

# Quaternionen und Semivektoren.

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **7 (1934-1935)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515590>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Quaternionen und Semivektoren

Von W. SCHERRER, Bern

Die Theorie der Spinoren ist von *Einstein* und *Mayer*<sup>1)</sup> in sehr befriedigender Weise begründet worden mit Hilfe neuer Größen, der Semivektoren. Diese Semivektoren vermitteln den Übergang von den Vektoren zu den Spinoren in folgendem Sinne: Sie stehen einerseits in einem natürlichen Zusammenhang mit der Gruppe der Lorentztransformationen und andererseits enthalten sie die Spinoren als spezielle Symmetrietypen.

Die algebraische Grundlage der Einstein-Mayerschen Theorie bildet eine Aussage, die wir notieren als

**Satz 1:** *Jede reelle Lorentzmatrix  $\mathfrak{C}$  läßt sich bis auf das Vorzeichen eindeutig darstellen als das Produkt zweier speziellen Lorentzmatrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , denen folgende Eigenschaften zukommen:*

- a) *Jedes beliebige  $\mathfrak{A}$  ist mit jedem beliebigen  $\mathfrak{B}$  vertauschbar.*
- β)  *$\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind konjugiert komplex.*

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß die Matrizen  $\mathfrak{A}$  eine zur Gruppe der Matrizen  $\mathfrak{C}$  — der Lorentzgruppe — isomorphe Gruppe bilden, ebenso die Matrizen  $\mathfrak{B}$ .

Im folgenden möchte ich nun zeigen, daß der in Frage stehende Satz in der Hamilton'schen Quaternionentheorie steckt und sich daher zwanglos aus ihr herleiten läßt.

Wir führen die Untersuchung soweit als möglich auf dem Gebiet der komplexen orthogonalen Matrizen durch, indem wir uns auf die bekannte Tatsache stützen, daß jeder orthogonalen Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{00}, & \alpha_{01}, & \alpha_{02}, & \alpha_{03} \\ \alpha_{10}, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{20}, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{30}, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{array} \right\| \quad (1)$$

zwei Lorentzmatrizen

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{00}, & \mp i \alpha_{01}, & \mp i \alpha_{02}, & \mp i \alpha_{03} \\ \pm i \alpha_{10}, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \pm i \alpha_{20}, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \pm i \alpha_{30}, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{array} \right\| \quad (2)$$

zugeordnet werden können und umgekehrt.

<sup>1)</sup> *A. Einstein* und *W. Mayer*: Semivektoren und Spinoren. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1932.

Das geeignete Instrument zur Behandlung der vierdimensionalen orthogonalen Matrizen bildet die Hamilton'sche Quaternionenrechnung. Zur Erleichterung des Lesers stelle ich die Definition und die Grundeigenschaften der Quaternionen kurz zusammen und zwar so, daß ohne weiteres auch der komplexe Fall umfaßt wird.

Quaternionen seien bezeichnet mit kleinen deutschen Buchstaben  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ . Ein einzelnes Quaternion ist definiert als lineare Kombination

$$\mathfrak{a} = a_0 + a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3 \quad (3)$$

wo die „Komponenten“  $a_0, a_1, a_2, a_3$  beliebige komplexe Zahlen sein können, während die neben der natürlichen Einheit 1 auftretenden Einheiten folgenden Multiplikationsregeln gehorchen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_2^2 = \mathfrak{e}_3^2 &= -1 \\ \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 &= \mathfrak{e}_1; & \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_1 &= \mathfrak{e}_2; & \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 &= \mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_2 &= -\mathfrak{e}_1; & \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_3 &= -\mathfrak{e}_2; & \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_1 &= -\mathfrak{e}_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Für die Addition werden die Regeln der gewöhnlichen Algebra gefordert, mit der Ergänzung, daß die Null dargestellt wird durch

$$0 + 0 \cdot \mathfrak{e}_1 + 0 \cdot \mathfrak{e}_2 + 0 \cdot \mathfrak{e}_3.$$

Für die Multiplikation soll neben den Regeln (4) das distributive Gesetz gelten. Unter diesen Voraussetzungen findet man für das Produkt zweier Quaternionen  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{b} &= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ &+ (a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3) \mathfrak{e}_1 \\ &+ (a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) \mathfrak{e}_2 \\ &+ (a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) \mathfrak{e}_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Nun verifiziert man leicht das fundamentale *assoziative Gesetz*

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \quad (6)$$

Das kommutative Gesetz trifft schon nach (4) nicht zu.

Mit  $\mathfrak{a}^*$  sei das zu  $\mathfrak{a}$  „konjugierte“ Quaternion

$$\mathfrak{a}^* = a_0 - a_1 \mathfrak{e}_1 - a_2 \mathfrak{e}_2 - a_3 \mathfrak{e}_3; \quad (3^*)$$

bezeichnet. Man bestätigt leicht die Gültigkeit der wichtigen Relationen

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^* = \mathfrak{b}^*\mathfrak{a}^* \quad (7)$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = \text{Skalar.} \quad (8)$$

Ein Skalar und ein Quaternion, dessen drei letzte Komponenten verschwinden, sind in der Quaternionenalgebra offenbar gleichwertige Begriffe. Bezeichnen wir die Größe  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*$  der Kürze halber als „Länge“ des Quaternions, so gilt

*Satz 2:* Wird ein beliebiges Quaternion  $\mathfrak{x}$  links oder rechts mit einem Quaternion von der Länge 1 multipliziert, so bleibt seine Länge ungeändert.

Die Behauptung geht also dahin, daß aus  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = 1$  und  $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$  die Gleichung

$$\mathfrak{y}\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x}\mathfrak{x}^*$$

folge. Die Berechnung ergibt auf Grund von (7), (8) und (6):

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}\mathfrak{y}^* &= (\mathfrak{a}\mathfrak{x})(\mathfrak{a}\mathfrak{x})^* \\ &= (\mathfrak{a}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}^*\mathfrak{a}^*) \\ &= \mathfrak{a}(\mathfrak{x}\mathfrak{x}^*)\mathfrak{a}^* \\ &= \mathfrak{a}\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}\mathfrak{x}^* \end{aligned}$$

Der Beweis für die Rechtsmultiplikation verläuft natürlich analog.

Fassen wir nun  $\mathfrak{x}$  als Variable auf, so erscheint die Multiplikation

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$$

nach dem eben bewiesenen Satze als spezielle orthogonale Transformation, deren vollständiger Ausdruck nach (5) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 \\ y_1 &= a_1 x_0 + a_0 x_1 - a_3 x_2 + a_2 x_3 \\ y_2 &= a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_0 x_2 - a_1 x_3 \\ y_3 &= a_3 x_0 - a_2 x_1 + a_1 x_2 + a_0 x_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Analoges gilt für  $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\mathfrak{b}$  und wir erhalten das Resultat:

Die beiden Quaternionenprodukte

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{x}\mathfrak{b} \quad (10)$$

sind für

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = 1; \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* = 1 \quad (11)$$

äquivalent mit den respektiven orthogonalen Transformationen

$$\eta = \mathfrak{A}x; \quad \eta = \mathfrak{B}x \quad (12)$$

deren Matrizen gegeben sind durch

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Zufolge (11) hängt jede dieser Matrizen von 3 komplexen Parametern ab. Überdies sind beide, wie man unmittelbar feststellt, kontinuierlich in die Identität überführbar.

Hieraus folgt, daß das Produkt

$$\eta = \alpha x \beta \quad (14)$$

eine 6-parametrig und mit der Identität stetig zusammenhängende Schar von orthogonalen Transformationen, also alle eigentlichen orthogonalen Transformationen umfaßt. Auf die Ausführung dieses und ähnlicher „Vollständigkeitschlüsse“ mit Hilfe infinitesimaler Transformationen können wir hier verzichten.

Wir beweisen nun umgekehrt, daß die Darstellung aller eigentlichen orthogonalen Transformationen gemäß (14) eindeutig ist, d. h. also, daß aus

$$\alpha x \beta \equiv \gamma x \delta \quad (15)$$

und

$$\alpha \alpha^* = \beta \beta^* = \gamma \gamma^* = \delta \delta^* = 1 \quad (16)$$

entweder

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \delta$$

oder

$$\alpha = -\gamma \text{ und } \beta = -\delta$$

folgt.

Zu dem Zwecke multiplizieren wir die Identität (15) links mit  $\gamma^*$  und rechts mit  $\beta^*$  und erhalten wegen (16)

$$\gamma^* \alpha x \equiv x \delta \beta^*.$$

Hieraus folgt

$$\gamma^* \alpha = \delta \beta^* = \text{Skalar.}$$

Also können wir setzen

$$\mathfrak{c}^* \mathfrak{a} = \lambda \cdot \mathfrak{a}^* \mathfrak{a},$$

wo  $\lambda$  ein geeigneter Skalar ist, oder

$$(\mathfrak{c}^* - \lambda \mathfrak{a}^*) \mathfrak{a} = 0.$$

Rechtsmultiplikation mit  $\mathfrak{a}^*$  ergibt

$$\mathfrak{c}^* - \lambda \mathfrak{a}^* = 0$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{c} - \lambda \cdot \mathfrak{a} = 0.$$

Demnach gilt

$$\mathfrak{c} \mathfrak{c}^* = \lambda^2 \mathfrak{a} \mathfrak{a}^* \text{ oder } \lambda = \pm 1$$

und wir erhalten schließlich  $\mathfrak{c} = \pm \mathfrak{a}$  und auf analoge Weise  $\mathfrak{d} = \pm \mathfrak{b}$ , woraus die Eindeutigkeit der Darstellung (14) abgesehen vom Vorzeichen folgt.

Wir gehen jetzt von der Quaternionen-Darstellung (14) über zur Matrizendarstellung und haben dabei besonders auf die assoziative Zusammenfassung im Produkt  $\mathfrak{a} \mathfrak{x} \mathfrak{b}$  zu achten. Die Äquivalenz der Darstellungen (10) und (12) ergibt in leichtverständlicher Schreibweise

$$\mathfrak{a} (\mathfrak{x} \mathfrak{b}) \equiv \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{x}$$

$$(\mathfrak{a} \mathfrak{x}) \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{x}$$

Nach dem assoziativen Gesetz (6) folgt also

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{x} \equiv \mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{x}$$

oder

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mathfrak{A}. \tag{17}$$

Andererseits können wir setzen

$$\mathfrak{a} \mathfrak{x} \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{C} \mathfrak{x}$$

und erfassen damit jede eigentlich orthogonale Matrix  $\mathfrak{C}$ .

Die erreichten Resultate sprechen wir aus als

**Satz 3:** *Jede eigentlich orthogonale Matrix  $\mathfrak{C}$  läßt sich bis auf das Vorzeichen eindeutig darstellen als das Produkt zweier spezieller, eigentlich orthogonaler Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , denen folgende Eigenschaft zukommt:*

*Jedes beliebige  $\mathfrak{A}$  ist mit jedem beliebigen  $\mathfrak{B}$  vertauschbar.*

Die für  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in Betracht kommenden Typen sind explicite gegeben durch die Gleichungen (13) und haben daneben nur noch die Bedingungen (11), also die Gleichungen

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad (11')$$

zu erfüllen.

Offenbar stimmt Satz 3 mit Satz 1 überein bis auf die Realitätsbedingungen, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

Für die Realität der eigentlich orthogonalen Transformationen ist die Realität der Matrizen (13) evidentermaßen hinreichend, zufolge der hier ebenfalls geltenden Vollständigkeit und Eindeutigkeit der Darstellung (14) aber auch notwendig.

Was nun die komplexen Lorentzmatrizen betrifft, so folgt aus Satz 3 mit Hilfe des Übergangs von (1) nach (2) und umgekehrt sofort ein vollkommen entsprechender Satz. An Stelle der Matrizen (13) treten dabei folgende Matrizen:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a_0 & ia_1 & ia_2 & ia_3 \\ ia_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ ia_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ ia_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} b_0 & ib_1 & ib_2 & ib_3 \\ ib_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ ib_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ ib_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} \quad (18)$$

Im Gegensatz zu den Matrizen (13) können diese Matrizen als zueinander konjugiert komplex angenommen werden, ohne daß die einzelne Matrix aufhört, von 3 komplexen Parametern abzuhängen. Dadurch erhält man als Produkt eine eigentliche und reelle Lorentztransformation, die von 6 reellen Parametern abhängt. Wir haben also auch hier eine Darstellung aller eigentlichen reellen Lorentztransformationen. Wiederum folgt aus der Eindeutigkeit der Produktdarstellung, daß die Faktoren notwendigerweise konjugiert komplex sind. Damit ist der an die Spitze gestellte Einstein-Mayer'sche Satz vollständig bewiesen.

Die Quaternionenalgebra scheint auch bei der Aufstellung von Invarianten gewisse Vorteile zu bieten. Dabei ist man allerdings genötigt, sämtliche Entwicklungen für orthogonale Transformationen durchzuführen und jeweils erst am Schluß mit Hilfe der Transformation  $x_0 = it$  zu den Lorentztransformationen überzugehen.

Wir erläutern dieses Verfahren, soweit es sich im Gebiet der orthogonalen Transformationen abspielt. Bei Beschränkung auf orthogonale Koordinaten fällt die Unterscheidung zwischen oberen und unteren

Indices bekanntlich weg. Wir stellen jetzt also jede orthogonale Transformation  $\mathfrak{r}' = \mathfrak{C} \mathfrak{r}$  quaternionenmäßig dar durch  $\mathfrak{r}' = \mathfrak{a} \mathfrak{r} \mathfrak{b}$  und definieren:

1. Ein *Vektor*  $\mathfrak{r} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  ist ein Quaternion, das sich gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a} \mathfrak{r} \mathfrak{b} \quad (19)$$

transformiert.

2. Ein *Linksvektor*  $\underline{\mathfrak{r}} = (x_{\bar{0}}, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}})$  ist ein Quaternion, das sich gemäß

$$\underline{\mathfrak{r}}' = \mathfrak{a} \underline{\mathfrak{r}} \quad (19a)$$

transformiert.

3. Ein *Rechtsvektor*  $\underline{\underline{\mathfrak{r}}} = (x_{\bar{0}}, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}})$  ist ein Quaternion, das sich gemäß

$$\underline{\underline{\mathfrak{r}}}' = \underline{\underline{\mathfrak{r}}} \mathfrak{b} \quad (19b)$$

transformiert.

Die in (19), (19a) und (19b) vorkommenden  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  müssen natürlich immer ein und derselben orthogonalen Matrix  $\mathfrak{C}$  entspringen.

Nun kann man in der üblichen Weise gemischte Tensoren beliebig hoher Stufe durch komponentenweise Multiplikation und Addition der definierten Vektortypen bilden. Dabei gilt insbesondere auch

**Satz 4: Ist**

$$F(\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots) \equiv a_i \bar{k} \bar{l} \dots x_i y_k z_l \dots$$

eine invariante Multilinearform, so bilden ihre Koeffizienten  $a_i \bar{k} \bar{l}$  einen Tensor von dem durch die Indizes bezeichneten Typus und umgekehrt.

Die Quaternionenmultiplikation bildet offenbar einen Invarianten erzeugenden Prozeß. Aus (19), (19a) und (19b) in Verbindung mit (7) findet man unmittelbar die in der Einstein-Mayer'schen Theorie grundlegenden invarianten Quaternionen

$$\underline{\mathfrak{r}}^* \underline{\mathfrak{y}}, \quad , \quad \underline{\underline{\mathfrak{r}}} \underline{\underline{\mathfrak{y}}}^* \quad (20)$$

und

$$\underline{\mathfrak{r}}^* \underline{\mathfrak{y}} \underline{\mathfrak{z}}^* \quad , \quad \underline{\underline{\mathfrak{r}}} \underline{\underline{\mathfrak{y}}}^* \underline{\underline{\mathfrak{z}}}. \quad (21)$$

Jedes dieser Quaternionen liefert 4 invariante Formen und damit nach Satz 4 ebenso viele numerisch invariante Tensoren. Man erhält so aus (20) und (21) je 4 Tensoren der Typen  $a_{\bar{i} \bar{k}}$ ,  $a_{\bar{i} \bar{k} \bar{l}}$ ,  $a_{\bar{i} k \bar{l}}$ ,  $a_{\bar{i} k \bar{l}}$ . Die beiden aus (21) entspringenden Typen sind aber äquivalent, wie man aus der Gleichung  $(\underline{\underline{\mathfrak{r}}} \underline{\underline{\mathfrak{y}}}^* \underline{\underline{\mathfrak{z}}})^* = \underline{\underline{\mathfrak{z}}}^* \underline{\underline{\mathfrak{y}}} \underline{\underline{\mathfrak{r}}}^*$  ersieht.



Die Berechnung des ersten Ausdrucks aus (20) ergibt auf Grund von (3\*) und (5) die invarianten Bilinearformen

$$\left. \begin{aligned} & x_{\bar{0}} y_{\bar{0}} + x_{\bar{1}} y_{\bar{1}} + x_{\bar{2}} y_{\bar{2}} + x_{\bar{3}} y_{\bar{3}} \\ & - x_{\bar{1}} y_{\bar{0}} + x_{\bar{0}} y_{\bar{1}} + x_{\bar{3}} y_{\bar{2}} - x_{\bar{2}} y_{\bar{3}} \\ & - x_{\bar{2}} y_{\bar{0}} - x_{\bar{3}} y_{\bar{1}} + x_{\bar{0}} y_{\bar{2}} + x_{\bar{1}} y_{\bar{3}} \\ & - x_{\bar{3}} y_{\bar{0}} + x_{\bar{2}} y_{\bar{1}} - x_{\bar{1}} y_{\bar{2}} + x_{\bar{0}} y_{\bar{3}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der Vergleich mit den Einstein-Mayer'schen Formeln (41) und (41a) nach vollzogener Substitution  $x_{\bar{0}} = i x_{\bar{4}}$ ;  $y_{\bar{0}} = i y_{\bar{4}}$  zeigt, daß die Linksvektoren den Semivektoren 2. Art entsprechen. Die Querstriche über den Indizes wären also zu verdoppeln.

Wie schon bemerkt, bilden die Koeffizienten der Formen (22) spezielle numerische invariante Tensoren. Durch lineare Kombination gewinnt man aus ihnen diejenigen Tensoren, denen bei Einstein und Mayer die Tensoren  $c_{\bar{0}}^{\bar{0}} = 2$ ) entsprechen. Analog ergeben sich aus den Invarianten (21) die allgemeinen dreistufigen Tensoren.

Die Anwendung von Satz 4 auf (22) gestattet aber auch den Schluß, daß die vier Reihen

$$(x_{\bar{0}}, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}) \quad (23_0)$$

$$(-x_{\bar{1}}, x_{\bar{0}}, x_{\bar{3}}, -x_{\bar{2}}) \quad (23_1)$$

$$(-x_{\bar{2}}, -x_{\bar{3}}, x_{\bar{0}}, x_{\bar{1}}) \quad (23_2)$$

$$(-x_{\bar{3}}, x_{\bar{2}}, -x_{\bar{1}}, x_{\bar{0}}) \quad (23_3)$$

simultan ein System von Linksvektoren bilden. Dasselbe gilt somit auch für alle linearen Kombinationen dieser Reihen. Addiert man also das  $(-i)$ -fache der zweiten Reihe zur ersten, so erhält man den speziellen Linksvektor

$$\begin{aligned} & (x_{\bar{0}} + i x_{\bar{1}}, x_{\bar{1}} - i x_{\bar{0}}, x_{\bar{2}} - i x_{\bar{3}}, x_{\bar{3}} + i x_{\bar{2}}) \\ = & (x_{\bar{0}} + i x_{\bar{1}}, -i(x_{\bar{0}} + i x_{\bar{1}}), x_{\bar{2}} - i x_{\bar{3}}, i(x_{\bar{2}} - i x_{\bar{3}})) \quad (24) \\ & = (z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}, z_{\bar{3}}) \end{aligned}$$

dessen Komponenten die Relationen

$$z_{\bar{1}} = -i z_{\bar{0}} ; z_{\bar{3}} = i z_{\bar{2}}$$

erfüllen. Zur Beschreibung dieses Linksvektors genügen demnach zwei Komponenten. Analog erhält man durch Addition der  $i$ -fachen zweiten Reihe zur ersten den Linksvektor

<sup>2)</sup> A. Einstein und W. Mayer: Die Diracgleichungen für Semivektoren. Amsterdamer Berichte 1933.

$$\begin{aligned}
(x_{\bar{0}} - i x_{\bar{1}}, i(x_{\bar{0}} - i x_{\bar{1}}), x_{\bar{2}} + i x_{\bar{3}}, -i(x_{\bar{2}} + i x_{\bar{3}})) = \\
= (u_{\bar{0}}, u_{\bar{1}}, u_{\bar{2}}, u_{\bar{3}})
\end{aligned}
\tag{25}$$

mit den Relationen

$$u_{\bar{1}} = i u_{\bar{0}} ; \quad u_{\bar{3}} = -i u_{\bar{2}}.$$

Die unabhängigen Komponenten der Linksvektoren (24) und (25) konstituieren also zwei 2-komponentige Größen — sogenannte Spinoren — die durch den Linksvektor (23<sub>0</sub>) bestimmt sind und ihrerseits denselben bestimmen.

(Eingegangen den 8. September 1934.)