Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen.

Autor(en): **Nowacki, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **7 (1934-1935)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515586

Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen

Von WERNER NOWACKI in Zürich

I. Allgemeines

1. Einleitung

Das Problem der sogenannten Raumformen [*F. Klein* (12)] handelt von Zusammenhängen zwischen topologischen und metrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten.

Definition: Unter einer euklidischen, dreidimensionalen Raumform M versteht man eine geschlossene oder offene Mannigfaltigkeit, die eine solche Metrik besitzt, daß die folgenden zwei Forderungen erfüllt sind:

1. Die Mannigfaltigkeit soll im Kleinen mit dem gewöhnlichen euklischen Raum R^3 isometrisch sein, d. h. zu jedem Punkt von M soll es eine Umgebung in M geben, die mit der vollen Umgebung eines Punktes des R^3 isometrisch ist.

2. Von jedem Punkt in M aus soll jede geodätische Strecke in jeder Richtung beliebig oft abgetragen werden können (Unendlichkeitspostulat). [Vgl. *L. Bieberbach* (4), *H. Hopf* (10), *W. Threlfall* und *H. Seifert* (21)].

Die analog definierten dreidimensionalen sphärischen Raumformen sind vollständig aufgezählt [*H. Hopf* (10), *H. Seifert, W. Threlfall* (18, 21)]; die hyperbolischen Raumformen scheinen erheblich größere Schwierigkeiten zu bieten [*F. Löbell* (14), *C. Weber* und *H. Seifert* (22)]. Diese Arbeit ist der Aufzählung der euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen gewidmet. Dabei werden alle homöomorphen Raumformen in eine Homöomorphieklasse zusammengefaßt und das zu lösende Problem besteht in der vollständigen Aufzählung aller Homöomorphieklassen der euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen. [Homöomorphie bedeutet die Existenz einer eineindeutigen und beiderseits stetigen Abbildung zweier Gebilde aufeinander.][1])

---

1) Nach Beendigung dieser Arbeit wurde im neuerschienenen Buche von *Seifert* und *Threlfall:* Topologie (Teubner, 1934) in der Anmerkung 38 auf S. 322 eine Arbeit der Herren *Hantzsche* und *Wendt* über Euklidische Raumformen angekündigt, die 1934 voraussichtlich in den Math. Ann. erscheinen wird. Wie uns Herr Prof. *Threlfall* freundlicherweise mitteilte, werden in jener Arbeit die geschlossenen euklidischen Raumformen aufgezählt und behandelt. (Math. Ann. Bd. 110 (1934), S. 593.)

Solche Raumformen M erhält man in den Fundamentalbereichen [oder, spezieller, den normalen Diskontinuitätsbereichen (in der Kristallographie domaines de Dirichlet, Voronoische Bereiche (*B. Delaunay*), Wirkungsbereiche (*P. Niggli*) genannt; vgl. *W. Nowacki* (16))] der fixpunktfreien, eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppen des R^3, der sogenannten Raumgruppen RG, wenn man in bezug auf die Raumgruppe äquivalente Punkte identifiziert. Daß man damit auch alle Raumformen M umfaßt, haben *W. Killing* (11) und *H. Hopf* (10) bewiesen. Es gilt also folgender — übrigens auch für nicht-euklidische Räume jeder Dimensionszahl gültige, analog modifizierte —

Hauptsatz: *Man erhält alle euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen M als Fundamentalbereiche der fixpunktfreien, eigentlich diskontinuierlichen Raumgruppen des euklidischen dreidimensionalen Raumes durch Identifikation in bezug auf die Raumgruppe äquivalenter Punkte.*

Das Aufzählungsproblem der Raumformen ist damit auf die Untersuchung von Raumgruppen zurückgeführt. Die Raumgruppen des R^3 zerfallen in zwei Kategorien, solche mit endlichem und solche mit unendlichem Fundamentalbereich FB. Die ersteren liefern geschlossene, die letzteren offene Raumformen. Wenn eine RG einen endlichen FB besitzt, so ist nach *A. Schoenflies* (17) und *L. Bieberbach* (3) in ihr eine Translationsuntergruppe mit drei linear unabhängigen Translationen (als Normalteiler) enthalten und umgekehrt. Raumgruppen mit unendlichem FB enthalten höchstens zwei linear unabhängige Translationen. Letztere Gruppen können daher nach der Zahl (2, 1, 0) der linear unabhängigen Translationen ihrer Translationsuntergruppe in Gesamtheiten geteilt werden, was eine erste Klassifizierung der offenen Raumformen ergibt (vgl. Teil III).

Eine weitere Unterteilung wird durch die Art der Gruppen gegeben. Gruppen erster Art, solche, welche nur reine Drehungen, Schraubungen oder Translationen, also indikatrixerhaltende Transformationen, enthalten, erzeugen orientierbare Raumformen; Gruppen zweiter Art, in denen neben Drehungen, Schraubungen und Translationen auch Spiegelungen, Dreh- und Gleitspiegelungen vorkommen können, erzeugen nicht-orientierbare Raumformen. Die Gesamtheit der Raumformen erlaubt somit die vierfache Einteilung gemäß der Eigenschaften geschlossen — offen und orientierbar — nichtorientierbar.

2. Die geschlossenen Raumformen

Die Raumgruppen *RG* (oder Bewegungsgruppen) mit endlichem Fundamentalbereich *FB* sind schon lange aus der Kristallographie bekannt [*E. Feodoroff* (6) 1891, *A. Schoenflies* (17) 1891]. Ihre Anzahl ist 230; dabei heißen zwei *RG* gleich, wenn sie durch eine von der Spiegelung verschiedene affine Transformation ineinander überführbar sind. Später wurden diese Gruppen von *P. Niggli* (15) neu abgeleitet und explizite beschrieben. Die Methoden dieser Autoren sind geometrischer Natur. Mit algebraischen Hilfsmitteln beantwortete *L. Bieberbach* (3) die von *D. Hilbert* (9) aufgeworfene Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit der Zahl der *RG* des euklidischen, n-dimensionalen Raumes im Sinne der Endlichkeit. An ihn und *G. Frobenius* (8) anschließend hat *J. J. Burckhardt* (5) einen Weg zur arithmetischen Ableitung der *RG* angegeben; von *F. Seitz* (20) stammt ebenfalls eine algebraische Ableitung aller *RG*.

Diese nicht-affin verwandten *RG* sind aber auch *nicht-isomorph*. Dies folgt aus einem allgemeinen Satz von *L. Bieberbach* (3, II, § 4), der lautet: *Isomorphe Raumgruppen mit endlichem Fundamentalbereich sind affin verwandt.* Folglich haben die aus diesen (fixpunktfreien) *RG* resultierenden Raumformen nicht-isomorphe Fundamentalgruppen (eben diese *RG*); sie ergeben daher verschiedene Homöomorphieklassen. Um die verschiedenen Homöomorphieklassen der geschlossenen Raumformen *M* zu erhalten, muß man folglich die *FB* aller nicht-affin verwandten fixpunktfreien *RG* betrachten; das sind aber gerade diejenigen Gruppen, welche in der Kristallographie als „verschieden" bezeichnet werden, mit der einen Ausnahme, daß in der Kristallographie zwei *RG*, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen (sog. enantiomorphe *RG*), auch noch als verschieden angenommen werden. Solche *RG* liefern aber offensichtlich homöomorphe Raumformen.

Das Resultat der bisherigen Betrachtung läßt sich zusammenfassen in folgenden

Satz: *Die endlichen Fundamentalbereiche der aus der Kristallographie bekannten, nicht-affin-verwandten, fixpunktfreien Raumgruppen stellen alle Homöomorphieklassen der euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen Raumformen dar.*

Die Fixpunktlosigkeit der Gruppen wird gefordert, damit in *M* keine Stigmata [*F. Klein* (13)] auftreten. Fixpunktlos ist eine Gruppe dann, wenn es keine von der Identität verschiedene Operation in der Gruppe gibt, die irgendeinen Punkt in sich überführt. Die Gesamtheit der

Operationen, die einen Punkt einer RG in sich überführen, heißt die Symmetriebedingung des Punktes in der betreffenden RG. Diese Symmetriebedingungen sind in den Raumgruppentabellen für sämtliche Punkte aller RG angegeben [*P. Niggli* (15, Tab. IV)]. Eine RG ist somit fixpunktfrei, wenn es in ihr nur Punkte mit der Symmetriebedingung der Identität (kristallographisches Symbol C_1) gibt. Um also sämtliche fixpunktfreie RG zu erhalten, greift man an Hand der expliziten Tabellen [Tab. IV bei *P. Niggli* (15)] diejenigen nicht-affin-verwandten heraus, welche nur Punkte der Symmetriebedingung C_1 enthalten.

[Anmerkung. Die fixpunktfreien RG sind übrigens leicht direkt ableitbar, ohne die explizite Darstellung der 230 RG zu benutzen. Der Fixpunktfreiheit wegen kommen nämlich — geometrisch gesprochen — als erzeugende Symmetrieelemente nur Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen in Frage, da Drehungsachsen, Spiegel- oder Drehspiegelebenen Fixpunkte einführen würden. Es läßt sich dann zeigen, daß bei endlichem FB als Drehwinkel der Schraubungen nur die Winkel $\frac{2\pi}{l}$ ($l = 1, 2, 3, 4, 6$) auftreten können. Die fixpunktfreien RG müssen also Kombinationen dieser Schraubungen unter sich, mit Gleitspiegelebenen zusammen, oder letzterer allein darstellen. Auf diese Weise gelangt man zu den 10 fixpunktfreien, nicht-affin-verwandten RG mit endlichem FB: C_1^1, C_2^2, C_3^2, C_4^4, C_6^2, D_2^4; C_s^2, C_s^4, C_{2v}^5, C_{2v}^9 (vgl. Teil II).]

3. Die offenen Raumformen

Die RG mit unendlichem FB sind ebenfalls aus der Kristallographie bekannt. Sie können einerseits nach ihrer Art, andererseits nach der Zahl der unabhängigen Translationen ihrer Translationsuntergruppe (wenn überhaupt vorhanden) klassifiziert werden. Die Gruppen mit zwei linear unabhängigen Translationen (sog. zweidimensionale RG) wurden zuerst von *E. Alexander* und *K. Herrmann* (2) und *L. Weber* (23) abgeleitet, z. T. später arithmetisch von *J. J. Burckhardt* (5). Es sind ihrer 80[1]). RG mit einer Translation (sog. eindimensionale RG) gibt es unendlich viele[1]) [*E. Alexander* (1)], weil die Beschränkung der Zähligkeit der Symmetrieachsen auf 1, 2, 3, 4, 6 dahinfällt. Außerdem gibt es noch eigentlich diskontinuierliche RG des R^3 ohne Translationsuntergruppe; das sind nämlich diejenigen, die eine Schraubung um einen irrationalen Teil von 2π gestatten. [Die Gruppen $C_{r,r'}$, $D_{r,r'}$ bei *E. Alexander* (1) sind mit den Gruppen C_r, D_r bzw. C_r^n, D_r^n identisch.]

[1]) Gleichheitsdefinition wie bei RG mit endlichem FB (dreidimensionale RG).

Die Fixpunktlosigkeit entscheidet man analog zu 2. an Hand der Tabelle I bei *E. Alexander* und *K. Herrmann* (2), bzw. der Tabelle auf S. 379 bei *E. Alexander* (1). Ob zwei erhaltene Raumformen M homöomorph sind oder nicht, ist jetzt deshalb nicht so einfach zu entscheiden, weil ein dem in Nr. 2 genannten Bieberbachschen Satz für RG mit endlichem FB analoger Satz für RG mit unendlichem FB nicht existiert. Ein erstes Kriterium ist die Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit; RG erster Art liefern orientierbare, RG zweiter Art nicht-orientierbare Raumformen. Kann man zweitens zeigen, daß zwei RG nicht isomorph sind, so liefern diese sicher nicht-homöomorphe Raumformen. Sind zwei RG isomorph und von derselben Art, so können die Raumformen dennoch nicht-homöomorph sein; eine Spezialuntersuchung ist dann nötig. Unser Ergebnis wird für $n = 3$ den von *L. Bieberbach* (4) allgemein bewiesenen Satz bestätigen, daß es nur endlich viele topologische Typen (Homöomorphieklassen) offener euklidischer Raumformen gegebener Dimension n gibt.

Unter II. und III. folgt die explizite Darstellung der erhaltenen Resultate. Jede Raumform wird durch einen geeignet identifizierten FB beschrieben. Auf nähere topologische oder metrische Charakterisierung wird verzichtet. Die Symbolisierung der RG ist die der Kristallographie; von jeder RG werden erzeugende Substitutionen angegeben.

II. Die geschlossenen Raumformen

(Fundamentalgruppen mit drei linear unabhängigen Translationen.)

1. Die orientierbaren Raumformen

Abkürzungen: M = euklidische, dreidimensionale Raumform
RG = Raum- oder Bewegungsgruppe
C_1^1 usw. = kristallographisches Symbol der RG
$A, B, \ldots$ = erzeugende Substitutionen
FB = Fundamentalbereich
t = translatorische Identifikation
a = axiale Identifikation
z = zentrische Identifikation
lr = links — rechts
vh = vorne — hinten
uo = unten — oben

M₁. $RG = C_1^1$ = reine Translationsgruppe [Symbolisierung nach *P. Niggli* (15)]. $A: x' = x + 1, y' = y, z' = z$; $B: x' = x, y' = y + 1, z' = z$; $C: x' = x, y' = y, z' = z + 1$; schiefwinkliges Koordinatensystem. *FB* z. B. Parallelepiped (so gestellt, daß man eine linke, rechte, vordere, hintere, untere und obere Seitenfläche unterscheiden kann). $M_1: lr = t, vh = t, uo = t$; M_1 = topologisches Produkt aus drei Kreisen oder aus Torus und Kreislinie.

M₂. $RG = C_2^2 \cdot A: x' = x + 1, y' = y, z' = z$; $B: x' = x, y' = y + 1, z' = z$; $C: x' = -x, y' = -y, z' = z + 1$; Winkel zwischen x- und y-Achse $= \frac{2\pi}{k}$ (k = beliebig), z-Achse normal xy-Ebene; C = Schraubung um z-Achse um $\frac{2\pi}{l}$ ($l = 2$). FB = gerades Parallelepiped. $M_2: lr = t, vh = t, uo = z$ (i. B. auf Körperzentrum des Parallelepipeds).

M₃. $RG = C_3^2 \cdot A$: Translation parallel x-Achse: $x' = x + 1, y' = y, z' = z$; B: Translation parallel y-Achse: $x' = x, y' = y + 1, z' = z$ (Fig. 1); $\sphericalangle\, x, y = \frac{2\pi}{k}$ ($k = 3$); C: Drehung um z-Achse (Einstichpunkt A_1, normal xy-Ebene) um $\frac{2\pi}{l}$ ($l = 3$) bei gleichzeitiger Translation längs z-Achse (Schraubung): $x' = y - x, y' = -x, z' = z + 1$. FB = gerades Prisma mit Rhombus als Basis und Translationsgröße (-komponente) parallel z-Achse als Höhe. $M_3: lr = t, vh = t, uo$ = Drehung der Punkte von u um z-Achse um $\frac{2\pi}{3}$ bei gleichzeitiger Translation nach o. [Anm. C_3^3 ist das Spiegelbild von C_3^2. C_3^2 und C_3^3 liefern homöomorphe Raumformen.]

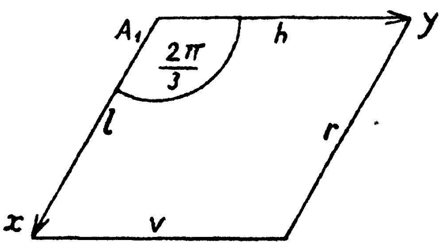

Fig. 1.

M₄. $RG = C_4^4 \cdot A: x' = x + 1, y' = y, z' = z$; $B: x' = x, y' = y + 1, z' = z$; $C: x' = y, y' = -x, z' = z + 1$. $\sphericalangle\, x, y = \frac{2\pi}{k}$ ($k = 4$), z-Achse normal xy-Ebene, Drehungswinkel der Schraubung $(C) = \frac{2\pi}{l}$ ($l = 4$). FB = gerades Prisma mit quadratischer Basis. $M_4: lr = t, vh = t, uo =$

Drehung der Punkte von u um Achse parallel z durch Mitte des Basisquadrates um $\frac{2\pi}{4}$ bei gleichzeitiger Translation nach o. [Anm. $C_4^2 =$ Spiegelbild von C_4^4; homöomorphe Raumformen.]

M₅. $RG = C_6^2 \cdot A: x' = x + 1, y' = y, z' = z$; $B: x' = x, y' = y + 1, z' = z$; $C: x' = y, y' = y - x, z' = z + 1$; Schraubung um $\frac{2\pi}{l}$ $(l = 6)$ um z-Achse. $\sphericalangle\, x, y = \frac{2\pi}{k}$ $(k = 3)$, z-Achse normal xy-Ebene (Fig. 1). $FB =$ gerades Prisma mit Rhombus als Basis (Fig. 1) und Translationsgröße parallel z-Achse als Höhe. $M_5: lr = t$, $vh = t$, $uo =$ Drehung der Punkte von u um z-Achse (Einstichpunkt A_1 in Fig. 1) um $\frac{2\pi}{l}$ $(l = 6)$ bei gleichzeitiger Translation nach o. [Anm. $C_6^3 =$ Spiegelbild von C_6^2; homöomorphe Raumformen.]

Die Fundamentalgruppen von M_1 bis M_5 sind allgemein gleich dem Produkt einer Schraubung $C\left(\frac{2\pi}{l}, \tau\right)$ mit zwei zu ihr normalstehenden linear unabhängigen Translationen A und B, wobei die Winkel zwischen den Translationen bzw. die Schraubungswinkel gleich sind $\frac{2\pi}{k}$ ($k =$ unbestimmt, unbestimmt, 3, 4, 3) bzw. $\frac{2\pi}{l}$ $(l = 1, 2, 3, 4, 6)$ und z. B. folgende Relationen gelten: $AB = BA$, $AC^l = C^lA$, $BC^l = C^lB$.

M₆. $RG = D_2^4 \equiv V^4 \cdot A: x' = x + 1, y' = 1 - y, z' = -z$; $B: x' = -x, y' = y + 1, z' = 1 - z$; $C: x' = 1 - x, y' = -y, z' = z + 1$. Rechtwinkliges Koordinatensystem. $A, B, C =$ Schraubungen um $\frac{2\pi}{2}$ um drei normale windschiefe Achsen parallel x-, y-, z-Achse. $FB =$ rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 2). $M_6: lv =$ die Punkte von l werden um die Achse $A_1 A_2$ um $\frac{2\pi}{2}$ gedreht und gleichzeitig um die Strecke

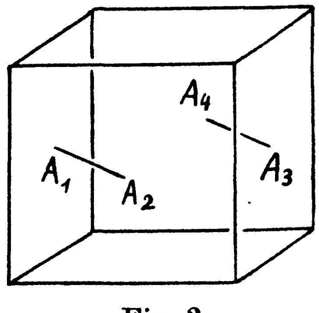

Fig. 2.

$\overline{A_1 A_2}$ nach v translatiert, analog bei rh ($A_1, \ldots, A_4$ = Mitten der Seitenflächen des FB), $uo = z$ (i. B. auf Körperzentrum des FB).

2. Die nicht-orientierbaren Raumformen

M₇. $RG = C_s^2 \cdot A : x' = x + 1,\ y' = -y,\ z' = z;\ B : x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z;\ C : x' = x,\ y' = y,\ z' = z + 1$; drei Erzeugende; Translation B ist normal zur Gleitspiegelebene = xz-Ebene. $\sphericalangle\, x, y = \sphericalangle\, y, z = \frac{2\pi}{4}$, $\sphericalangle\, z, x$ = beliebig. FB = Parallelepiped mit rechteckiger Basis. $M_7 : lr = t,\ vh = a$ (i. B. auf die Gerade, welche die Mitten der Basisflächen verbinden), $uo = t$. M_7 = Produkt aus Kleinschem Schlauch und Kreislinie.

M₈. $RG = C_s^4 \cdot A : x' = x + 1,\ y' = -y,\ z' = z;\ B : x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z + 1$. $\sphericalangle\, x, y = \sphericalangle\, y, z = \frac{2\pi}{4}$, $\sphericalangle\, z, x$ = beliebig. Zwei Erzeugende; Translation B nicht normal zur Gleitspiegelebene = xz-Ebene. FB = Würfel. $M_8 : lr = t,\ vh = t,\ uo$ = die Punkte von u werden an der Ebene, die durch zwei entsprechende Diagonalen der beiden Basisflächen geht, gespiegelt und gleichzeitig nach o verschoben.

M₉. $RG = C_{2v}^5 \cdot A : x' = x + 1,\ y' = -y,\ z' = z;\ B : x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z;\ C : x' = 1 - x,\ y' = -y,\ z' = z + 1$. Rechtwinkliges Koordinatensystem. FB = rechtwinkliges Parallelepiped. $M_9 : lr = t$, $vh = a$ (i. B. auf die Gerade durch die Mitten der Basisflächen), $uo = z$ (i. B. auf Körpermitte).

M₁₀. $RG = C_{2v}^9 \cdot A : x' = x + 1,\ y' = -y,\ z' = z;\ B : x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z;\ C : x' = 1 - x,\ y' = 1 - y,\ z' = z + 1$. Rechtwinkliges Koordinatensystem. FB z. B. quadratisches Prisma. $M_{10} : lv$ = die Punkte von l werden an der Ebene $A_1 A_2 A_3 A_4$ gespiegelt und gleichzeitig um $\overline{A_1 A_4} = \overline{A_2 A_3}$ nach v verschoben, rh analog, $uo = z$ (i. B. auf Körpermitte). (Fig. 3.)

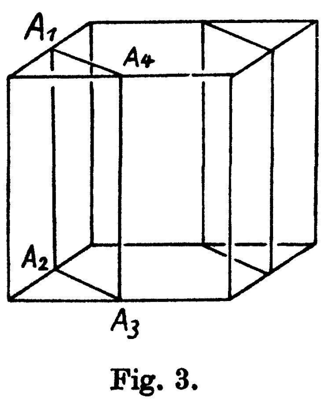

Fig. 3.

III. Die offenen Raumformen[1]

1. Die orientierbaren Raumformen

a) Fundamentalgruppen mit zwei linear unabhängigen Translationen

M_{11}. $RG = C_1^{\mathrm{I}}$ [Symbolisierung nach *E. Alexander* und *K. Herrmann* (2)]. $A: x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z$; $B: x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z$; zwei linear unabhängige Translationen, $\sphericalangle\, x, y =$ beliebig; abelsche Gruppe. $FB =$ unendlich langes Prisma mit Parallelogramm als Normalschnitt, so gestellt, daß man eine vordere, hintere, linke und rechte Seitenfläche unterscheiden kann. $M_{11}: vh = t,\ lr = t$. $M_{11} =$ topologisches Produkt aus Kreis und Kreis und Geraden oder aus Torus und Geraden oder aus unendlich langem Zylinder und Kreislinie.

M_{12}. $RG = C_2^{\mathrm{III}} \cdot A: x' = -x, y' = y + 1, z' = -z; B: x' = x + 1,$ $y' = y,\ z' = z$; $\sphericalangle\, x, y = \frac{2\pi}{4}$. Nicht-abelsch, mit $RG = C_1^{\mathrm{I}}$ nicht isomorph, deshalb M_{12} mit M_{11} nicht-homöomorph. $FB =$ unendlich langes Prisma mit rechteckigem Normalschnitt. $M_{12}: vh = z$ (i. B. auf Mitte irgend eines Normalschnittes), $lr = t$.

b) Fundamentalgruppen mit einer Translation

M_{13}. $RG = C_n^1$ [Symbolisierung nach *E. Alexander* (1)]. A: Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ ($n =$ rational) bei gleichzeitiger Translation parallel Drehachse $=$ n-zählige Schraubung (für $n = 1$ resultiert die einfache Translation). Freie zyklische Gruppe einer Erzeugenden; C_n^1 mit C_1^{I} (direktes Produkt zweier unendlicher zyklischer Gruppen) und C_2^{III} (nicht-abelsch) nicht isomorph, deshalb M_{13} mit M_{11} und M_{12} nicht homöomorph. Alle Raumformen, die man je nach dem Wert von n erhält, sind homöomorph [*L. Bieberbach* (4)]. (Diese Gruppen C_n^1 sind übrigens isomorph, ohne affin-verwandt zu sein.] $FB =$ unendlich große „Platte", normal zur senkrecht gestellten Schraubungsachse, deren „Dicke" gleich der Höhe der Schraubung ist. M_{13}: die Punkte von u werden um die Schraubungsachse um $\frac{2\pi}{n}$ gedreht und gleichzeitig nach o verschoben.

---

[1]) Wie oben in I, 3, bemerkt, muß im folgenden die Nicht-Homöomorphie mangels eines Analogons zum Bieberbachschen Satz jedesmal neu nachgewiesen werden.

c) Fundamentalgruppen ohne Translationsuntergruppe

$RG = C_r$ [Symbolisierung nach *E. Alexander* (1)] = Drehung um $\frac{2\pi}{r}$ (r = irrational] bei gleichzeitiger Translation (sog. irrationale Schraubung). Resultierende M mit M_{13} homöomorph [*L. Bieberbach* (4)], also kann n in M_{13} jede Zahl ($\neq 0$) sein.

M$_{14}$. RG = Identität. M_{14} = gewöhnlicher dreidimensionaler euklidischer Raum.

2. Die nicht-orientierbaren Raumformen

a) Fundamentalgruppen mit zwei linear unabhängigen Translationen

M$_{15}$. $RG = C_{1h}^{\mathrm{II}}$ [Symbolisierung nach *E. Alexander* und *K. Herrmann* (2)]. $A: x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z;\ B: x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = -z;$ $\sphericalangle\ x, y$ = beliebig. xy-Ebene ist Gleitspiegelebene mit der Gleitrichtung parallel y-Achse, abelsche Gruppe: $AB = BA$. FB = unendlich langes Prisma mit rechteckigem Normalschnitt. $M_{15}: vh = a$ (i. B. auf die Gerade durch die Mitte irgend eines Normalschnittes und normal zur linken und rechten Seitenfläche), $lr = t$. M_{15} = Produkt aus unberandetem Moebiusband und Kreislinie.

M$_{16}$. $RG = C_{1h}^{\mathrm{IV}} \cdot A: x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z;\ B: x' = -x,\ y' = y + 1,\ z' = z;\ \sphericalangle\ x, y = \frac{2\pi}{4}$. $AB^2 = B^2A$, nicht-abelsch; daher M_{16} mit M_{15} nicht homöomorph. FB = unendlich langes Prisma mit rechteckigem Normalschnitt (Fig. 4). $M_{16}: vh = t,\ lr = a$ (i. B. auf Gerade durch Mitte des Normalschnittes und parallel den Seitenflächen). M_{16} = Produkt aus Kleinschem Schlauch und Geraden.

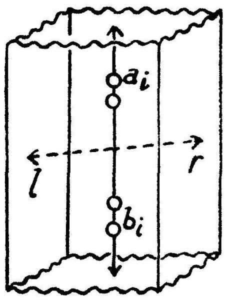

Fig. 4.

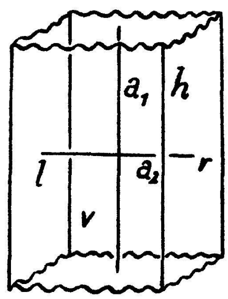

Fig. 5.

$\mathbf{M_{17}}$. $RG = C_{2v}^{\mathrm{XIV}}$. Die Bildebene selbst ist Gleitspiegelebene; in ihr liegen zweizählige parallele Schraubenachsen; auf ihr normal steht eine Schar paralleler Gleitspiegelebenen. Erzeugende Operationen sind z. B. A: Gleitspiegelung an der Bildebene: $x' = x + 1$, $y' = y$, $z' = -z$, und B: Schraubung: $x' = -x$, $y' = y + 1$, $z' = -z$, $AB^2 = B^2A$, nichtabelsch, deshalb M_{17} mit M_{15} nicht homöomorph. FB = unendlich langes Prisma mit rechteckigem Normalschnitt. M_{17}: $vh = a$ (i. B. auf a_2), $lr = a$ (i. B. auf a_1). (Fig. 5.)

Wie sich zeigt, sind C_{1h}^{IV} (M_{16}) und C_{2v}^{XIV} (M_{17}) isomorph (aber nicht affinverwandt). Man kann also nicht von vorneherein sagen, daß M_{17} nicht homöomorph zu M_{16} ist. Daß die beiden Raumformen tatsächlich nicht topologisch äquivalent sind, lehrt die Betrachtung ihrer Enden [vgl. *H. Freudenthal* (7)][1]). M_{16} hat zwei Enden, denn es gibt in M_{16} zwei divergente Punktfolgen a_i und b_i — (die eine mit $z \to +\infty$, die andere mit $z \to -\infty$) — derart, daß die Verbindungswege $w_i = a_i\, b_i$, wie man sie auch wählt, niemals eine divergente Folge bilden. (Ein anderes Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit zwei Enden ist der unendlich lange Zylinder.) M_{17} hingegen besitzt nur ein Ende, denn zu jedem Paar divergenter Punktfolgen a_i und b_i gibt es, wie man leicht sieht, eine divergente Folge von Verbindungswegen $w_i = a_i\, b_i$. (Ein anderes Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit einem Ende ist die Ebene.) Zwei M, wie M_{16} und M_{17}, mit verschiedener Endenzahl sind nicht homöomorph.

b) Fundamentalgruppen mit einer Translation

$\mathbf{M_{18}}$. $RG = C_{1vt}^{0}$ [Symbolisierung nach *E. Alexander* (1)]. Die Gruppe besteht aus einer einzigen Gleitspiegelebene mit einer Gleitrichtung und -größe (-komponente); freie zyklische Gruppe einer Erzeugenden; C_{1vt}^{0} weder mit C_{1h}^{II}, C_{1h}^{IV} noch mit C_{2v}^{XIV} isomorph; M_{18} folglich weder mit M_{15}, M_{16} noch mit M_{17} homöomorph. FB = unendlich große „Platte" normal zur Gleitrichtung, deren „Dicke" gleich der Größe der Gleitkomponente ist. M_{18}: $uo = a$ (i. B. auf eine Gerade parallel den Plattenebenen in halber Höhe).

IV. Zusammenfassung

Das Resultat dieser Arbeit kommt in folgender Zusammenstellung zum Ausdruck:

---

[1]) Für diesen Hinweis, sowie für mehrere andere Ratschläge, danke ich Herrn Prof. *H. Hopf* bestens.

Zahl der euklidischen dreidimensionalen Raumformen:

	orientierbar	nicht-orientierbar		Gesamtzahl
geschlossen (3 Trl.)	6	4	10	18
offen (2 Trl.) (1 Trl.) R^3 selbst	2 1 1 } 4	3 1 — } 4	8	

Die nächste Aufgabe wird sein, die einzelnen Raumformen in topologischer wie metrischer Hinsicht genauer zu untersuchen.

Literatur

1. *E. Alexander,* Systematik der eindimensionalen Raumgruppen. Z. Krist. 70, 367. 1929.
2. *E. Alexander* und *K. Herrmann,* Die 80 zweidimensionalen Raumgruppen. Z. Krist. (69, 285. 1929); 70, 328, 460. 1929.
3. *L. Bieberbach,* Über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume. Math. Ann. I, 70, 297. 1910; II, 72, 400. 1912.
4. *L. Bieberbach,* Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen. Sitz.-Ber. d. Pr. Ak. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1929, S. 612.
5. *J. J. Burckhardt,* Zur Theorie der Bewegungsgruppen. Comm. Math. Helv., Vol. 6, 1933/34.
6. *E. Feodoroff,* Symmetrie der regelmäßigen Systeme der Figuren. Verh. d. Russ.-K.-Min. Ges. zu St. Petersburg, 2. Ser., 21, 1. 1885; 28, 1. 1891.
7. *H. Freudenthal,* Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeitschrift 33, 602. 1931.
8. *G. Frobenius,* Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen. Sitz.-Ber. d. Pr. Ak. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1911.
9. *D. Hilbert,* Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten, 1900.
10. *H. Hopf,* Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. 95, 313. 1926.
11. *W. Killing,* Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Bd. I, Paderborn, 1893.
12. *F. Klein,* Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann. 37, 1890; Werke, Bd. I, S. 353.
13. *F. Klein,* Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. Springer, 1928.
14. *F. Löbell,* Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. üb. d. Verh. d. Sächs. Ak. d. Wiss., math.-phys. Kl. 83, 168. 1931.
15. *P. Niggli,* Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. Gebr. Borntraeger, 1919.
16. *W. Nowacki,* Der Begriff „Voronoischer Bereich". Z. Krist. 85, 331. 1933 und Raumteilung. Diss. E. T. H. (In Bearbeitung).
17. *A. Schoenflies,* Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig, Teubner, 1891; 2. Aufl. Theorie der Kristallstruktur, Gebr. Borntraeger, 1923.

18. *H. Seifert*, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. üb. d. Verh. der Sächs. Ak. d. Wiss., math.-phys. Kl. 83, 26. 1931.

19. *H. Seifert* und *W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie. Teubner, 1934.

20. *F. Seitz*, A matrix-algebraic development of the crystallographic groups. Z. Krist. I. 88, 433. 1934.

21. *W. Threlfall* und *H. Seifert*, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. Math. Ann. I, 104, 1. 1931; II, 107, 543. 1932.

22. *C. Weber* und *H. Seifert*, Die beiden Dodekaederräume. Math. Zeitschrift 37, 237. 1933.

23. *L. Weber*, Die Symmetrie homogener ebener Punktsysteme. Z. Krist. 70, 309. 1929.

(Eingegangen den 30. Juli 1934.)