ciascuno un'iperbole equilatera per indicatrice di Dupin.

Infine mi occupo di alcune questioni analoghe alle suaccennate e relative ad una rigata gobba, determinando anche, incidentalmente, l'ordine della superficie costituita dai punti donde escono quaterne armoniche di rette con la proprietà che, in ogni quaterna, le prime due giacciono in due dati complessi e le ultime due in due date congruenze.

## § 1. Superficie non rigate

**1.** Sia  $F$  una qualsiasi superficie irriducibile, non rigata, di ordine  $n$  e di classe  $n'$ , senza speciali particolarità relative ai suoi piani tangenti stazionari, i quali involupino una sviluppabile di ordine  $r$ , e dotata (oltrechè di punti multipli isolati comunque singolari) di linee multiple tutte ordinarie, tranne al più una (doppia) cuspidale di rango  $r'$ .

Se  $t$  e  $t'$  sono due tangenti principali *congiunte* di  $F$ , cioè osculatrici ad  $F$  in un medesimo punto, è subito visto<sup>6)</sup> che, mentre  $t'$  varia appoggiandosi ad una retta, la  $t$  descrive una rigata di ordine:

$$\tau \equiv 2n + 2n' + r + r'$$

e quindi avente, in generale,  $\nu\tau$  delle sue generatrici in ogni complesso  $\Theta$  di rette il cui grado sia  $\nu$ .

Per conseguenza,  $\nu\tau$  è pure l'ordine della rigata  $T$  descritta da  $t$  quando si suppone  $t'$  variabile entro  $\Theta$ .

Dato allora un secondo complesso  $\Theta'$ , di grado  $\nu'$ , in esso staranno (se non infinite)  $\nu\tau\nu'$  rette di  $T$ ; onde si conclude che:

*Sopra la superficie  $F$  considerata, esistono:*

$$\nu\nu' (2n + 2n' + r + r')$$

*punti aventi ciascuno la proprietà che delle due rette (distinte) ivi osculatrici ad  $F$ , una stia in un complesso di grado  $\nu$  e l'altra in un complesso di grado  $\nu'$ : i due complessi essendo genericamente assegnati rispetto ad  $F$ , come pure l'uno rispetto all'altro.*

<sup>6)</sup> Cfr. *M. Pieri*, loc. cit., n. 1.

Resta così trovato, ad esempio, il numero delle coppie di tangenti principali congiunte, di  $F$ , tali che una tangente di ogni coppia soddisfi ad una qualunque delle condizioni:

- $\alpha$ ) Incontrare una curva  $C$  di ordine  $\nu$ ,
- $\beta$ ) Appartenere a qualche piano di una sviluppabile  $\Sigma$  di classe  $\nu$ ,
- $\gamma$ ) Toccare una superficie  $S$  (non sviluppabile) di rango  $\nu$ ;

mentre l'altra tangente della stessa coppia soddisfi ad una qualunque delle condizioni:

- $\alpha'$ ) Incontrare una curva diversa da  $C$  e di ordine  $\nu'$ ,
- $\beta'$ ) Appartenere a qualche piano di una sviluppabile diversa da  $\Sigma$  e di classe  $\nu'$ ,
- $\gamma'$ ) Toccare una superficie (non sviluppabile) diversa da  $S$ , e di rango  $\nu'$ .

2. Le considerazioni del n. 1, ripetute nell'ipotesi che  $\Theta$  e  $\Theta'$  coincidano in un solo complesso  $\Gamma$ , di grado  $\mu$ , dimostrano l'esistenza di  $\mu^2\tau$  tangenti principali, della superficie  $F$ , situate in  $\Gamma$  con le rispettive tangenti congiunte: fra di esse si hanno però  $\mu r$  tangenti in punti parabolici di  $F^7$ , ed altre  $\mu r'$  tangenti alla curva cuspidale, sovrapposte alle proprie congiunte.

Pertanto, sono:

$$\frac{1}{2} (\mu^2\tau - \mu r - \mu r')$$

le coppie di tangenti principali congiunte, distinte, e contenute in  $\Gamma$ ; cioè:

Il numero dei punti della superficie  $F$  (n. 1), tali che le tangenti principali col punto di contatto in ciascuno di essi siano distinte ed appartengano entrambe ad un dato complesso di grado  $\mu$  (in posizione generica rispetto ad  $F$ ), è:

$$(I) \quad \mu^2 (n + n') + \binom{\mu}{2} (r + r').$$

Quando, in particolare, il complesso sia quello, di grado  $m$ , costituito dalle rette secanti una curva d'ordine  $m$ , è ovvio che  $mn$  dei punti suddetti cadono nei punti d'incontro di tale curva con la superficie  $F$ ; volendo fare astrazione da questi ultimi, si ottiene il seguente risultato del Pieri<sup>8</sup>):

<sup>7</sup>) Tali  $\mu r$  tangenti principali sono le generatrici che la sviluppabile dei piani stazionari di  $F$  ha entro il complesso  $\Gamma$ .

<sup>8</sup>) *M. Pieri*, loc. cit., n. 1.

Fra le coppie di tangenti principali congiunte della superficie  $F$  (n. 1), ve ne sono:

$$\binom{m}{2} (2n + 2n' + r + r') + mn'$$

con le rispettive tangenti entrambe appoggiate, in punti distinti, ad una qualunque curva d'ordine  $m$ , però genericamente situata rispetto ad  $F$ .

Si può ancora osservare, ad esempio, che l'espressione (I) fornisce il numero dei punti della superficie  $F$  (n. 1) ove le tangenti principali sono distinte e soggette ad una delle condizioni:

1. Toccare entrambe una data superficie non sviluppabile di rango  $\mu$ ;
2. Appartenere ciascuna a qualche piano di una data sviluppabile di classe  $\mu$ ;
3. Incontrare ciascuna ortogonalmente qualche generatrice di una rigata, sia gobba che sviluppabile, di ordine  $\frac{1}{2}\mu$  e priva di speciali relazioni col circolo assoluto<sup>9)</sup>;
4. Essere ciascuna ortogonale a qualche piano di una data sviluppabile, di classe  $\frac{1}{2}\mu > 1$  e in posizione generica rispetto all'assoluto dello spazio<sup>9)</sup>.

**3.** Alle conclusioni dei n<sup>o</sup> 1, 2 è utile giungere anche per altra via, nel caso almeno di una superficie generale d'ordine  $n$ .

Sia  $F^n$  una tale superficie, e si consideri una linea d'ordine  $m$ , posta su  $F^n$ . Dicendo corrispondenti due punti  $P$  e  $P'$  di una retta generica quando  $P$  appartiene al piano tangente e  $P'$  alla quadrica polare (rispetto ad  $F^n$ ) relativi ad uno stesso punto della linea, si trova subito che la corrispondenza fra  $P$  e  $P'$  è di indici  $m(n-2)$  e  $2m(n-1)$ ; ne segue che:

*Le coppie di tangenti principali della superficie  $F^n$  nei punti di una sua curva d'ordine  $m$ , che non sia quella parabolica, generano una rigata d'ordine  $m(3n-4)$ ; mentre le ulteriori tangenti principali uscenti dai*

---

<sup>9)</sup> È noto [cfr. *R. Sturm*, Ueber Fußpunkts-Curven und -Flächen, Normalen und Normalebene (Math. Annalen, 6, 1873), n<sup>o</sup> 4, 6, 7, 17] che il luogo delle proiezioni ortogonali di un punto generico sulle generatrici di una rigata  $R$  d'ordine  $\nu$ , o sui piani di una sviluppabile  $\Sigma$  di classe  $\nu$ , è una curva d'ordine  $2\nu$ : ne deriva che il complesso di tutte le rette perpendicolari alle generatrici di  $R$ , o ai piani di  $\Sigma$ , è di grado  $2\nu$ .

punti della stessa curva, ma osculatrici altrove ad  $F^n$ , generano una rigata di ordine<sup>10)</sup>:

$$m(n-1)(n-3)(n+4).$$

La seconda parte dell'enunciato si giustifica osservando come tutte le rette che osculano la superficie  $F^n$  appoggiandosi ad una sua linea  $C^m$ , d'ordine  $m$ , formano<sup>11)</sup> una rigata  $\Phi$  di ordine  $mn(n^2-4)$ : della quale fa parte l'altra  $\Phi'$ , di ordine  $m(3n-4)$  e da contarsi tre volte, contenente soltanto le rette osculatrici ad  $F^n$  nei punti di  $C^m$ .

Quando  $C^m$  è la curva parabolica di  $F^n$ , onde  $m = 4n(n-2)$ , la rigata  $\Phi$  ha ancora lo stesso ordine  $mn(n^2-4)$ , ma l'ordine di  $\Phi'$  diviene  $\frac{1}{2}m(3n-4)$ ; di più la  $\Phi'$  va allora contata, come parte della  $\Phi$ , sei volte invece di tre<sup>12)</sup>.

Se ne deduce che:

*Il luogo delle rette osculatrici ad  $F^n$  in punti non parabolici, ma appoggiate alla curva parabolica di  $F^n$ , è una superficie di ordine:*

$$4n(n-1)(n-2)(n-3)(n+4),$$

*per la quale tale curva è multipla secondo:*

$$(n-3)(n^2+2).$$

**4.** Poichè tutte le tangenti principali di  $F^n$  costituiscono una congruenza di ordine  $n(n-1)(n-2)$  e di classe  $3n(n-2)$ , quelle situate in un qualunque complesso (di rette)  $\Theta^\nu$ , di grado  $\nu$  e in posizione generica rispetto ad  $F^n$ , hanno per luogo una rigata di ordine:

$$\nu[n(n-1)(n-2) + 3n(n-2)].$$

Fra le generatrici di questa rigata ve ne sono  $\nu n(3n-4)$  aventi i loro punti di contatto con  $F^n$  in un piano generico: infatti, le tangenti principali di  $F^n$ , nei punti di una sua sezione piana, danno origine (n. 3) ad un'altra rigata di ordine  $n(3n-4)$ , la quale ha quindi  $\nu n(3n-4)$  rette in comune con  $\Theta^\nu$ . Pertanto:

<sup>10)</sup> Pel caso in cui la curva è una sezione piana di  $F^n$ , cfr. *R. Sturm*, Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche n<sup>ter</sup> Ordnung (Journal für Mathem., 72, 1870), n. 8.

<sup>11)</sup> Vedasi il successivo n. 4.

<sup>12)</sup> Cfr. *H. G. Zeuthen*, Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques (Mathem. Annalen, 10, 1876), n. 12.

Le tangenti principali della superficie  $F^n$ , che appartengono al complesso  $\Theta^\nu$ , formano una rigata di ordine  $\nu n (n^2 - 4)$ , mentre i loro punti di contatto giacciono sopra una curva di ordine  $\nu n (3n - 4)$ .

5. Siano  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$  due complessi qualunque, di gradi  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , genericamente posti l'uno rispetto all'altro ed entrambi rispetto alla superficie  $F^n$ .

La rigata  $R_1$  delle tangenti principali di  $F^n$  contenute in  $\Theta_1^{\nu_1}$ , e la linea  $C_1$  luogo dei loro punti di contatto, hanno (n. 4) gli ordini  $\nu_1 n (n^2 - 4)$  e  $\nu_1 n (3n - 4)$ .

Ora, le coppie di tangenti principali di  $F^n$ , nei punti di  $C_1$ , generano (n. 3) una rigata di ordine  $\nu_1 n (3n - 4)^2$ , della quale è evidentemente parte la  $R_1$ ; l'ordine della residua rigata  $R_1'$  vale quindi:

$$\nu_1 n (3n - 4)^2 - \nu_1 n (n^2 - 4),$$

ossia:

$$4 \nu_1 n (2n^2 - 6n + 5).$$

Le rette comuni ad  $R_1'$  e all'altro complesso  $\Theta_2^{\nu_2}$  sono tutte e sole le tangenti principali di  $F^n$  aventi ciascuna la proprietà di appartenere a  $\Theta_2^{\nu_2}$ , mentre l'ulteriore tangente principale nel rispettivo punto di contatto con  $F^n$  appartiene a  $\Theta_1^{\nu_1}$ . Dunque:

La superficie  $F^n$  possiede:

$$4 \nu_1 \nu_2 n (2n^2 - 6n + 5)$$

punti con la proprietà che delle due tangenti principali in ciascuno di essi, una giace nel complesso  $\Theta_1^{\nu_1}$  e l'altra nel complesso  $\Theta_2^{\nu_2}$ .

Ciò risulta anche direttamente dalla proposizione del n. 1, fattovi:

$$\nu = \nu_1, \quad \nu' = \nu_2, \quad n' = n (n - 1)^2, \quad r' = 0$$

e<sup>13)</sup>:

$$r = 2n (n - 2) (3n - 4).$$

6. Indichi  $\omega (n, \nu)$  il numero delle coppie di tangenti principali congiunte e distinte, di  $F^n$ , che stanno nel complesso  $\Theta^\nu$  (n. 4).

Spezzando  $\Theta^\nu$  in un complesso lineare  $\Theta_1^1$  e in un altro  $\Theta_2^{\nu-1}$ , di grado  $\nu - 1$ , si avrà, per il principio della conservazione del numero:

$$(I) \quad \omega (n, \nu) = \omega (n, \nu - 1) + \omega (n, 1) + \omega (n; \nu - 1, 1),$$

ove  $\omega (n; \nu - 1, 1)$  denota il numero delle coppie di tangenti principali congiunte, di  $F^n$ , costituite ciascuna da una retta di  $\Theta_2^{\nu-1}$  e da una di  $\Theta_1^1$ .

<sup>13)</sup> Vedasi ad es.: *Salmon-Fiedler*, Trattato cit., II, p. 611.

È quindi (n. 5):

$$\omega(n; \nu - 1, 1) = 4n(\nu - 1)(2n^2 - 6n + 5),$$

mentre si vede subito, ad esempio supponendo dapprima speciale il complesso  $\Theta_1^1$ , che  $\omega(n, 1)$  deve uguagliare la somma dell'ordine e della classe di  $F^n$ . Perciò:

$$\omega(n, 1) = n(n - 1)^2 + n.$$

Dalla (1) si ricava allora la formula ricorrente:

$$\omega(n, \nu) = \omega(n, \nu - 1) + 4\nu n(2n^2 - 6n + 5) - n(7n^2 - 22n + 18),$$

la quale permette il calcolo di  $\omega(n, \nu)$ . Si trova così che:

*Il numero dei punti della superficie  $F^n$ , in ciascuno dei quali le due tangenti principali sono distinte ed entrambe contenute nel complesso  $\Theta^\nu$ , è:*

$$n \binom{2\nu}{2} (2n^2 - 6n + 5) - 2\nu \binom{n}{2} (n - 3).$$

Questo risultato, già altrimenti stabilito dal Prof. Brusotti<sup>14</sup>), rientra pure in quello del n. 2, come caso particolare corrispondente alle ipotesi:

$$\mu = \nu, \quad n' = n(n - 1)^2, \quad r = 2n(n - 2)(3n - 4), \quad r' = 0.$$

7. Sia  $C$  la curva, d'ordine  $\nu n(3n - 4)$ , luogo dei punti di contatto delle tangenti principali di  $F^n$  che appartengono al complesso  $\Theta^\nu$  (n. 4).

Il cono proiettante  $C$  da un punto  $O$ , generico, sega ulteriormente  $F^n$  in una curva  $C'$  di ordine:

$$\nu n^2(3n - 4) - \nu n(3n - 4).$$

Le tangenti principali di  $F^n$  nei punti di  $C'$  formano (n. 3) una rigata di ordine:

$$\nu n(n - 1)(3n - 4)^2,$$

la quale possiede quindi:

$$\nu^2 n(n - 1)(3n - 4)^2$$

<sup>14</sup>) L. Brusotti, loc. cit., n. 3.



generatrici situate in  $\theta^\nu$ . Se  $P'$  è il punto di contatto di una di esse con  $F^n$ , la retta  $OP'$  dev'essere incidente, oltre che a  $C'$  in  $P'$ , anche a  $C$  in un certo punto  $P$ . Ma  $P'$ , perchè punto di contatto di una tangente principale (di  $F^n$ ) contenuta in  $\theta^\nu$ , è pure un punto di  $C$ : ne deriva che  $P$  e  $P'$  o sono i punti di appoggio, con la curva  $C$ , di una sua corda uscente da  $O$ ; oppure (non avendo  $F^n$  punti multipli) coincidono in uno dei punti di  $C$  ove la  $F^n$  è toccata da qualche retta passante per  $O$ .

Questi ultimi punti sono le intersezioni di  $C$  con la prima polare di  $O$  rispetto ad  $F^n$ ; per conseguenza, è:

$$\frac{1}{2} [\nu^2 n (n - 1) (3n - 4)^2 - \nu n (n - 1) (3n - 4)]$$

il numero dei punti doppî apparenti della curva  $C$ .

I punti doppî effettivi di  $C$  si trovano poi negli  $\omega(n, \nu)$  punti di  $F^n$  considerati nel n. 6, e nei punti di contatto delle eventuali tangenti principali, di  $F^n$ , che sono rette doppie del complesso  $\theta^\nu$ .

Poichè  $\theta^\nu$  è situato in modo generico rispetto ad  $F^n$ , solo quando esso possedga  $\infty^2$  rette doppie, formanti una congruenza di ordine  $\sigma$  e di classe  $\tau$ , avverrà che:

$$\sigma \cdot n (n - 1) (n - 2) + \tau \cdot 3n (n - 2)$$

di tali rette oscolino  $F^n$ , in punti necessariamente doppî per  $C$ .

Non potendo la linea  $C$ , in generale, avere altri punti multipli, oltre ai precedenti tutti ordinari, risultano calcolabili il suo rango ed il suo genere; e si ha in conclusione:

*I punti di contatto delle tangenti principali di una superficie generale  $F^n$  d'ordine  $n$ , che appartengono ad un complesso di grado  $\nu$ , privo di speciali relazioni con  $F^n$  ed avente  $\sigma$  rette doppie passanti per un punto generico nonchè  $\tau$  altre rette doppie situate in un piano generico<sup>15)</sup>, costituiscono una curva di ordine:*

$$\nu n (3n - 4),$$

<sup>15)</sup> Si sottintenda che ognuna delle rette multiple del complesso, appartenenti ad un punto o ad un piano generici, sia multipla ordinaria, cioè sia tale per il cono del complesso col vertice in un suo punto generico; e che una eventuale retta  $s$ -upla (con  $s > 2$ ) conti per  $\binom{s}{2}$  rette doppie.

Non si esclude tuttavia l'esistenza, nel complesso, di rette multiple non ordinarie: purchè in numero finito o semplicemente infinito.

di rango:

$$(\nu^2 + 9\nu - 2\sigma)n(n-1)(n-2) + 3(\nu^2 - \nu - 2\tau)n(n-2),$$

di genere:

$$\frac{1}{2}\nu^2 n(n^2 - 4) + \frac{1}{2}\nu n(3n-4)(3n-8) - \sigma n(n-1)(n-2) - 3\tau n(n-2) + 1,$$

dotata di:

$$2\nu^2 n(2n^2 - 6n + 5) - \nu n(n-2)(3n-4) + \sigma n(n-1)(n-2) + 3\tau n(n-2)$$

punti doppi ordinari effettivi<sup>16)</sup> e di:

$$2 \binom{n}{2} \binom{3\nu n - 4\nu}{2}$$

punti doppi apparenti.

8. Applicando il teorema del n. 7, nell'ipotesi di un complesso di rette costituito dalle tangenti ad una superficie generale d'ordine  $m$ , si deve porre:

$$\nu = m(m-1), \quad \sigma = \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3), \quad \tau = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9);$$

e risulta:

Date, in posizione generica l'una rispetto all'altra, due superficie  $F^n$  e  $F_1^m$ , generali nei loro ordini  $n$  ed  $m$ , le tangenti principali di  $F^n$ , che toccano la  $F_1^m$ , hanno i punti di contatto con  $F^n$  sopra una curva di ordine:

$$mn(m-1)(3n-4),$$

di genere:

$$\frac{1}{2}mn[4m^2(n-1)(n-2) - m(n^2 - 24n + 48) - (3n^2 + 36n - 88)] + 1,$$

di rango:

$$mn(n-2)[n(m-1)(4m+3) - 4(m-3)(m-4)],$$

e dotata di:

$$2 \binom{n}{2} \binom{m(m-1)(3n-4)}{2}$$

punti doppi apparenti<sup>17)</sup>.

<sup>16)</sup> Un punto  $s$ -uplo (ordinario) conteggiandosi come  $\binom{s}{2}$  punti doppi: cfr. nota precedente.

<sup>17)</sup> Il numero dei punti doppi effettivi è quindi pure calcolabile in conseguenza.

Si può aggiungere che i punti di contatto, con la superficie  $F_1^m$ , delle suddette tangenti principali di  $F^n$ , formano una linea di ordine:

$$mn(n-2)(mn-m-n+4).$$

Tale è infatti il numero delle rette comuni alla congruenza delle tangenti principali di  $F^n$  ed a quella [avente l'ordine  $m(m-1)$  e la classe  $m$ ] di tutte le tangenti di  $F_1^m$  nei punti di una sua sezione piana.

9. Dalla proposizione del n. 7 si traggono pure, ad esempio, le seguenti altre:

α) Il luogo dei flessi delle sezioni di una superficie generale d'ordine  $n$  coi piani di una sviluppabile di classe  $\lambda$ , in posizione generica rispetto alla superficie ed avente  $\tau$  piani doppi, tra effettivi (tutti ordinari) ed apparenti, è una linea di ordine:

$$\lambda n(3n-4),$$

di rango:

$$\lambda n(n-2)(3\lambda+10n-13)-6\tau n(n-2),$$

di genere:

$$\frac{3}{2}n(n-2)(\lambda^2-2\tau)+\frac{1}{2}\lambda n(10n^2-39n+34)+1,$$

con:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 n(9n^2-27n+22)-\frac{1}{2}n(n-2)(7\lambda n-9\lambda-6\tau)$$

punti doppi effettivi (ordinari) e:

$$2 \binom{n}{2} \binom{3\lambda n-4\lambda}{2}$$

punti doppi apparenti.

β) Il luogo dei punti di contatto delle tangenti principali di una superficie generale d'ordine  $n$ , che si appoggiano ad una curva (anche piana) di ordine  $\mu$ , la quale sia genericamente situata rispetto alla superficie e possieda  $\delta$  punti doppi, tra apparenti ed effettivi (tutti ordinari), è una linea di ordine:

$$\mu n(3n-4),$$

di rango:

$$(\mu^2+9\mu-2\delta)n(n-1)(n-2),$$

di genere:

$$\frac{1}{2} (\mu^2 - 2\delta) n (n - 1) (n - 2) + \frac{1}{2} \mu n (9n^2 - 33n + 26) + 1,$$

con:

$$\frac{1}{2} \mu^2 n (8n^2 - 21n + 14) - \frac{1}{2} \mu n (n - 2) (6n - 5) + \delta n (n - 1) (n - 2)$$

punti doppi ordinari effettivi<sup>18)</sup>, e con:

$$2 \binom{n}{2} \binom{3\mu n - 4\mu}{2}$$

punti doppi apparenti.

$\gamma)$  Siano:  $F^n$  una superficie generale d'ordine  $n$  e, in posizione generica rispetto ad essa,  $R_m^p$  una rigata d'ordine  $m$  e di genere  $p$ , non avente particolari relazioni col piano improprio nè altre linee multiple che ordinarie.

I punti di contatto delle tangenti principali di  $F^n$ , che sono parallele ciascuna a qualche generatrice di  $R_m^p$ , formano una linea di ordine:

$$m n (3n - 4),$$

di rango:

$$2 (6m + p - 1) n (n - 1) (n - 2),$$

di genere:

$$m n (6n^2 - 21n + 16) + n (n - 1) (n - 2) (p - 1) + 1,$$

con:

$$2 \binom{n}{2} \binom{3mn - 4m}{2}$$

punti doppi apparenti.

Tale linea possiede inoltre: un punto  $s$ -uplo (ordinario) in ciascuno dei punti di contatto delle tangenti principali, di  $F^n$ , uscenti da ogni punto  $s$ -uplo all'infinito di  $R_m^p$ ;  $3n(n - 2)$  punti  $m$ -upli (ordinari) nei flessi

---

<sup>18)</sup> Se la data curva d'ordine  $\mu$  giace in un piano, ogni flesso della sezione di questo con la superficie è un punto  $\mu$ -uplo per il luogo considerato, ed assorbe  $\binom{\mu}{2}$  dei punti doppi in discorso: cfr. note 15) e 16).

della sezione di  $F^n$  col piano improprio;  $mn$  nodi nei punti impropri comuni ad  $F^n$  e ad  $R_m^p$ ; ed altri:

$$2m^2n(2n^2 - 6n + 5) - mn(3n^2 - 10n + 9)$$

nodi al finito.

**10.** Si supponga che la curva d'ordine  $\mu$ , considerata nella proposizione  $\beta$ ) del n. 9, sia il circolo assoluto dello spazio, onde:  $\mu = 2$  e  $\delta = 0$ . La linea luogo dei punti di contatto delle tangenti principali di  $F^n$ , secanti tale circolo, è allora dotata di:

$$n(10n^2 - 25n + 18)$$

punti doppî effettivi, fra i quali si hanno i  $3n(n-2)$  flessi della traccia di  $F^n$  sul piano improprio e le  $2n$  intersezioni di  $F^n$  con quel medesimo cerchio; i rimanenti:

$$n(10n^2 - 25n + 18) - 3n(n-2) - 2n$$

punti doppî, tutti proprî, sono gli ombelichi della superficie  $F^n$ : giacchè le rette osculatrici in ciascuno di essi ad  $F^n$  sono distinte ed entrambe cicliche. Si può quindi dire [n. 9,  $\beta$ )] che:

*I  $2n(5n^2 - 14n + 11)$  ombelichi di una superficie generale  $F^n$ , d'ordine  $n$ , appartengono sempre, come nodi, ad una curva d'ordine  $2n(3n-4)$ , la quale giace interamente su  $F^n$ , è di rango:*

$$22n(n-1)(n-2)$$

e di genere:

$$11n^3 - 39n^2 + 30n + 1,$$

ha:

$$3n(n-1)(2n-3)(3n-4)$$

*punti doppî apparenti, e possiede altri  $n(3n-4)$  nodi all'infinito: situati nei  $2n$  punti ciclici di  $F^n$  e nei  $3n(n-2)$  flessi della sezione di  $F^n$  col piano improprio.*

Così, ad esempio, sopra una superficie cubica generale  $F^3$ , gli 84 ombelichi sono nodi di una curva (di  $F^3$ ) d'ordine 30, di genere 37, di rango 132, avente 270 punti doppî apparenti e 15 ulteriori nodi: 6 dei quali ciclici, e gli altri 9 posti nei flessi della sezione piana all'infinito di  $F^3$ .

**11.** Fra le generatrici di due rigate  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$ , di rispettivi ordini  $\mu$  e  $\mu'$ , si supponga esistere una corrispondenza algebrica  $(\alpha, \alpha')$ , avente la proprietà che due generatrici omologhe non siano mai sghembe fra di loro. Si abbia inoltre un complesso  $\Theta^\nu$  di rette, di grado  $\nu$  e in posizione generica rispetto ad  $R_\mu$  e ad  $R'_{\mu'}$ .

Sopra una quadrica  $V_4^2$  (non specializzata) dello spazio a cinque dimensioni, le rigate  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$  si rappresentano mediante due curve (dei medesimi ordini)  $C_\mu$  e  $C'_{\mu'}$ , mentre il complesso  $\Theta^\nu$  vien rappresentato dalla varietà  $W_3^{2\nu}$  completa intersezione di  $V_4^2$  con una ipersuperficie  $W_4^\nu$ , di ordine  $\nu$ .

La corrispondenza  $(\alpha, \alpha')$  fra le generatrici di  $R_\mu$  e di  $R'_{\mu'}$ , ne induce un'altra, con gli stessi indici, fra i punti di  $C_\mu$  e di  $C'_{\mu'}$ . Se  $P$  e  $P'$  sono due punti in essa omologhi, si consideri l'ipersuperficie  $W$  che è luogo dei punti coniugati armonici di  $P'$  rispetto alle varie coppie di punti allineati con  $P'$  ed appartenenti a  $W_4^\nu$ .

Una retta generica per  $P'$  contiene  $\binom{\nu}{2}$  coppie siffatte, e quindi altrettanti punti di  $W$ : onde questa ipersuperficie è di ordine  $\binom{\nu}{2}$ . Sia  $P''$  una qualunque delle sue intersezioni con la curva  $C_\mu$ ; fra  $P$  e  $P''$  intercede una corrispondenza algebrica d'indici  $\mu' \alpha \binom{\nu}{2}$  e  $\mu \alpha' \binom{\nu}{2}$ , la quale è a valenza nulla: infatti il gruppo degli omologhi di un punto  $P$  descrivente  $C_\mu$ , varia entro la serie lineare staccata su  $C_\mu$  da tutte le ipersuperficie (dello spazio a cinque dimensioni) di ordine  $\alpha' \binom{\nu}{2}$ .

Pertanto, sono:

$$(\mu \alpha' + \mu' \alpha) \binom{\nu}{2}$$

i punti uniti della corrispondenza fra  $P$  e  $P''$ , e quindi anche le coppie di punti  $P, P'$  (uno di  $C_\mu$  e l'altro di  $C'_{\mu'}$ ) separanti armonicamente certe due intersezioni  $Q, Q'$  di  $W_4^\nu$  con la retta  $PP'$ .

Ma essendo per ipotesi incidenti le rette rappresentate, sulla quadrica  $V_4^2$ , da  $P$  e da  $P'$ , la  $PP'$  giace su  $V_4^2$ : onde i punti  $Q$  e  $Q'$  appartengono alla varietà  $W_3^{2\nu}$ , immagine del complesso  $\Theta^\nu$ .

Ne segue subito la proposizione:

*Due rigate (distinte o sovrapposte)  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$ , di rispettivi ordini  $\mu$  e  $\mu'$ , abbiano le loro generatrici in corrispondenza algebrica  $(\alpha, \alpha')$ , per modo che due generatrici omologhe siano sempre complanari.*

Se allora  $\Theta^\nu$  è un complesso di rette, di grado  $\nu$  e senza speciali relazioni con entrambe le rigate, esistono in generale:

$$(\mu \alpha' + \mu' \alpha) \binom{\nu}{2}$$

coppie di generatrici, una di  $R_\mu$  e l'altra di  $R'_{\mu'}$ , con la proprietà che quelle di ogni coppia si corrispondono in  $(\alpha, \alpha')$  e separano armonicamente due fra le  $\nu$  rette di  $\Theta^\nu$  formanti fascio con esse: tali coppie si riducono però a sole  $\mu \alpha \binom{\nu}{2}$  quando  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$  coincidono, e inoltre la corrispondenza  $(\alpha, \alpha')$  è simmetrica.

Analogamente, ovvero mediante il principio della conservazione del numero, si trova pure che:

In generale, è:

$$(\mu \alpha' + \mu' \alpha) \nu_1 \nu_2$$

il numero delle coppie di generatrici omologhe nella corrispondenza  $(\alpha, \alpha')$  fra  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$ , e separate armonicamente da due rette, contenute una in un complesso di grado  $\nu_1$  e l'altra in un complesso di grado  $\nu_2$ : a meno che le due rigate coincidano e la  $(\alpha, \alpha')$  sia simmetrica, nel qual caso il numero suddetto diviene  $\mu \alpha \nu_1 \nu_2$ .

**12.** Applicando le proposizioni del n. 11 nell'ipotesi che le rigate  $R_\mu$  ed  $R'_{\mu'}$  siano le intersezioni di due congruenze con un medesimo complesso lineare speciale, e che si ritengano come corrispondenti due loro generatrici quando s'incontrano sull'asse di questo, risulta:

Essendo  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$  due complessi di rette, di rispettivi gradi  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , si convenga di indicare con  $\varepsilon$  il prodotto  $\nu_1 \nu_2$  ovvero il numero  $\binom{\nu}{2}$ , secondochè essi sono distinti (ed in posizione mutua generica) oppure coincidono in uno solo, di grado  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ .

In generale si ha allora che:

1. Il luogo dei punti tali che due fra le rette di una data congruenza, d'ordine  $\rho$  e di classe  $\sigma$ , uscenti da ciascuno di essi, separino armonicamente una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una superficie di ordine:

$$\varepsilon (\rho - 1) (\rho + \sigma).$$

2. Il luogo dei punti da ciascuno dei quali esce una coppia di rette separate armonicamente da una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  e da una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , ed appar-

tenenti una ad una e l'altra all'altra di due distinte congruenze, di ordini  $\rho_1, \rho_2$  e di classi  $\sigma_1, \sigma_2$ , è una superficie di ordine:

$$\varepsilon (\rho_1 \sigma_2 + \rho_2 \sigma_1 + 2 \rho_1 \rho_2).$$

Come corollario:

Data una superficie generale  $F^n$ , d'ordine  $n$  e genericamente situata rispetto ai complessi  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$ , esistono  $\infty^2$  quaterne armoniche di rette con la proprietà che, in ogni quaterna, la prima appartenga a  $\Theta_1^{\nu_1}$ , la seconda a  $\Theta_2^{\nu_2}$  e le ultime due siano:

- a) entrambe osculatrici ad  $F^n$ ;
- b) entrambe normali ad  $F^n$ ;
- c) entrambe bitangenti ad  $F^n$ ;
- d) una osculatrice e l'altra normale ad  $F^n$ ;
- e) una normale e l'altra bitangente ad  $F^n$ ;
- f) una bitangente e l'altra osculatrice ad  $F^n$ .

L'ordine della superficie costituita dai centri dei fasci contenenti tali quaterne di rette, è rispettivamente:

$$\varepsilon n (n^2 - 4) (n^3 - 3n^2 + 2n - 1)$$

nel caso a);

$$\varepsilon n^3 (n^2 + 1) (n - 1)$$

nel caso b);

$$4\varepsilon \binom{n+1}{2} \binom{n-2}{2} \left[ 12 \binom{n}{4} - 1 \right]$$

nel caso c);

$$\varepsilon n^2 (n - 2) (2n^3 - n + 2)$$

nel caso d);

$$\frac{1}{2} \varepsilon n^2 (n - 2) (n - 3) (3n^3 - n^2 + 2)$$

nel caso e);

$$\frac{1}{2} \varepsilon n^2 (n - 1) (n - 2)^2 (n - 3) (3n + 4)$$

nel caso f).

Nei casi b), d), e), la superficie  $F^n$  è da supporre priva di speciali relazioni con l'assoluto dello spazio.



**13.** Dal risultato del n. 3, mediante le proposizioni del n. 11, si deduce:

*Sopra una superficie  $F^n$ , generale nel suo ordine  $n$  e genericamente situata rispetto a due complessi  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$  di gradi  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , esista una curva  $C^m$ , d'ordine  $m$ .*

*Posto  $\varepsilon = \nu_1 \nu_2$  se i complessi sono distinti, ed  $\varepsilon = \binom{\nu}{2}$  se invece coincidono in uno di grado  $\nu$ , si ha allora in generale, quando  $C^m$  non sia la curva parabolica di  $F^n$ , che:*

1. È:

$$\varepsilon m (3n - 4)$$

*il numero dei punti di  $C^m$ , tali che le tangenti principali col punto di contatto in ciascuno di essi, risultino coniugate armoniche rispetto a due rette, di cui una appartiene a  $\Theta_1^{\nu_1}$  e l'altra a  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

2. È:

$$\varepsilon m (n - 1) (n - 3) (n + 4) (n^3 - 3n^2 + 2n - 7)$$

*il numero dei punti di  $C^m$ , da ciascuno dei quali escono due rette che osculano altrove  $F^n$  e formano un gruppo armonico con una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

3. È:

$$\varepsilon m (n - 3) (3n^3 - 2n^2 + 12n - 16)$$

*il numero dei punti di  $C^m$ , per ognuno  $P$  dei quali passano due rette osculatrici, una in  $P$  e l'altra altrove, ad  $F^n$ , e separanti armonicamente una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

*Quando invece  $C^m$  è la curva parabolica  $W$  di  $F^n$ , si ha che:*

a) *Esistono su  $W$ :*

$$4\varepsilon n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n + 4) (n^3 - 3n^2 + 2n - 7)$$

*punti tali che fra le tangenti principali di  $F^n$  passanti per ciascuno di essi, ma col punto di contatto altrove, due separano armonicamente una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

b) *Esistono su  $W$ :*

$$2\varepsilon n (n - 2) (n - 3) (3n^3 - 2n^2 + 12n - 16)$$

*punti tali che la (unica) tangente principale col punto di contatto in ciascuno di essi, ed una delle ulteriori tangenti principali uscenti dal punto stesso,*

siano coniugate armoniche rispetto a due rette, di cui una giace in  $\Theta_1^{v_1}$  e l'altra in  $\Theta_2^{v_2}$ .

Si supponga ora che  $C^m$  sia la curva luogo dei punti di contatto dei piani bitangenti di  $F^n$ ; è quindi<sup>19)</sup>:

$$m = n(n - 2)(n^3 - n^2 + n - 12),$$

e le tangenti principali di  $F^n$ , nei punti di  $C^m$ , costituiscono (n. 3) una rigata  $R$  di ordine  $m(3n - 4)$ .

Ritenute come omologhe due tangenti principali, di  $F^n$ , quando i loro punti di contatto (distinti) cadono in quelli di uno stesso piano bitangente, si stabilisce fra le generatrici di  $R$  una corrispondenza algebrica (2,2). Dal n. II, e dalla parte I. della proposizione precedente, si deduce allora:

*Fra i piani bitangenti della superficie  $F^n$  ve ne sono:*

$$2\epsilon n(n - 2)(3n - 4)(n^3 - n^2 + n - 12)$$

*aventi ciascuno i medesimi punti di contatto di due tangenti principali, di  $F^n$ , separanti armonicamente una retta del complesso  $\Theta_1^{v_1}$  ed una del complesso  $\Theta_2^{v_2}$ ; mentre ve ne sono altri:*

$$\epsilon n(n - 2)(3n - 4)(n^3 - n^2 + n - 12)$$

*con la proprietà che le due rette osculatrici entrambe ad  $F^n$  in uno dei punti di contatto di ciascuno di essi, formino un gruppo armonico con una retta di  $\Theta_1^{v_1}$  e con una di  $\Theta_2^{v_2}$ .*

**14.** Sia  $C$  una sezione piana generica di una superficie irriducibile  $\Sigma$ , d'ordine  $n$  e di classe  $n'$ .

Le coppie di tangenti principali di  $\Sigma$ , nei punti di  $C$ , generano una rigata  $R$  di ordine  $\eta' + 2n$ , se  $\eta'$  è il numero dei flessi di  $C$ .

Per dualità, se  $\eta$  è il numero delle generatrici di regresso del cono  $K$  circoscritto a  $\Sigma$  da un punto generico, sarà  $\eta + 2n'$  l'ordine della rigata  $S$  costituita dalle coppie di rette osculatrici a  $\Sigma$  nei suoi punti di contatto coi piani tangenti di  $K$ .

Ne segue che le rette uscenti dai punti di  $C$  e osculatrici altrove a  $\Sigma$ , appartengono ad una rigata  $R'$  di ordine:

$$n(\eta + \eta') - 3(\eta' + 2n);$$

<sup>19)</sup> Salmon-Fiedler, Trattato cit., II, p. 647.

mentre le rette situate nei piani tangenti del cono  $K$  e osculatrici a  $\Sigma$  fuori della sua linea di contatto con  $K$ , giacciono sopra una rigata  $S'$  di ordine :

$$n' (\eta + \eta') - 3 (\eta + 2n').$$

Applicando ora in vario modo le proposizioni del n. 11 alle rigate  $R, R', S, S'$ , si trova :

*Sia  $n$  l'ordine, ed  $n'$  la classe, di una qualunque superficie irriducibile  $\Sigma$ , non rigata, le cui tangenti principali formino una congruenza di ordine  $\eta$  e di classe  $\eta'$ .*

*Dati poi due complessi di rette,  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$ , di rispettivi gradi  $\nu_1, \nu_2$  e senza speciali relazioni con  $\Sigma$ , si suppongano o in posizione mutua generica oppure coincidenti in un unico complesso di grado  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ; e si convenga di indicare con  $\varepsilon$  il numero  $\nu_1 \nu_2$  nel primo caso, e il numero  $\binom{\nu}{2}$  nel secondo.*

*Allora :*

1. *Il luogo dei punti di  $\Sigma$  ove le due tangenti principali separano armonicamente una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una curva<sup>20)</sup> di ordine :*

$$\varepsilon (\eta' + 2n),$$

*e la sviluppabile circoscritta a  $\Sigma$  lungo tale curva ha la classe :*

$$\varepsilon (\eta + 2n').$$

2. *Il luogo dei punti di  $\Sigma$ , da ciascuno dei quali escono due rette osculatrici altrove a  $\Sigma$  e separanti armonicamente una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una curva di ordine :*

$$\varepsilon (\eta - 7) [n (\eta - 6) + \eta' (n - 3)].$$

3. *L'involuppo dei piani tangenti di  $\Sigma$ , che segano ciascuno  $\Sigma$  in una curva la quale abbia due delle sue tangenti d'inflessione separate armonicamente da una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  e da una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una sviluppabile di classe :*

$$\varepsilon (\eta' - 7) [n' (\eta' - 6) + \eta (n' - 3)].$$

<sup>20)</sup> Circa i punti doppî apparenti di tale curva, quando  $\Sigma$  è una superficie generale, vedasi il successivo n. 15.

4. Il luogo dei punti di  $\Sigma$ , da ciascuno  $P$  dei quali escono due rette osculatrici, una in  $P$  e l'altra altrove, a  $\Sigma$  e formanti un gruppo armonico con una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  e con una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una curva di ordine:

$$\varepsilon [4n(\eta - 6) + 2\eta'(n - 6) + \eta\eta'].$$

5. L'involuppo dei piani tangenti di  $\Sigma$ , ciascuno  $\pi$  dei quali contiene due rette osculatrici, una nel punto di contatto di  $\pi$  e l'altra altrove, a  $\Sigma$ , e formanti un gruppo armonico con una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$  e con una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , è una sviluppabile di classe:

$$\varepsilon [4n'(\eta' - 6) + 2\eta(n' - 6) + \eta\eta'].$$

Osservazione. Quando  $\Sigma$  sia una superficie generale  $F^n$  d'ordine  $n$ , le precedenti proposizioni 1., 2., 4. conseguono pure rispettivamente dalle 1., 2., 3. del n. 13, ove si supponga la curva  $C^m$  una sezione piana di  $F^n$ .

Se invece tale curva si fa coincidere con una di quelle sopra considerate in 1., 2., 4., ne derivano altri risultati; ad esempio:

*Avendosi, in posizione mutua generica, una superficie  $F^n$ , generale nel suo ordine  $n$ , e due distinti complessi di rette  $\Theta_1^{\nu_1}$ ,  $\Theta_2^{\nu_2}$  di rispettivi gradi  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , esistono su  $F^n$ :*

$$\frac{1}{4} \nu_1 \nu_2 (\nu_1 - 1) (\nu_2 - 1) n (3n - 4)^2$$

*punti, tali che nel fascio delle tangenti ad  $F^n$  in ciascuno di essi, le principali separano armonicamente due tangenti situate in  $\Theta_1^{\nu_1}$  ed altre due situate in  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

In particolare:

*Sulla superficie  $F^n$  vi sono:*

$$\frac{1}{2} \nu (\nu - 1) n (3n - 4)^2$$

*punti, in ciascuno dei quali le tangenti principali bisecano gli angoli formati da due delle  $\nu$  tangenti, nel medesimo punto, contenute in un prefissato complesso di grado  $\nu$  (privo di speciali relazioni con  $F^n$  e con l'assoluto dello spazio).*

**15.** La proposizione 1. del n. 14, suppostavi la  $\Sigma$  una superficie generale  $F^n$  d'ordine  $n$ , mostra che i punti  $P$  di  $F^n$ , ove le tangenti

principali separano armonicamente una retta del complesso  $\Theta_1^{\vee 1}$  ed una dell'altro  $\Theta_2^{\vee 2}$ , formano una curva  $\Gamma$  di ordine:

$$\varepsilon n (3n - 4).$$

Il cono proiettante  $\Gamma$  da un punto generico  $O$ , sega ulteriormente  $F^n$  in una curva di ordine:

$$\varepsilon n (n - 1) (3n - 4),$$

sulla quale i punti  $P$  suddetti sono [n. 13, 1.] in numero di:

$$\varepsilon^2 n (n - 1) (3n - 4)^2.$$

Fra tali punti se ne hanno:

$$\varepsilon n (n - 1) (3n - 4)$$

situati nelle intersezioni di  $\Gamma$  con la prima polare di  $O$  rispetto ad  $F^n$ ; i rimanenti si distribuiscono (cfr. n. 7) in:

$$\frac{1}{2} [\varepsilon^2 n (n - 1) (3n - 4)^2 - \varepsilon n (n - 1) (3n - 4)]$$

coppie costituite ciascuna da due diversi punti di  $\Gamma$  allineati con  $O$ .

Si può dunque concludere:

*Conservando ai simboli  $F^n$ ,  $\Theta_1^{\vee 1}$ ,  $\Theta_2^{\vee 2}$ ,  $\varepsilon$  i soliti significati (cfr. n. 13), si ha che da un punto generico dello spazio escono:*

$$2 \binom{n}{2} \binom{3\varepsilon n - 4\varepsilon}{2}$$

*rette contenenti ciascuna due punti distinti della superficie  $F^n$ , in entrambi i quali le due tangenti principali di  $F^n$  sono separate armonicamente da una retta del complesso  $\Theta_1^{\vee 1}$  e da un'altra del complesso  $\Theta_2^{\vee 2}$ .*

Quando, in particolare,  $\Theta_1^{\vee 1}$  e  $\Theta_2^{\vee 2}$  coincidono col complesso (quadratico) di tutte le rette cicliche, è da porre (n. 13)  $\varepsilon = 1$ ; e risulta che:

*Per un punto generico si possono condurre:*

$$n \binom{3n - 3}{3}$$

*rette, in modo che in due distinti punti d'incontro di ciascuna di esse con una data superficie generale d'ordine  $n$ , questa abbia le sue due tangenti principali perpendicolari fra di loro.*

**16.** Nell'ipotesi che i complessi  $\theta_1^{v_1}$  e  $\theta_2^{v_2}$  si sovrappongano entrambi ad un medesimo complesso quadratico (irriducibile)  $\theta^2$ , la curva  $\Gamma$ , considerata al principio del n. 15, diviene una curva  $K$  di ordine  $n(3n-4)$  e priva, com'è ovvio, di punti multipli effettivi.

D'altra parte, tale linea  $K$  possiede (n. 15):

$$n \binom{3n-3}{3}$$

punti doppi apparenti; ne deriva, per il suo genere  $\pi$ , l'espressione:

$$(I) \quad \pi = 2n(n-2)(3n-4) + 1$$

e, pel suo rango, il valore:

$$2n(2n-3)(3n-4).$$

Le tangenti principali della superficie  $F^n$ , nei punti di  $K$ , formano una rigata  $\Omega$ , di ordine (n. 3):

$$n(3n-4)^2$$

e generalmente irriducibile se  $n > 2^{21}$ , per la quale la linea  $K$  è doppia.

Fra i punti di  $K$  e le generatrici di  $\Omega$  che ne escono, esiste una corrispondenza algebrica (1,2) avente per elementi di diramazione, su  $K$ , i punti di questa curva che sono parabolici per  $F^n$ . Il loro numero è:

$$4n(n-2)(3n-4),$$

altrettante essendo le tangenti principali della superficie  $F^n$ , in punti della sua curva parabolica, che appartengono al complesso  $\theta^2$ .

Se allora  $\pi'$  è il genere di  $\Omega$ , per la formula di Zeuthen si ha:

$$4n(n-2)(3n-4) = 2(\pi' - 1) - 4(\pi - 1),$$

e quindi, per la (I),  $\pi' = 3\pi - 2$ .

Altrimenti:

La rigata  $\Omega$  si può identificare ad una curva  $\Omega'$ , di ordine  $n(3n-4)^2$  e di genere  $\pi'$ , contenuta in una quadrica  $V_4^2$  dello spazio a cinque dimensioni (cfr. n. 11). Le coppie di generatrici di  $\Omega$ , uscenti dai punti della curva doppia  $K$ , danno luogo, sopra  $\Omega'$ , ad una involuzione di 2° grado  $\gamma_2^1$ , il cui genere è quello stesso di  $K$ , cioè  $\pi$ .

<sup>21)</sup> Se  $n = 2$ , la rigata  $\Omega$  si riduce alla quadrica  $F^2$  contata quattro volte.

Se ora è  $\nu$  l'ordine della rigata  $R$  descritta dalla retta congiungente due punti variabili su  $\Omega'$ , e coniugati in  $\gamma_2^1$ , deve verificarsi la relazione di Segre<sup>22)</sup>:

$$(2) \quad n(3n - 4)^2 - \pi' = \nu - 2\pi + 1 .$$

Ma la superficie  $R$  giace per intero sulla quadrica  $V_4^2$ , ove rappresenta la congruenza  $\Delta$  costituita da tutti i fasci di raggi individuati ciascuno dalle tangenti principali di  $F^n$  in un punto di  $K$ . L'ordine  $\nu$  di  $R$  eguaglia quindi la somma dell'ordine e della classe di  $\Delta$ , che sono poi rispettivamente l'ordine di  $K$  e la classe della Sviluppabile circoscritta ad  $F^n$  lungo  $K$ .

Si ha dunque:

$$\nu = n(3n - 4) + n(3n - 4)(n - 1) ;$$

onde il valore di  $\pi'$ , che allora si trae dalla (2), non differisce da quello trovato prima.

In conclusione:

*Dati, in posizione mutua generica, una superficie generale  $F^n$  d'ordine  $n$  ed un complesso quadratico  $\Theta^2$  irriducibile, si ha che il luogo dei punti di  $F^n$  ove le due tangenti principali separano armonicamente le altre due tangenti, del loro fascio, situate in  $\Theta^2$ , è una linea  $K$  di ordine:*

$$n(3n - 4) ,$$

*di rango:*

$$2n(2n - 3)(3n - 4) ,$$

*di genere:*

$$2n(n - 2)(3n - 4) + 1 ,$$

*con:*

$$n \binom{3n - 3}{3}$$

*punti doppi apparenti (e senza punti multipli effettivi).*

*Le coppie di tangenti principali di  $F^n$ , nei punti di  $K$ , costituiscono una rigata  $\Omega$  di ordine:*

$$n(3n - 4)^2$$

*e, se  $n > 2$ , di genere:*

$$6n(n - 2)(3n - 4) + 1 .$$

<sup>22)</sup> C. Segre, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* [Rendiconti Lincei, 3 (4), 1887<sub>2</sub>], n. 3.

Quando, in particolare,  $\Theta^2$  si compone delle rette appoggiate al circolo assoluto, la curva  $K$  diviene il luogo dei punti, di  $F^n$ , le cui indicatrici di Dupin sono iperboli equilateri, mentre la rigata  $\Omega$  è il luogo degli asintoti di tali indicatrici<sup>23</sup>).

## § 2. Superficie rigate.

17. Sia  $R_n^p$  una rigata gobba irriducibile, d'ordine  $n$  e di genere  $p$ , senza altre linee multiple che ordinarie e quindi dotata di  $2(n + 2p - 2)$  generatrici *singolari*: da supporre, in tutto il seguito, prive di speciali particolarità.

Fra le tangenti ad  $R_n^p$  in un suo punto generico  $M$ , una sola è *principale*, ossia a contatto almeno tripunto, se si conviene di non considerare come tale la generatrice  $g$ , di  $R_n^p$ , passante per  $M$ ; al variare di  $M$  su  $g$ , la tangente principale  $\tau$  col punto di contatto in  $M$  descrive un regolo, che si scinde in due distinti fasci di raggi solo quando la generatrice  $g$  è singolare: dei loro centri (entrambi su  $g$ ) uno è sempre il *punto cuspidale* di  $g$ .

Si supponga ora il punto  $M$  variabile sopra una sezione piana di  $R_n^p$ : la tangente principale  $\tau$  genera una rigata di ordine  $2(2n + 3p - 3)$  eguale alla somma dell'ordine della sezione col numero dei suoi flessi. Ne segue (cfr. n.º 4 e 14) ragionando anche dualmente<sup>24</sup>), che *i punti di contatto delle tangenti principali, della rigata  $R_n^p$ , contenute in un dato complesso di rette  $\Theta^\nu$ , di grado  $\nu$ , formano in generale una linea  $\Gamma$  di ordine  $2\nu(2n + 3p - 3)$ , il quale è pure la classe della sviluppabile circoscritta ad  $R_n^p$  lungo la linea stessa.*

Se però la rigata  $R_n^p$  giace in  $\Theta^\nu$ , la tangente principale in un punto generico di ogni sua generatrice singolare, coincidendo con questa, è pure in  $\Theta^\nu$ ; della curva  $\Gamma$  fanno quindi parte le generatrici singolari di  $R_n^p$ , e considerando la curva  $\Delta$  residua si trova che:

*Supposta la rigata  $R_n^p$  appartenente ad un complesso di rette, di grado  $\nu$ , le tangenti principali di  $R_n^p$ , che giacciono nel complesso, hanno in generale i loro punti di contatto sopra una curva  $\Delta$  di ordine:*

$$(3\nu - 2)(n + 2p - 2) + \nu n,$$

*eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad  $R_n^p$  lungo  $\Delta$ .*

<sup>23</sup>) Per l'ordine, in tal caso, di  $K$  e di  $\Omega$ , cfr.: *Salmon-Fiedler*, Trattato cit., II, p. 43; *M. Pieri*, loc. cit., n. 2.

<sup>24</sup>) Ed osservando che il cono circoscritto da un punto generico ad  $R_n^p$  è di classe  $n$  e di genere  $p$ , onde possiede  $3(n + 2p - 2)$  generatrici stazionarie.



E noto<sup>25)</sup> che, ove il complesso sia lineare ( $\nu = 1$ ), la curva  $\Delta$  diviene un'asintotica  $\Delta'$  di  $R_n^p$ . Dalla proposizione precedente si deduce allora che l'ordine e la classe di  $\Delta'$  valgono entrambi  $2(n + p - 1)$ ; le tangenti di  $\Delta'$  costituiscono poi la rigata intersezione del complesso lineare con la congruenza<sup>26)</sup> delle tangenti principali di  $R_n^p$ : quindi, il rango di  $\Delta'$  è  $6(n + 2p - 2)$ . Dopo ciò, essendo la linea  $\Delta'$  generalmente priva di cuspidi, se ne può calcolare il genere, come pure il numero dei flessi, e risulta così che<sup>27)</sup>:

*In generale, se la rigata  $R_n^p$  appartiene ad un complesso lineare  $\Theta$  (non speciale), le sue tangenti principali contenute in  $\Theta$  inviluppano un'asintotica che è di ordine e classe entrambi eguali a:*

$$2(n + p - 1),$$

*di rango:*

$$6(n + 2p - 2),$$

*di genere:*

$$n + 4p - 3,$$

*e possiede:*

$$10n + 28p - 28$$

*flessi.*

**18.** Si indichi con  $C_{m,s}^t$  una curva irriducibile di ordine  $m$ , la quale sia  $s$ -upla (ordinaria) per la rigata  $R_n^p$  e ne incontri ogni generatrice in  $t$  punti.

Le tangenti principali di  $R_n^p$  appoggiantisi ad una retta  $r$  hanno i loro punti di contatto sopra una curva  $C_{m',s'}^{t'}$ , per la quale è (n. 17):

$$m' = 2(2n + 3p - 3), \quad s' = 1, \quad t' = 2.$$

Le due curve hanno generalmente in comune un numero di punti eguale a<sup>28)</sup>:

$$mst' + m's't - ntt'.$$

<sup>25)</sup> S. Lie, Ueber Complexe ... (Mathem. Annalen, 5, 1872), n. 34. Cfr. pure: F. Klein, Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie (Ibidem), § 4.

<sup>26)</sup> Di ordine e classe entrambi eguali a  $3(n + 2p - 2)$ : cfr. nota <sup>24)</sup>.

<sup>27)</sup> Cfr. A. Voss, Zur Theorie der windschiefen Flächen (Mathem. Annalen, 8, 1875), n. XII.

<sup>28)</sup> Cfr. B. Levi, Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi (Atti della R. Accad. di Torino, 34, 1899), n. I.

Ne deriva che:

*Le tangenti principali della rigata  $R_n^p$  (n. 17) nei punti di una sua linea irriducibile  $s$ -upla, d'ordine  $m$  e  $t$ -secata da ogni generatrice, costituiscono in generale una superficie di ordine:*

$$2ms + 2(n + 3p - 3)t.$$

È ovvio che di tale superficie deve far parte (contato un debito numero di volte) ogni fascio di tangenti principali di  $R_n^p$ <sup>29)</sup>, il cui centro appartenga alla linea considerata. Se questa, ad esempio, è l'ulteriore linea nodale della  $R_n^p$ , supposta dotata di  $\delta$  generatrici doppie e di una retta direttrice  $h$ -upla contenente  $k$  punti cuspidali, si ha:

$$m = \binom{n-1}{2} - \binom{h}{2} - p - \delta, \quad s = 2, \quad t = n - 2 - (h - 1);$$

e dalla superficie suddetta si stacca il fascio, da contarsi due volte, delle tangenti principali di  $R_n^p$  in ognuno dei restanti punti cuspidali. Risulta così che:

*Se la rigata  $R_n^p$  (n. 17) possiede  $\delta$  generatrici doppie<sup>30)</sup> ed eventualmente (distinta da queste) una retta direttrice  $h$ -upla, alla quale appartengano  $k$  punti cuspidali, le coppie di tangenti principali di  $R_n^p$  nei punti della residua linea doppia (irriducibile) formano una superficie di ordine:*

$$4(n-2)(n-3) + 6(n-4)p - 4\delta - \varepsilon,$$

ove

$$\varepsilon = 2(h-1)(n + 3p - 3 + h) - 2k$$

*oppure  $\varepsilon = 0$ , secondochè su  $R_n^p$  esiste effettivamente, o no, tale direttrice rettilinea.*

**19.** Il cono proiettante, da un punto generico  $O$ , la curva  $\Gamma$  dei punti ove la superficie  $R_n^p$  è osculata da rette di un complesso  $\Theta^\nu$  di grado  $\nu$ , seghi ulteriormente  $R_n^p$  in una curva  $\Gamma'$ .

Essendo  $2\nu(2n + 3p - 3)$  l'ordine di  $\Gamma$  (n. 17), quello di  $\Gamma'$  sarà:

$$2\nu(n-1)(2n + 3p - 3).$$

<sup>29)</sup> Si è già osservato (n. 17) che il regolo delle tangenti principali di  $R_n^p$ , nei punti di ciascuna generatrice singolare, si scinde in due fasci di raggi.

<sup>30)</sup> Una eventuale generatrice  $s$ -upla (con  $s > 2$ ) computandosi per  $\binom{s}{2}$  doppie.

Sopra ogni generatrice di  $R_n^p$ , la curva  $I$  ha  $2\nu$  punti, onde la  $I''$  ne deve avere:

$$2\nu(2n + 3p - 3) - 2\nu .$$

Pertanto (n. 18) le tangenti principali di  $R_n^p$ , nei punti di  $I''$ , formano una rigata di ordine:

$$\mu \equiv 4\nu(n - 1)(2n + 3p - 3) + 2(n + 3p - 3) \cdot 2\nu(2n + 3p - 4) .$$

Sia  $\tau$  una delle sue  $\mu\nu$  generatrici situate nel complesso  $\Theta^\nu$ : il punto di contatto  $T$  di  $\tau$  con  $R_n^p$  è allora comune alle curve  $I, I''$ ; e se  $T'$  è l'ulteriore punto di appoggio, con  $I'$ , del raggio proiettante  $OT$ , si verifica necessariamente uno dei tre casi:

1.  $T$  e  $T'$  sono distinti: di tali punti ve ne sono  $\xi$  coppie,  $\xi$  denotando il numero dei punti doppi apparenti della curva  $I$ ;
2.  $T$  e  $T'$  coincidono in uno dei punti cuspidali di  $R_n^p$ , tutti  $\nu$ -upli per  $I^{31}$ ): queste coincidenze sono quindi in numero di  $2\nu(n + 2p - 2)$ ;
3.  $T$  e  $T'$  coincidono in un punto del contorno apparente di  $R_n^p$  rispetto ad  $O$ : ciò avviene tante volte quant'è la classe [eguale (n. 17) all'ordine di  $I'$ ] della sviluppabile circoscritta ad  $R_n^p$  lungo la linea  $I$ .

È da osservare che, almeno in generale, nessuna coppia di punti  $T, T'$  può cadere in un punto multiplo  $M$ , non cuspidale, di  $R_n^p$ : infatti,  $T$  e  $T'$  dovrebbero allora necessariamente appartenere a falde diverse di  $R_n^p$ , e le tangenti principali, in  $M$ , a tali falde starebbero insieme nel complesso  $\Theta^\nu$ ; il che è da escludere se  $\Theta^\nu$  ed  $R_n^p$  sono in posizione generica.

Da quanto precede risulta quindi l'eguaglianza:

$$\mu\nu = 2\xi + 2\nu(n + 2p - 2) + 2\nu(2n + 3p - 3) ,$$

che fornisce il numero  $\xi$  dei punti doppi apparenti della curva  $I$ . Questa ha poi un punto  $\nu$ -uplo effettivo nel centro di ciascuno dei due fasci di raggi formanti il regolo delle tangenti principali nei punti di ogni generatrice singolare di  $R_n^p$ <sup>32)</sup>, e possiede pure un nodo nel punto di contatto, con  $R_n^p$ , di ogni retta comune alla congruenza<sup>33)</sup> delle tangenti

<sup>31)</sup> Poichè il fascio delle tangenti principali, in un tal punto, ad  $R_n^p$ , ha  $\nu$  raggi nel complesso  $\Theta^\nu$ .

<sup>32)</sup> Cfr. nota precedente.

<sup>33)</sup> Si richiami la nota <sup>26)</sup>.

principali di  $R_n^p$  ed a quella delle rette doppie (quando ne esistano  $\infty^2$ ) del complesso  $\Theta^\nu$ .

Dopo ciò, si può determinare sia il genere che il rango della linea  $\Gamma$ , e si perviene così al seguente risultato (cfr. n. 7):

*Sia dato, in posizione generica rispetto alla rigata  $R_n^p$  (n. 17), un complesso di rette  $\Theta^\nu$ , di grado  $\nu$  e tale che, in generale, per un punto passino  $\sigma$  sue rette doppie<sup>34</sup>), mentre in un piano ne esistano  $\tau$ .*

*Il luogo dei punti di contatto delle tangenti principali di  $R_n^p$ , che appartengono a  $\Theta^\nu$ , è allora una curva  $\Gamma$  di ordine:*

$$2\nu(2n + 3p - 3),$$

*di rango:*

$$2(4\nu^2 + 3\nu - 3\sigma - 3\tau)(n + 2p - 2),$$

*di genere:*

$$(4\nu^2 - 3\sigma - 3\tau)(n + 2p - 2) - \nu n + 1,$$

*e dotata di:*

$$4\nu^2 \binom{2n + 3p - 4}{2} + \binom{2\nu}{2}(3n + 4p - 5) - \binom{2\nu + 1}{2} p$$

*punti doppi apparenti.*

*La sviluppabile circoscritta alla rigata  $R_n^p$ , lungo la linea  $\Gamma$ , è di classe eguale all'ordine di  $\Gamma$ .*

*Ogni generatrice  $g$  di  $R_n^p$  incontra  $\Gamma$  in  $2\nu$  punti, che si riducono a due soli distinti, ciascuno  $\nu$ -uplo ordinario per  $\Gamma$ , quando  $g$  è singolare: tali punti  $\nu$ -upli sono i centri dei due fasci di raggi costituenti il regolo osculatore ad  $R_n^p$  lungo  $g$ ; onde uno di essi coincide sempre col punto cuspidale di  $g$ .*

*Oltre ai punti  $\nu$ -upli suddetti, in numero di  $4(n + 2p - 2)$ , la curva  $\Gamma$  possiede ancora:*

$$3(\sigma + \tau)(n + 2p - 2)$$

*punti doppi ordinari, situati nei punti di contatto di quelle tangenti principali di  $R_n^p$  che sono rette doppie del complesso  $\Theta^\nu$ <sup>35</sup>).*

<sup>34</sup>) Si intenda qui ripetuta la nota 15).

<sup>35</sup>) Il punto di contatto di una eventuale tangente principale, di  $R_n^p$ ,  $s$ -upla per  $\Theta^\nu$  è un punto  $s$ -uplo di  $\Gamma$  e va conteggiato per  $\binom{s}{2}$  punti doppi.

**20.** Applicando la proposizione del n. 19 nell'ipotesi che il complesso ivi considerato sia, ad esempio, quello delle rette incontranti una curva d'ordine  $\mu$ , con  $h$  punti doppî apparenti e  $k$  effettivi, si deve porre:

$$\nu = \mu, \quad \sigma = h + k, \quad \tau = \frac{1}{2} \mu (\mu - 1);$$

quindi [cfr. n. 9,  $\beta$ ):

*Il luogo dei punti di contatto delle tangenti principali della rigata  $R_n^p$  (n. 17), che si appoggiano ad una curva (anche piana) di ordine  $\mu$ , la quale sia in posizione generica rispetto ad  $R_n^p$  e possieda  $\delta$  punti doppî, tra apparenti ed effettivi<sup>36)</sup>, è una linea di ordine:*

$$2 \mu (2n + 3p - 3),$$

*di rango:*

$$(5\mu^2 + 9\mu - 6\delta)(n + 2p - 2),$$

*di genere:*

$$\frac{1}{2} (5\mu^2 + 3\mu - 6\delta)(n + 2p - 2) - \mu n + 1,$$

*con:*

$$4\mu^2 \binom{2n + 3p - 3}{2} - \mu [(2\mu + 3)n + (6\mu + 5)(p - 1)]$$

*punti doppî apparenti.*

*La stessa linea possiede poi  $4(n + 2p - 2)$  punti  $\mu$ -upli [ogni generatrice singolare  $g$  di  $R_n^p$  contenedone due, di cui uno è il punto cuspidale di  $g$  e l'altro è il centro del fascio di rette osculatrici situate nel piano tangente ad  $R_n^p$  lungo  $g$ ], nonchè:*

$$\frac{3}{2} (\mu^2 - \mu + 2\delta)(n + 2p - 2)$$

*ulteriori punti doppî effettivi [posti nei punti di contatto delle tangenti principali di  $R_n^p$  plurisecanti la curva data o passanti per punti multipli di questa<sup>37)</sup>].*

<sup>36)</sup> Tutti ordinari, e computato nel numero  $\delta$  per  $\binom{t}{2}$  punti doppî ogni punto  $t$ -uplo.

<sup>37)</sup> Il punto di contatto di una tangente principale di  $R_n^p$ , che  $t$ -sechi tale curva o ne contenga un punto  $t$ -uplo, è naturalmente  $t$ -uplo per il luogo considerato ed assorbe  $\binom{t}{2}$  dei punti doppî indicati.

**21.** Sia  $Q_\infty$  uno dei  $2n$  punti ciclici della rigata  $R_n^p$  (n. 17), genericamente posta rispetto al circolo assoluto  $K_\infty$ . Il regolo delle tangenti principali di  $R_n^p$ , nei punti della generatrice  $g$  passante per  $Q_\infty$ , incontra  $K_\infty$  in quattro punti, di cui uno è  $Q_\infty$ : ne segue che sulla generatrice ciclica  $g$  esistono tre punti propri in ognuno  $M$  dei quali la tangente principale  $t$  ad  $R_n^p$  è pure ciclica. Ma  $g$  e  $t$  sono, nel fascio delle tangenti in  $M$  ad  $R_n^p$ , i raggi doppî dell'involuzione delle coppie di *tangenti coniugate*: pertanto  $M$  è un ombelico della rigata  $R_n^p$ .

Il punto  $M$  appartiene poi alla curva luogo dei punti di contatto delle tangenti principali di  $R_n^p$  appoggiate a  $K_\infty$ ; tenendo quindi presente la proposizione del n. 20 (ove si ponga  $\mu = 2$  e  $\delta = 0$ ), si può concludere (cfr. n. 10):

*Ogni rigata gobba  $R_n^p$ , d'ordine  $n$  e di genere  $p$ , non avente speciali relazioni con l'assoluto dello spazio, possiede in generale  $6n$  ombelichi, situati a tre a tre sopra  $2n$  generatrici. Per essi passa sempre, sulla rigata, una curva di ordine:*

$$4(2n + 3p - 3),$$

*di rango:*

$$38(n + 2p - 2),$$

*di genere:*

$$11n + 26p - 25,$$

*con:*

$$16 \binom{2n + 3p - 3}{2} - 2(7n + 17p - 17)$$

*punti doppî apparenti, e con:*

$$7(n + 2p - 2)$$

*punti doppî effettivi; dei quali  $3(n + 2p - 2)$  sono i flessi della sezione di  $R_n^p$  col piano improprio, mentre i rimanenti appartengono alle generatrici singolari di  $R_n^p$ : ciascuna di queste ne contiene due, posti uno nel punto cuspidale e l'altro nel punto (semplice per  $R_n^p$ ) che è centro di un fascio di rette ivi tutte osculatrici ad  $R_n^p$ .*

Così, ad esempio, una rigata cubica generale  $R_3^0$  possiede (distribuiti a tre a tre su 6 generatrici) 18 ombelichi, pei quali passa una curva (di  $R_3^0$ ) d'ordine 12, di rango 38, di genere 8, avente 40 punti doppî apparenti e 7 nodi: 3 situati nei flessi della sezione piana all'infinito

di  $R_3^0$  e 4 nei punti ove le due generatrici singolari della superficie si appoggiano alle sue direttrici.

**22.** Sia  $C_m$  una curva d'ordine  $m$  della rigata  $R_n^p$  (n. 17), di cui incontri ogni generatrice in  $t$  punti. Se  $Q$  è un punto generico di  $C_m$  si possono considerare: la generatrice  $g$  di  $R_n^p$  uscente da  $Q$ , la tangente  $g'$  in  $Q$  a  $C_m$  e la tangente principale  $g''$ , in  $Q$ , ad  $R_n^p$ .

Variando  $Q$  su  $C_m$ , la retta  $g''$  descrive (n. 18) una superficie di ordine:

$$2m + 2t(n + 3p - 3);$$

invece l'ordine della rigata descritta da  $g'$  è uguale al rango di  $C_m$ , ossia, in generale<sup>38)</sup>, a:

$$2t(m + p - 1) - t(t - 1)n.$$

Inoltre, col variare di  $Q$  su  $C_m$ , nasce fra  $g$  e  $g'$ , come pure fra  $g$  e  $g''$ , una corrispondenza algebrica  $(1, t)$ , mentre  $g'$  e  $g''$  si corrispondono biunivocamente.

Basta ora applicare i risultati del n. 11 per concludere:

*Dati due complessi di rette  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$ , di rispettivi gradi  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , senza speciali relazioni con la rigata  $R_n^p$  (n. 17), sia  $C_m$  una curva d'ordine  $m$  genericamente posta su tale superficie e  $t$ -secante le sue generatrici.*

*Esistono allora punti di  $C_m$ , da ciascuno  $Q$  dei quali escono una retta di  $\Theta_1^{\nu_1}$ , ed una di  $\Theta_2^{\nu_2}$ , separanti armonicamente una delle seguenti coppie di rette:*

1. la generatrice di  $R_n^p$  passante per  $Q$  e la tangente in  $Q$  a  $C_m$ ;
2. la tangente in  $Q$  a  $C_m$  e la tangente principale in  $Q$  ad  $R_n^p$ ;
3. la tangente principale in  $Q$  ad  $R_n^p$  e la generatrice di  $R_n^p$  passante per  $Q$ .

Posto  $\varepsilon = \nu_1\nu_2$  se i complessi  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$  sono distinti, ed  $\varepsilon = \binom{\nu}{2}$  se invece coincidono in uno di grado  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , si ha in generale che il numero dei punti suddetti è rispettivamente:

$$2\varepsilon t(m + n + p - 1) - \varepsilon t^2 n$$

nel caso 1;

$$2\varepsilon m + 2\varepsilon t(m + n + 4p - 4) - 2\varepsilon \binom{t}{2} n$$

nel caso 2;

$$2\varepsilon m + 3\varepsilon t(n + 2p - 2)$$

nel caso 3.

<sup>38)</sup> Come si vede determinando prima il genere di  $C_m$  con una nota formula del Segre (loc. cit., n. 2).

Come corollario <sup>39)</sup>:

1') È:

$$2t(m + p - 1) - t(t - 2)n$$

il numero delle generatrici di  $R_n^p$  normali a  $C_m$ .

2') È:

$$2(t + 1)m - t(t - 3)n + 8t(p - 1)$$

il numero dei punti di  $C_m$  ove tale curva è ortogonale all'asintotica di  $R_n^p$  (non però generatrice) uscente da ciascuno di essi.

3') È:

$$2m + 3t(n + 2p - 2)$$

il numero delle generatrici di  $R_n^p$  normali, in punti della curva  $C_m$ , alle asintotiche di  $R_n^p$  uscenti dai punti stessi (e diverse dalle generatrici).

**23.** Dalla proposizione del n. 22 [caso 3] si deduce che una generica sezione piana della rigata  $R_n^p$  contiene:

$$\mu \equiv 5\varepsilon n + 6\varepsilon(p - 1)$$

punti, ciascuno  $M$  dei quali ha la proprietà che la generatrice passante per  $M$ , e la tangente principale in  $M$ , separano armonicamente una retta del complesso  $\theta_1^{\nu_1}$  ed una dell'altro  $\theta_2^{\nu_2}$ .

Ne segue che, su  $R_n^p$ , il luogo di tutti i punti  $M$  è una curva  $\Delta$  di ordine  $\mu$ , che deve appoggiarsi ad ogni generatrice  $g$  di  $R_n^p$  in  $2\varepsilon$  punti (cfr. n. 11): ridotti però a due soli distinti, entrambi  $\varepsilon$ -upli per  $\Delta$ , quando  $g$  è singolare.

Se poi della superficie  $R_n^p$  si considera, invece che una sezione piana, il contorno apparente rispetto ad un generico punto  $O$ , si trova similmente che l'ordine  $\mu$  di  $\Delta$  è anche la classe della sviluppabile circoscritta ad  $R_n^p$  lungo  $\Delta$ .

La curva  $\Delta'$ , ulteriore intersezione di  $R_n^p$  col cono proiettante  $\Delta$  da  $O$ , è di ordine  $\mu(n - 1)$  ed incontra in  $\mu - 2\varepsilon$  punti ciascuna generatrice di  $R_n^p$ : con ragionamento analogo a quello del n. 19 si determina allora il numero dei punti doppî apparenti di  $\Delta$ .

---

<sup>39)</sup> Supponendo entrambi i complessi costituiti dalle rette incidenti al circolo assoluto dello spazio.



Si può infine osservare che, secondo il n. 18, l'ordine della rigata  $\Sigma$  costituita dalle tangenti principali di  $R_n^p$  nei punti di  $\Delta$ , vale:

$$2\mu + 4\varepsilon(n + 3p - 3) .$$

È però da notare che, se  $F_1$  ed  $F_2$  sono i due fasci in cui si scinde il regolo delle tangenti principali di  $R_n^p$  nei punti di una generatrice singolare  $g$ , i loro rispettivi centri  $O_1$  e  $O_2$  (uno dei quali deve coincidere col punto cuspidale di  $g$ ) hanno sulla curva  $\Delta$  la molteplicità  $\varepsilon$ . Supposto quindi  $O_2$  il punto cuspidale di  $g$ , della superficie  $\Sigma$  fanno parte (cfr. n. 18)  $F_1$  ed  $F_2$  contati rispettivamente  $\varepsilon$  e  $2\varepsilon$  volte; onde, staccando da  $\Sigma$  tali coppie di fasci relativi a tutte le generatrici singolari di  $R_n^p$ , rimane una rigata di ordine:

$$2\mu + 4\varepsilon(n + 3p - 3) - 6\varepsilon(n + 2p - 2) .$$

Si perviene così al seguente risultato:

*Ritenuti per  $\Theta_1^{\nu_1}$ ,  $\Theta_2^{\nu_2}$ ,  $\varepsilon$  i medesimi significati che nel n. 22, sia  $M$  un punto variabile sulla rigata  $R_n^p$  (n. 17) in modo che la generatrice passante per  $M$  e la tangente principale  $\tau$  in  $M$  separino armonicamente due ulteriori tangenti in  $M$ , di cui una appartenga al complesso  $\Theta_1^{\nu_1}$ , e l'altra al complesso  $\Theta_2^{\nu_2}$ .*

*Il punto  $M$  descrive allora una curva  $\Delta$  di ordine:*

$$\varepsilon(5n + 6p - 6) ,$$

*eguale anche alla classe della sviluppabile descritta dal piano tangente in  $M$  ad  $R_n^p$ ; mentre la tangente principale  $\tau$  genera una rigata di ordine:*

$$4\varepsilon(2n + 3p - 3) .$$

*Inoltre è:*

$$\varepsilon^2 \binom{5n + 6p - 6}{2} - \binom{\varepsilon + 1}{2} (11n + 18p - 18) + 2\varepsilon(n + 2p - 2)$$

*il numero dei punti doppi apparenti di  $\Delta$ .*

*Si può aggiungere che quando  $\Theta_1^{\nu_1}$  e  $\Theta_2^{\nu_2}$  coincidono in un unico complesso quadratico  $\Theta^2$  (onde  $\varepsilon = 1$ ) la curva  $\Delta$  è necessariamente priva di punti multipli effettivi, ed ha pertanto il genere:*

$$4n + 8p - 7 .$$

Supponendo infine  $\theta^2$  il complesso di tutte le rette cicliche dello spazio, risulta in particolare (cfr. n. 16) che:

*Sulla rigata  $R_n^p$  (n. 17) i punti, le cui indicatrici di Dupin sono iperbolì equilateri, costituiscono una curva  $\Gamma$  di ordine:*

$$5n + 6p - 6,$$

*di rango:*

$$18n + 28p - 28,$$

*di genere:*

$$4n + 8p - 7,$$

*con:*

$$\binom{5n + 6p - 6}{2} - (9n + 14p - 14)$$

*punti doppi apparenti (e nessuno effettivo).*

*L'indicatrice relativa ad un punto variabile della linea  $\Gamma$  ha sempre un asintoto che è generatrice di  $R_n^p$ , mentre l'altro descrive una rigata di ordine:*

$$8n + 12p - 12$$

*e, se  $n > 2$ , di genere eguale a quello di  $\Gamma$ .*

(Ricevuto il 1° febbraio 1934)