Sur les corps potentiellement équivalents et les fonctions harmoniques multiformes.

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **7 (1934-1935)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515589

Sur les corps potentiellement équivalents et les fonctions harmoniques multiformes (suite),

par R. Wavre, Genève.

Rappel.

Cet article fait suite à celui qui est paru au volume VI, p. 317 de cette Revue. Nous envisagions une surface S analytique et deux fonctions g et f holomorphes sur S frontière comprise. Puis nous construisions le potentiel suivant qui sera dit mixte si aucune des deux fonctions g et f n'est identiquement nulle

$$U = \int \left(\frac{g}{r} + f \frac{d \frac{1}{r}}{d n} \right) d\, S.$$

Nous construisions d'autre part une fonction p dite de passage au travers de la surface S et qui était définie par la résolution du problème de Cauchy-Kowalewska

$$\varDelta\, p = 0;\ \frac{d\,p}{d\,n} = 4\,\pi\,g \text{ sur } S;\ p = -4\,\pi\,f \text{ sur } S.$$

Ce problème admet une solution et une seule, comme on sait. Le potentiel U peut alors s'écrire

$$U = \int (p)\, d\,S \quad \text{avec} \quad \int (p)\, d\,S = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\,p}{d\,n} - p \frac{d \frac{1}{r}}{d\,n} \right) d\,S.$$

Ceci étant, le potentiel prolongé de P en M au travers de S dans le sens de la normale positive, donne lieu à la relation

$$U_{PSM} = U_M + p,$$

et la fonction de passage p est en même temps une fonction période pour le potentiel U et attachée à la frontière de S.

Puis nous avions à la fin de l'article précédent montré que certaines couches ne pouvaient pas être déformées sans que le potentiel qu'elles créent ne varie au voisinage de tout point de l'espace.

Comme précédemment, nous dirons que deux corps sont équivalents s'ils créent le même potentiel newtonien au voisinage d'un point de l'espace.

§ 7. *Sur l'équivalence de certains couches analytiques.*

Soient S et S' deux couches analytiques, P un point de l'espace, puis p et p' les fonctions de passage au travers des deux couches. Ceci étant, supposons les potentiels égaux au voisinage de P

$$\int (p)\, d\,S = \int (p')\, d\,S'.$$

Alors, il est très simple d'exclure certaines configurations topologiques formées par l'ensemble des deux surfaces.

a) Il est impossible d'atteindre à partir P la frontière de l'une des couches (S) en évitant S et S' et la frontière de S'. En effet, le long d'un tel chemin, le potentiel créé par S' resterait harmonique dans un petit canal qui contiendrait tout le chemin à son intérieur. Tandis que le potentiel créé par S se ramifierait au voisinage de la frontière de S.

b) Si les deux surfaces S et S' forment par leur réunion une seule surface fermée divisant l'espace en deux régions seulement, l'une intérieure i, l'autre extérieure e, elles ne pourraient être chargées de simples couches; et si ces couches sont doubles, les densités sont constantes et égales.

En effet, si P est dans e, alors, en traversant la surface S, l'on aura dans i

$$\int (p)\, d\,S + p = \int (p')\, d\,S'$$

et en traversant la surface S', l'on aurait dans i

$$\int (p)\, d\,S = \int (p')\, d\,S' - p'.$$

Les fonctions de passage seraient donc identiques $p = p'$ et harmoniques dans toute la région i. Si les couches sont simples, l'on aurait $p = 0$ sur S et sur S' d'où $p \equiv 0$ et les couches seraient inexistantes.

Si les couches sont doubles, l'on aurait $\dfrac{d\,p}{d\,n} = 0$ sur $S + S'$ d'où $p =$ constant; le potentiel commun serait à nouveau l'angle solide sous lequel apparaissent les deux surfaces vues de l'extérieur e.

Si P est dans i, l'on gagnerait l'espace extérieur e en traversant soit S soit S' et l'on aurait dans e l'identité de p et de p'. Si les couches sont simples, p est identiquement nulle parce que nulle sur $S + S'$ et à l'infini. Si les couches sont doubles, l'on aurait encore $\dfrac{d\,p}{d\,n} = 0$ sur $S + S'$ mais p devant être nulle à l'infini, la fonction de passage serait identiquement nulle et dans ce cas, les deux doubles couches ne sauraient exister. C. Q. F. D.

On pourrait exclure d'autres configurations particulières sans de grandes difficultés. Mais, pour être bref, je ne saurais mieux résumer mes recherches dans cet ordre d'idées qu'en formulant la proposition suivante:

c) *Si deux simples couches ou deux doubles couches analytiques sont équivalentes :*

1° *ou bien, elles sont toutes deux fermées*;

2° *ou bien, l'une des fonctions de passage est multiforme*;

3° *ou bien, il y a réduction aux angles solides.*

Montrons tout d'abord que les trois cas sont possibles. En effet, 1°, deux surfaces sphériques homogènes concentriques et de même masse totale sont équivalentes puisqu'elles créent le même potentiel en dehors de la plus grande des deux sphères.

2° Soient S une surface ouverte et g une densité positive; formons le potentiel

$$U = \int \frac{g}{r}\, d\, S.$$

Puis prenons une surface S' sur laquelle $U = K$. Si la constante K est suffisamment petite, la surface S' est fermée et contient S à son intérieur. Formons alors

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{d\,U}{d\,n}\, d\, S'.$$

On a, c'est bien connu, $V = U$ à l'extérieur de S' et les deux corps chargés S et S' sont bien équivalents. Mais la fonction de passage du potentiel V est $U - K$ et c'est une fonction multiforme, puisque le potentiel U se ramifie autour de la frontière de S.

3° Deux couches doubles ouvertes de même frontière et de même densité donnent le même potentiel au voisinage du point à l'infini et cette fonction n'est autre que l'angle solide sous lequel apparaissent les deux surfaces.

Ces différents cas étant reconnus possibles, il suffit pour démontrer le théorème, de faire voir ceci: si l'une des surfaces est ouverte et si les fonctions de passage sont uniformes, il y a réduction à l'angle solide.

Démonstration. Partons du point P au voisinage duquel nous avions

$$\int (p)\, d\, S = \int (p')\, d\, S'.$$

Puis allons jusqu'à un point de la frontière F d'une des surfaces par un chemin qui évite tout autre point frontière. Pour cela, il nous faudra franchir l'une ou l'autre des surfaces et peut-être les deux. Supposons que l'on franchisse S, l'on aura de l'autre côté

$$\int (p)\, d\, S + p = \int (p')\, d\, S'$$

et la fonction de passage sera harmonique dans la nouvelle région atteinte. S'il faut encore traverser une surface, S' par exemple, on aurait dans la troisième région

$$\int (p)\, d\, S + p = \int (p')\, d\, S' + p'$$

et la différence $p - p'$ serait harmonique dans cette troisième région.

En parvenant au point de la frontière, on aurait une relation de la forme

$$\int (p)\, d\, S = \int (p')\, d\, S' + n\, p + n'\, p'.$$

Mais, pour un circuit décrit autour de la frontière F, le premier membre se ramifierait et il n'en serait de même du second que si F appartenait aussi à la frontière F' de S'.

Ceci est dû au fait que les fonctions de passage p et p' sont uniformes.

Les frontières de S et de S' devraient coïncider et les fonctions période devraient être identiques pour un circuit décrit autour de la frontière commune. Ces fonctions période ne sont autres que les fonctions de passage. L'on aurait donc $p \equiv p'$.

Revenons alors au point de départ. L'ensemble $S + S'$ qui forme une surface fermée, divise l'espace en deux régions au moins. De P en traversant l'une des surfaces, S par exemple, l'on aura comme précédemment

$$\int (p)\, d\, S + p = \int (p')\, d\, S'.$$

La fonction p sera harmonique dans la nouvelle région limitée à l'ensemble $S + S'$. Si le potentiel est simple, l'on a $p = 0$ à la frontière de cette région, d'où $p \equiv 0$ et les distributions envisagées sont impossibles. Si le potentiel est de double couche, l'on aurait $\frac{d\, p}{d\, n} = 0$ à la frontière de la région. Si cette dernière est connexe du point à l'infini, l'on aura encore $p = 0$ et les doubles couches sont impossibles; mais si la région où l'on est parvenu ne peut pas être connexe du point à l'infini, on pourrait avoir $p =$ constante, d'où réduction à l'angle solide. Les résultats des § 6 et 7 subsistent pour les potentiels logarithmiques et les courbes planes chargées de simples ou de doubles couches.

§ 8. *Détermination d'une certaine fonction harmonique par ses singularités.*

On sait qu'une fonction harmonique dans un domaine est toujours représentable par un potentiel mixte étendu à une surface fermée, située dans ce domaine. La surface peut d'ailleurs être choisie arbitrairement; elle est sans rapport avec les singularités de la fonction harmonique. Le véritable intérêt du problème inverse de la théorie du potentiel est de trouver d'autres corps que ceux-là qui engendrent une fonction harmonique donnée. Il serait intéressant de trouver des corps générateurs qui fussent en rapport avec les singularités de la fonction donnée. Dans cet esprit, nous voudrions montrer que certaines fonctions harmoniques dont on donne une ligne de ramification et la fonction période correspondante peuvent être engendrées par des couches mixtes, ouvertes, qui s'appuyent sur la ligne de ramification.

Soient φ une branche d'une fonction harmonique qui se ramifie autour d'une courbe fermée simple C et p la fonction période relative à un circuit fermé décrit autour de C. Il est supposé qu'une fois tracée une surface S s'appuyant sur C la branche φ est harmonique et bornée dans tout l'espace dont on a retranché la surface S, qu'elle est prolongeable au travers de cette surface et que la fonction période p est harmonique dans un volume qui contient la surface S à son intérieur. En plus, la branche φ est supposée s'annuler à l'infini. Dans ces conditions, la branche envisagée n'est autre que le potentiel mixte dérivant de la fonction de passage p et pris sur S. En effet, la fonction harmonique est entièrement déterminée par les caractères précédents d'avoir une branche bornée nulle à l'infini qui n'admet aucune singularité tant qu'on ne traverse pas la coupure S, qui se ramifie autour de la courbe fermée C et admet la fonction période donnée. S'il y avait deux fonctions satisfaisant à ces conditions, φ et φ', l'on aurait en traversant S et en décrivant un circuit autour de C et suffisamment voisin de cette courbe:

$$\varphi_{MSM} = \varphi_M + p_M \qquad\qquad \varphi'_{MSM} = \varphi'_M + p_M$$

et par soustraction

$$(\varphi - \varphi')_{MSM} = (\varphi - \varphi')_M.$$

La fonction $\varphi - \varphi'$ serait univoque au voisinage de C, elle serait bornée aussi et par conséquent la ligne C serait une singularité impropre et la fonction $\varphi - \varphi'$ serait donc encore harmonique sur la courbe C elle-même. Elle n'admet d'autre part aucune autre singularité dans l'espace entier, et comme elle est nulle à l'infini, cette différence serait identiquement nulle, ce qui signifie qu'il n'y a qu'une fonction qui satisfait aux conditions imposées. Or le potentiel

$$U = \int (p)\, d\, S$$

satisfait à ces conditions. Il représente donc la fonction qui au début n'était définie que par ses singularités.

§ 9. *Les fonctions périodes des divers ordres.*

Soit γ un circuit fermé, par exemple une circonférence. Décrivons γ toujours dans le même sens et soient Φ_1, Φ_2, ... les différentes branches d'une fonction Φ obtenues en faisant une fois le tour, deux fois le tour, etc. du circuit à partir d'une détermination convenablement choisie Φ_0. Posons

$$(1) \qquad \Phi_1 - \Phi_0 = p_1, \ \Phi_2 - \Phi_1 = p_2, \ \ldots \ \Phi_n - \Phi_{n-1} = p_n, \ \ldots .$$

Si l'on faisait le tour en sens inverse, on aurait des fonctions Φ_{-1}, Φ_{-2}, ... et des différences $p_0, p_{-1}, \ldots$. Nous appellerons la fonction p fonction période. Elle peut être identiquement nulle, alors Φ est uniforme, p peut être uniforme ou multiforme.

Nous pouvons former la fonction période π de p ; elle sera dite fonction période du second ordre de Φ. L'on aura

$$p_2 - p_1 = \pi_1, \ p_3 - p_2 = \pi_2, \ \ldots \ p_{n+1} - p_n = \pi_n \ \ldots .$$

On formerait de la même manière les fonctions période de tout ordre de la fonction primitive Φ.

L'addition des i premières équations (1) donne immédiatement

$$(2) \qquad \Phi_i - \Phi_0 = p_1 + \ldots + p_i .$$

Soit alors i le plus petit nombre entier pour lequel la fonction

$$(3) \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_i = u$$

est uniforme le long de γ. On peut avoir i égal à un nombre entier ou i inexistant. Si i existe, l'on a

$$(4) \quad \Phi_i - \Phi_0 = u \quad \text{d'où} \quad \Phi_{2i} - \Phi_i = u \quad \text{d'où} \quad \Phi_{Ki} - \Phi_0 = K u.$$

Alors: 1° Si i existe, p n'a que i branches distinctes et réciproquement.

Car en faisant un tour de plus, l'on aurait

$$p_2 + p_3 + \dots + p_i + p_{i+1} = u \quad \text{d'où} \quad p_1 = p_{i+1}.$$

La réciproque est immédiate.

2⁰ Si i existe et si $u \equiv 0$, alors Φ n'a que i branches distinctes, et réciproquement. Il est évident par (4) que Φ n'a pas plus de i branches distinctes, elle n'en a pas moins non plus, car alors u serait identiquement nul pour $i' < i$, ce qui est contraire à la définition de i. La réciproque est encore immédiate.

3⁰ Si i existe et si u n'est pas identiquement nul, alors Φ a une infinité de branches qui se répartissent par groupes de i branches et Φ n'est pas bornée. En effet, on a, quel que soit l'entier positif K:

$$\Phi_{Ki} - \Phi_0 = Ku, \quad \Phi_{Ki+1} - \Phi_1 = Ku, \quad \dots \Phi_{Ki+i-1} - \Phi_{i-1} = Ku.$$

4⁰ Si Φ est bornée, ses fonctions période de tous ordres sont bornées. En effet, si

$$Max\,|\,\Phi\,| < M \text{ alors } Max\,|\,p\,| < 2\,M,\ Max\,|\,\pi\,| < 4\,M, \dots$$

5⁰ Si Φ a i branches distinctes et i seulement, il en est de même de ses périodicités des divers ordres. En effet, la somme $p_1 + \dots + p_i' = V$ pour $i' < i$ ne peut être uniforme, car si V est nulle identiquement Φ n'aurait que i' branches distincte et si V n'est pas nulle identiquement, Φ aurait une infinité de branches. D'autre part, l'on a $V = 0$ pour $i' = i$, de sorte que p possède i branches et i seulement. Il en est alors de même de π etc.

6⁰ *Si Φ est bornée, alors Φ ainsi que ses fonctions période des divers ordres n'ont qu'un même nombre fini de branches distinctes, ou bien, toutes ces fonctions ont une infinité de branches distinctes.*

En effet, en vertu de 5⁰, il ne reste qu'à exclure le cas où Φ aurait une infinité de branches et p un nombre fini; mais i existerait avec u non identiquement nulle et Φ ne serait pas bornée. Donc p aurait aussi une infinité de branches distinctes, et comme p est bornée, il en serait de même par 4⁰ de π etc.

§ 10. *Remarques.*

a) Voici un exemple d'une fonction non harmonique identique à sa fonction période: θ étant l'arc d'une circonférence de rayon un

$$\Phi = e^{\frac{\theta}{2\pi}L\,2} \text{ d'où } \Phi_1 = 2\,\Phi_0 \text{ d'où } p_1 = \Phi_1 - \Phi_0 = \Phi_0.$$

Il sérait intéressant de *trouver une fonction harmonique identique à sa fonction période.*

b) Envisageons une fonction harmonique à l'intérieur d'un tore T. Comme précédemment, ses différentes branches s'obtiendront en faisant une fois le tour, deux fois le tour, etc. du tore, et cela sans en sortir. Les fonctions période de tous ordres p, π, ... sont harmoniques dans T. Supposons les fonctions p_1, p_2, ... positives dans T et envisageons la somme

$$\sigma = p_1 + p_2 + \cdots$$

Alors si σ est infini en un point intérieur à T, les fonctions Φ_n convergent uniformément vers l'infini dans un domaine T' fermé, entièrement intérieur à T. Si σ est fini en un point intérieur à T, alors les Φ_n convergent uniformément dans T' vers une fonction limite, harmonique dans T. Cela résulte d'un théorème bien connu de Harnack.

c) On sait, en vertu d'un théorème de MM. Picard et Lebesgue sur les singularités impropres, qu'une fonction harmonique uniforme et bornée au voisinage d'une courbe fermée simple (régulière) est forcément harmonique sur la courbe elle-même. (Voir, par exemple, Kellogg, page 271).

De sorte qu'une fonction harmonique et bornée au voisinage d'une telle ligne singulière possède sur tout circuit faisant le tour de cette ligne, les propriétés mises en évidence sous la rubrique 6 du § précédent.

§ 11. *Exemple d'un potentiel à fonction de passage singulière.*

La fonction suivante est harmonique dans le plan repéré au moyen des coordonnées polaires ϱ et θ, on le vérifie aisément,

$$p = \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Elle possède deux déterminations distinctes et deux seulement relativement au point de ramification $\varrho = 0$. Formons alors le potentiel suivant pris sur le segment de droite $0 \leq \varrho \leq 1$, $\theta = 0$:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{dp}{dn}\, Lr - p\,\frac{d\,Lr}{dn}\right) d\varrho.$$

La fonction p étant nulle sur ce segment, il ne reste que le potentiel de simple couche et l'on trouve facilement

$$U_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\, Lr\, d\varrho.$$

Cette fonction est parfaitement bien déterminée en chaque point du plan.

Décrivons un circuit autour de l'origine et qui traverse le segment, la fonction de passage sera p et l'on aura pour la seconde branche

$$U_1 = U_0 + \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} .$$

Après deux tours, l'on trouvera une fonction U_2 qui coïncidera avec la fonction U_0 primitive, car on a

$$U_2 = U_0 + \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \Pi\right) = U_0.$$

Tout ceci est conforme à la théorie du § 9. Ici $i = 2$ et $u = 0$. Mais cet exemple ne relève pas de la théorie du début, §§ 1, 2; puisque la densité du potentiel de simple couche n'est pas holomorphe à l'origine, qui est une des frontières du corps générateur.

L'on formerait un exemple analogue avec n branches en prenant pour fonction période

$$p = \varrho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n} \cdot$$

La branche initiale serait alors donnée par le potentiel

$$U_0 = \frac{1}{2\, n \pi} \int_0^1 \varrho^{\frac{1-n}{n}}\, Lr \;\, d\varrho.$$

Autour de l'origine, il n'y a que n branches qui se ramifient, mais chacune de ces branches vient se ramifier autour du point $\varrho = 1$ $\theta = 0$ et donne lieu, par prolongement autour de ce point, à une infinité de branches; car la fonction période p est harmonique et uniforme au voisinage de ce point-là.

Dans le cas de l'espace repéré par les coordonnées semi-polaires ϱ, θ, z prenons la même fonction période indépendante de z et par conséquent encore harmonique

$$p = \varrho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n} \cdot$$

Elle admet la ligne critique $\varrho = 0$ c'est-à-dire l'axe des z. Enfin, formons le potentiel

$$U_0 = \int (p)\, d\, S$$

l'intégrale étant étendue au carré S: $\theta = 0$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Ce potentiel se réduit d'ailleurs à

$$U_0 = \frac{1}{4n\pi}\int_0^1 \varrho^{\frac{1}{n}-1}\, d\varrho \int_0^1 \frac{dz}{r}.$$

Pour un circuit décrit autour du segment 0 1 de l'axe des z et qui traverse le carré, la fonction prolongée n'admet que n déterminations distinctes. Autour des autres arêtes du carré, la fonction prolongée admet une infinité de branches. Et enfin, un chemin en hélice qui traverserait le carré, puis tournerait autour de l'axe z sans traverser à nouveau le carré donnerait tout d'abord

$$U_1 = U_0 + \varrho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n},$$

puis

$$U_2 = U_0 + \varrho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta + 2\pi}{n},$$

car la fonction période se ramifierait seule pour le dernier circuit.

(Reçu le 1er septembre 1934.)