Über numerische Schranken im Schottky'schen Satz.

Über numerische Schranken im Schottky'schen Satz

Von A. PFLUGER, Zürich

1. Der Schottky'sche Satz in qualitativer Form lautet:

Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, so gilt für $|z| \leqslant 1 - \vartheta < 1$ die Ungleichung

$$|f(z)| < e^{\Omega},$$

wo Ω nur von ϑ und $|f(0)|$ abhängt.

Die bezüglich der *Größenordnung in* ϑ genauesten Abschätzungen lauten:

$$\Omega < C \frac{lg\,|f(0)| + 3}{\vartheta}$$

und

$$e^{\Omega} < (A\,|f(0)| + A)^{\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}.$$

Die letztere stammt von Valiron[1]), die erstere wurde von Landau[2]) mit Hilfe der Theorie der Modulfunktionen hergeleitet. Über die numerische Größenordnung der Konstanten A und C konnte jedoch nichts ausgesagt werden. Eine *numerisch bestimmte Abschätzung von* Ω und mit elementaren Methoden hergeleitet, jedoch von schlechterer Größenordnung in ϑ, stammt von Ostrowski[3]) und lautet:

$$\Omega \leqslant 20\,(lg\,m) \cdot \frac{1}{\vartheta} \cdot lg\,\frac{1}{\vartheta}, \quad m = Max\,(e, |f(0)|).$$

Durch Kombination der Methode von Bohr-Landau (Methode der Modulfunktion) mit einer der „elementaren" Methoden von Ostrowski ist es mir gelungen, die folgenden Abschätzungen zu beweisen:

Ist $f(z)$ eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre und von 0 und 1 verschiedene Funktion, eine sogenannte Schottky'sche Funktion, so gelten im Kreis $|z| \leqslant 1 - \vartheta < 1$ die Abschätzungen:

[1]) Vergleiche *G. Valiron*, Bull. d. Sc. Math., Bd. 62 (1927).

[2]) Vergleiche *H. Bohr* und *E. Landau*, Gött. Nachr., 1910, math.-phys. Klasse, Seiten 303—330.

[3]) Vergleiche *A. Ostrowski*, Studien über den Schottky'schen Satz, Universitätsdruckerei, Basel (1931), Seiten 96—111.

$$| f(z) | < e^{4 + (9 + lg\, m)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}$$
$$< m^{4 + 10\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}$$
$$< m^{20\frac{1}{\vartheta}},$$

wenn $m = Max\,(e, | f(0) |)$ *gesetzt wird.*

Anlaß zu der vorliegenden Arbeit gaben die Untersuchungen von W. Saxer über den verallgemeinerten Schottky'schen Satz[4]). Es können nämlich die vorliegenden Resultate, wie in einer Zürcher Dissertation gezeigt werden wird, auch dazu dienen, die Abschätzungen von Saxer *numerisch* darzustellen.

2. Sei $\omega = \lambda(t)$ eine der drei gewöhnlichen Modulfunktionen, d. h. eine der Funktionen, die das Kreisbogendreieck

$$R(t) = 0, J(t) > 0; \; R(t) = 1, J(t) > 0; \; | t - \tfrac{1}{2} | = \tfrac{1}{2}, J(t) > 0 \tag{1}$$

konform auf die obere Halbebene $J(\omega) > 0$ abbildet, so daß die Punkte $0, 1, \infty$ der t-Ebene in die Punkte $0, 1, \infty$ resp. $1, \infty, 0$ resp. $\infty, 0, 1$ der ω-Ebene übergehen. Ihre inverse Funktion $t = \nu(\omega)$ ist auf einer der ganzen ω-Ebene überlagerten Riemannschen Fläche mit 0, 1 und ∞ als einzigen (transzendenten) Windungspunkten, der sogenannten *Modulfläche*, eindeutig und analytisch. $f(z)$ sei eine sogenannte Schottky'sche Funktion, also im Einheitskreise regulär und von 0 und 1 verschieden. Wir wählen den Punkt $\omega = a_0 = f(0) \neq 0, 1$ auf einem bestimmten Blatte der Modulfläche, etwa so, daß $\nu(a_0)$ in den Fundamentalbereich[5]) zu liegen kommt. Durch die Funktion

$$z = w(\omega) = \frac{\nu(\omega) - \nu(a_0)}{\nu(\omega) - \overline{\nu(a_0)}} \tag{2}$$

wird diese schlicht auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene abgebildet. $w(f(z))$ bildet also diesen Einheitskreis auf sich selbst ab, wobei der Nullpunkt in sich übergeht. Aus dem Schwarz'schen Lemma folgt daher

$$| w(f(z)) | \leqslant | z | \tag{3}$$

[4]) Vergleiche *W. Saxer,* Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky, Compositio math., Vol. 1, 1934, pag. 207—216.

[5]) Das Kreisbogendreieck (1) und sein Spiegelbild bezüglich der imaginären Axe bilden den sogenannten Fundamentalbereich.

für alle $|z| < 1$. Bezeichnet $\mathfrak{M}(r, a_0)$ den maximalen Betrag der zu $w(\omega)$ inversen Funktion

$$(4) \qquad \omega = \chi(z) = \lambda\left(\overline{\frac{z\,\nu(a_0) - \nu(a_0)}{z-1}}\right)$$

im Kreise $|z| \leqslant r < 1$, so folgt aus (3) und $\chi\big(w\,(f(z)\,)\big) = f(z)$ die Ungleichung

$$(5) \qquad |f(z)| \leqslant \mathfrak{M}(r, a_0) \qquad |z| \leqslant r.$$

Der absolute Betrag von $f(z)$ im Kreise $|z| \leqslant r$ wird also durch eine nur von a_0 abhängige reelle Funktion majorisiert[6]. Aus dem Schwarz'schen Lemma folgt weiter, daß *das Gleichheitszeichen in* (5) *dann und nur dann eintreten kann, wenn $f(z)$ von der Form $\chi(z e^{i\Phi})$, also selbst eine Modulfunktion ist.*

Ziel der folgenden Untersuchungen ist, für $\mathfrak{M}(r, a_0)$ eine *numerisch bestimmte* Majorante zu suchen. Zu diesem Zwecke verfahren wir zunächst nach einer Methode von Bohr-Landau[6]), die, ursprünglich auf die elliptische Modulfunktion angewandt, für den vorliegenden Fall einige Abänderungen erfahren mußte.

3. Sei $\lambda_1(t)$ speziell jene Modulfunktion, welche die Punkte 0, 1, ∞ der t-Ebene in die Punkte 0, 1, ∞ der ω-Ebene überführt; $\nu_1(\omega)$ sei ihre Umkehrfunktion. Es werde

$$(6) \qquad M_1 = \underset{0 \leqq u \leqq 1}{Max}\, |\lambda_1(u+i)| = \underset{-1 \leqq u \leqq 1}{Max}\, |\lambda_1(u+i)|$$

gesetzt. Weil $\lambda_1(t)$ das Kreisbogendreieck (1) in der angegebenen Weise schlicht auf die obere Halbebene abbildet, so gilt für alle Punkte t des Fundamentalbereiches mit $J(t) \leqslant 1$ die Ungleichung

$$(7) \qquad |\lambda_1(t)| \leqslant M_1.$$

Weil ferner durch $z = e^{i\pi t}$ der Bereich

$$(8) \qquad J(t) > 0, \; -1 \leqslant R(t) \leqslant 1$$

schlicht auf den längs der negativen reellen Axe aufgeschnittenen Einheitskreis abgebildet wird, und weil $\lambda_1(-1+iv) = \lambda_1(+1+iv)$, $v > 0$ ist, so ist die Funktion

[6]) Vergleiche Anmerkung 2.

(9) $$f_1(z) = f_1(e^{i\pi t}) = \lambda_1(t)$$

im Einheitskreis regulär bis auf den Nullpunkt, wo sie einen einfachen Pol besitzt. Das Maximum von $|z \cdot f_1(z)|$ auf dem Kreis $|z| = e^{-\pi}$ ist wegen (6) gleich $e^{-\pi} \cdot M_1$ und somit ist $|z| \cdot |f_1(z)| \leqq M_1 e^{-\pi}$ für $|z| \leqq e^{-\pi}$ oder wegen (9) $|\lambda_1(t)| \leqq M_1 \cdot e^{-\pi+\pi v}$ für $J(t) = v > 1$ und schließlich wegen (7)

(10) $$|\lambda_1(t)| \leqq Max\{M_1;\ M_1 e^{-\pi+\pi v}\},\ J(t) = v,$$

für alle Punkte t im Fundamentalbereich.

Sei nun t ein Punkt aus (8), der nicht zum Fundamentalbereich gehört. Durch eine geeignete Transformation der Modulgruppe:

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},\ \alpha\delta - \gamma\beta = 1,\ \left\{\begin{matrix} \alpha \equiv 1 & , & \beta \equiv o \\ \gamma \equiv o & , & \delta \equiv 1 \end{matrix}\right\} \text{ mod. } 2$$

wird dieser in einen Punkt t' des Fundamentalbereiches überführt, so daß

(11) $$\lambda_1(t) = \lambda_1(t').$$

Nun ist

$$v' = J(t') = \frac{J(t)}{(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta)}.$$

$t = u + iv$ gesetzt, gibt $(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta) = (\gamma u + \delta)^2 + \gamma^2 v^2$. Wegen $4v^2 < 1$ und wegen $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 1 \pmod 2$ ist $(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta) > 4v^2$ und schließlich

(12) $$J(t') = v' \leqq \frac{1}{4v}.$$

Aus (10), (11) und (12) folgt für alle t im Bereich (8), die nicht zum Fundamentalbereich gehören:

(13) $$|\lambda_1(t)| \leqq Max\left\{M_1; M_1 e^{-\pi + \frac{\pi}{4v}}\right\}.$$

Weil aber $Max\left(v, \frac{1}{4v}\right) \geqq \frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich für alle t im Bereich (8)

(14) $$|\lambda_1(t)| \leqq M_1 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\pi\, Max\left(v; \frac{1}{4v}\right)},\ v = J(t).$$

Wie sich leicht ausrechnen läßt, ist für alle z mit $|z| \leqslant r$

$$J(\nu_1(a_0))\frac{1-r}{1+r} \leqslant J\left(\frac{z\,\nu_1(a_0) - \overline{\nu_1(a_0)}}{z-1}\right) \leqslant J(\nu_1(a_0))\frac{1+r}{1-r}.$$

Entspricht $\chi_1(z)$ bei $\nu_1(a_0)$ der Funktion $\chi(z)$ bei $\nu(a_0)$, so folgt aus (4) und (14)

$$|\chi_1(z)| \leqslant M_1\, e^{-\pi/2} \cdot e^{Max\left\{\pi J(\nu_1(a_0))\,;\ \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))}\right\}\frac{1+r}{1-r}}, \quad |z| \leqslant r$$

und schließlich nach Nr. 2

$$(15) \qquad \mathfrak{M}(r, a_0) \leqslant M_1 \cdot e^{-\pi/2} \cdot e^{Max\left\{\pi J(\nu_1(a_0))\,;\ \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))}\right\}\frac{1+r}{1-r}}.$$

4. Um $J(\nu_1(a_0))$ nach oben abzuschätzen, setzen wir

$$(16) \qquad m_1 = \underset{0 \leqslant u \leqslant 1}{Max} \frac{1}{|\lambda_1(u+i)|} = \underset{-1 \leqslant u \leqslant 1}{Max} \frac{1}{|\lambda_1(u+i)|} = \underset{|z| = e^{-\pi}}{Max}\left|\frac{1}{f_1(z)}\right|.$$

Dann ist $\frac{1}{|z \cdot f_1(z)|} \leqslant e^{\pi} \cdot m_1$ für $|z| \leqslant e^{-\pi}$ oder $|\lambda_1(t)| \cdot m_1 e^{\pi} \geqslant e^{\pi v}$ und somit $lg\,|\lambda_1(t)| + \pi + lg\,m_1 \geqslant \pi v$ für $v = J(t) \geqslant 1$. Wird $t = \nu_1(a_0)$ gesetzt, so ist entweder $J(\nu_1(a_0)) \leqslant 1$ oder $\pi J(\nu_1(a_0)) \leqslant lg\,m_1 + \pi + lg\,|a_0|$ und somit

$$(17) \qquad \pi J(\nu_1(a_0)) \leqslant Max\{\pi;\ \pi + lg\,m_1 + lg\,|a_0|\}.$$

Um für $\frac{1}{4J(\nu_1(a_0))}$ eine obere Grenze zu finden, teilen wir den Fundamentalbereich in Teilbereiche ein. Den Durchschnitt des Fundamentalbereiches mit dem Bereich $|u| \leqslant 1$, $v \geqslant \frac{1}{2}$ resp. $|u| \leqslant \frac{1}{2}$, $v \leqslant \frac{1}{2}$ resp. den Bereichen $\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1$, $v \leqslant \frac{1}{2}$ und $-1 \leqslant u \leqslant -\frac{1}{2}$, $v \leqslant \frac{1}{2}$ bezeichnen wir mit B_1 resp. B_2 resp. B_3. $\nu_1(a_0)$ gehört sicher einem dieser Bereiche an. Liegt $\nu_1(a_0)$ in B_1, so ist

$$(18) \qquad \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))} \leqslant \frac{\pi}{2} < \pi.$$

Liegt $\nu_1(a_0)$ im Bereich B_2, bezeichnet $\lambda_2(\tau)$ die Modulfunktion, welche die Punkte 0, 1, ∞ der τ-Ebene in die Punkte 1, ∞, 0 der ω-Ebene überführt und wird $\tau = \frac{t-1}{t}$, $\nu_1(a_0) = t = u + iv$, $J(\tau) = w$ gesetzt, so ist

$$(19)\qquad \lambda_1(t) = \lambda_2(\tau), \quad w = J(\tau) = J\left(\frac{t\,\bar{t} - \bar{t}}{t\,\bar{t}}\right) = \frac{v}{u^2+v^2} \geqslant \frac{1}{2v} > \frac{1}{4v}\,;$$

denn im Bereich B_2 ist $|\,u\,| \leqslant v$. Setzen wir ferner

$$f_2(z) = f_2(e^{i\pi\tau}) = \lambda_2(\tau),$$
$$M_2 = \underset{0\leqq\xi\leqq 1}{Max}\,|\,\lambda_2(\xi+i)\,| = \underset{-1\leqq\xi\leqq 1}{Max}\,|\,\lambda_2(\xi+i)\,| = \underset{|z|=e^{-\pi}}{Max}\,|\,f_2(z)\,|\,,$$

so ist $\left|\frac{f_2(z)}{z}\right| \leqslant M_2\,e^{\pi}$ oder $|\,\lambda_2(\tau)\,| \leqslant M_2\,e^{\pi-\pi w}$ für alle τ mit $J(\tau) \geqslant 1$.

Aus (19) folgt dann

$$(20)\qquad \frac{\pi}{4\,J(\nu_1(a_0))} < lg\,M_2 + \pi - lg\,|\,a_0\,|,$$

sofern $\nu_1(a_0)$ dem Bereich B_2 angehört.

Im Falle, daß $\nu_1(a_0)$ einem der Bereiche B_3 angehört, verfahren wir analog. $\lambda_3(\tau)$ bezeichne die Modulfunktion, welche die Punkte 0, 1, ∞ der τ-Ebene in die Punkte ∞, 0, 1 der ω-Ebene überführt. Wir setzen $\tau = \frac{1}{1-t}$, $\nu_1(a_0) = t = u + iv$, $J(\tau) = w$. Es ist

$$\lambda_1(t) = \lambda_3(\tau)\,,$$

$$(21)\qquad w = J(\tau) = J\left(\frac{1-\bar{t}}{(1-t)\,(1-\bar{t})}\right) = \frac{v}{(1-u)^2+v^2} \geqslant \frac{1}{2v} > \frac{1}{4v}\,;$$

denn im Bereich B_3 ist $|\,1-u\,| \leqslant v$. Setzen wir ferner

$$f_3(z) = f_3(e^{i\pi\tau}) = \lambda_3(\tau),$$
$$M_3 = \underset{0\leqq\xi\leqq 1}{Max}\,|\,\lambda_3(\xi+i)\,| = \underset{-1\leqq\xi\leqq 1}{Max}\,|\,\lambda_3(\xi+i)\,| = \underset{|z|=e^{-\pi}}{Max}\,|\,f_3(z)\,|,$$

so ist $\left|\frac{f_3(z)-1}{z}\right| \leqslant (M_3+1)\,e^{\pi}$ oder $|\,\lambda_3(\tau)-1\,| \leqslant (M_3+1)\,e^{\pi-\pi w}$ für alle τ mit $w = J(\tau) \geqslant 1$. Aus (21) folgt dann

$$(22)\qquad \frac{\pi}{4\,J(\nu_1(a_0))} \leqslant lg\,(M_3+1) + \pi - lg\,|\,a_0 - 1\,|\,,$$

sofern $\nu_1(a_0)$ dem Bereich B_3 angehört. (15), (17), (18), (20) und (22) zusammenfassend erhalten wir folgendes Resultat:

(24) $$\mathfrak{M}(r, a_0) \leqq M_1 e^{-\pi/2} \cdot e^{k\frac{1+r}{1-r}},$$

$$k = \pi + Max\{lg\, m_1 + lg|a_0|,\ lg\, M_2 + lg|a_0|^{-1},\ lg(M_3+1) + lg|a_0 - 1|^{-1}\}.$$

5. Es bleibt noch für die Konstanten M_1, m_1, M_2 und M_3 eine obere Grenze zu finden. Sie sind gleich dem maximalen absoluten Betrag der Funktionen $\lambda_1(t)$, $\frac{1}{\lambda_1(t)}$, $\lambda_2(t)$ und $\lambda_3(t)$ auf der Strecke $J(t) = 1$, $0 \leqq R(t) \leqq 1$. Alle diese Funktionen haben im Punkte $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ den Wert $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ oder $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.[7]) Setzen wir in

$$t = \frac{z\,\overline{\nu_1(a_0)} - \nu_1(a_0)}{z - 1}$$

$\nu_1(a_0) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, so wird der Kreis $|z| = 2 - \sqrt{3}$ der z-Ebene auf den Kreis $|t - (\frac{1}{2} + i)| = \frac{1}{2}$ der t-Ebene abgebildet, wobei der Nullpunkt in den Punkt $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ übergeht. Da die Strecke $J(t) = 1$, $0 \leqq R(t) \leqq 1$ im Bildkreis enthalten ist, so sind die Konstanten M_1, m_1, M_2 und M_3 nach Nr. 2 kleiner gleich $\mathfrak{M}(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3})$.

6. Um von dieser Konstanten eine obere Grenze zu finden, verfahren wir nach einer Methode von Ostrowski[8]), die wir jedoch ganz auf den vorliegenden Spezialfall zuschneiden wollen. Sie stützt sich wesentlich auf die Borel-Hadamard'sche Ungleichung[8]):

Für eine im Kreise $|z| < r$ reguläre und von 0 verschiedene Funktion $f(z)$, die dort überall absolut $\leqq M$, gilt

(25) $$\left|\frac{f(o)}{f(z)}\right| \leqq \left(\frac{M}{|f(o)|}\right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}},\quad o < |z| = \varrho < r.$$

Sei nun $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär, von 0 und 1 verschieden und $f(0) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$; es genügt dann auch $\frac{1}{f(z)}$ diesen Voraussetzungen. Wir setzen

(26) $$\underset{|z|\leqq r}{Max}\,|f(z)| = M(r),\quad \underset{|z|\leqq r}{Max}\left|\frac{1}{f(z)}\right| = m(r)$$

$$Max\big(e^5, M(r)\big) = \overline{M}(r),\quad Max\big(e^5, m(r)\big) = \overline{m}(r).$$

[7]) Vergleiche *L. Bieberbach,* Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 1931, Seiten 97—103.

[8]) Vergleiche Anmerkung 3.

Hilfssatz: Für $0 < \varrho < r < 1$ *gilt*

$$\text{I. } \overline{m}(\varrho) \leqq Max \left\{ e^5 ;\ 10102\ \left(3{,}72\, lg\, \overline{M}(r)\right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0{,}9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}} \right\}$$

$$\text{II. } \overline{M}(\varrho) \leqq Max \left\{ e^5 ;\ 1{,}0102\ \left(3{,}72\, lg\, \overline{m}(r)\right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0.9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}} \right\} .$$

Beweis: Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen und Behauptungen in bezug auf die Vertauschung von f und $\frac{1}{f}$, genügt es I zu beweisen. Man kann beim Beweis $m(\varrho) = \overline{m}(\varrho) > e^5$ annehmen, da sonst I trivial wäre. Es sei etwa für $|z_0| = \varrho$ $|f(z_0)| = \frac{1}{\overline{m}(\varrho)} < e^{-5}$. Wir bilden die Hilfsfunktion $f^*(z) = p\left(1 - (1 - f(z))^{1/p}\right)$, $p = lg\, \overline{M}(r)$, wo der in der Umgebung von z_0 durch die Entwicklung

$$f^*(z) = f(z) + \frac{1 - {}^1/_p}{2\,!} f^2(z) + \frac{(1 - {}^1/_p)\,(2 - {}^1/_p)}{3\,!} f^3(z) + \cdots \tag{27}$$

definierte Zweig zu nehmen und wegen (26) $p = lg\, \overline{M}(r) \geqq 5$ ist. Da für $|a| < e^{-5}$

$$\left| a + \frac{1 - {}^1/_p}{2\,!} a^2 + \frac{(1 - {}^1/_p)\,(2 - {}^1/_p)}{3\,!} a^3 + \ldots \right| \leqq$$

$$|a|(1 + |a| + |a|^2 + \ldots) < \frac{|a|}{1 - |a|} < \frac{|a|}{1 - e^{-5}} < 1{,}0102 \cdot |a|$$

ist, liefert die Entwicklung (27) für $|f(z)| = \frac{1}{\overline{m}(\varrho)} < e^{-5}$

$$\overline{m}(\varrho) < \frac{1{,}0102}{|f^*(z_0)|} \leqq 1{,}0102 \underset{|z| = \varrho}{Max} \left| \frac{1}{f^*(z)} \right| = 1{,}0102 \cdot m^*(\varrho),$$

$$m^*(\varrho) > \frac{\overline{m}(\varrho)}{1{,}0102}, \tag{28}$$

wobei $m^*(\varrho)$, $M^*(\varrho)$ bei $f^*(z)$ den Größen $m(\varrho)$, $M(\varrho)$ bei $f(z)$ entsprechen sollen. Ebenso folgt leicht

(29)

$$M^*(r) \leqq p\left(1 + (1 + \overline{M}(r))^{\frac{1}{p}}\right) \leqq lg \overline{M}(r)\, \left(1 + (1 + e^5)^{\frac{1}{5}}\right) < 3{,}72\, lg\, \overline{M}(r),$$

$$M^*(r) < 3{,}72\, lg\, \overline{M}(r).$$

Endlich ist wegen $$f(0) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

$$|f^*(0)| = \left| p\left(1 - (1/2 \mp i/2\sqrt{3})^{\frac{1}{p}}\right)\right| = 2p \sin\frac{\pi}{6p} > 10 \sin\frac{\pi}{30} > 1{,}0452\,,$$

(30) $$\left|\frac{1}{f^*(0)}\right| < 0{,}9568.$$

Aus (28), (29), (30) und (25) angewandt auf $f^*(z)$ folgt dann

$$|f^*(0)| \cdot m^*(\varrho) \leqq \left(\frac{M^*(r)}{|f^*(0)|}\right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}},\quad m^*(\varrho) \leqq (M^*(r))^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot \left|\frac{1}{f^*(0)}\right|^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}},$$

$$\frac{\overline{m}(\varrho)}{1{,}0102} \leqq (3{,}72 \cdot lg\, \overline{M}(r))^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0{,}9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

7. Wir behaupten nun, daß

(31) $$M(1-\vartheta) \leqq e^{10\frac{1}{\vartheta}lg\frac{1}{\vartheta}},\quad 0 < \vartheta \leqq \frac{1}{10}$$

gilt. Denn wäre für ein ϑ mit $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{10}$ $M(1-\vartheta) > e^{10\frac{1}{\vartheta}lg\frac{1}{\vartheta}}$, so würde aus II, wenn $\varrho = 1-\vartheta$ und $r = 1 - \frac{\vartheta}{10}$ gesetzt wird, wegen $e^{10\frac{1}{\vartheta}lg\frac{1}{\vartheta}} > e^5$ folgen:

$$1{,}0102\left(3{,}72 \cdot lg\, \overline{m}\left(1-\frac{\vartheta}{10}\right)\right)^{\frac{20}{9}\cdot\frac{1-\vartheta}{\vartheta}} \cdot (0{,}9568)^{\frac{10}{9\vartheta}\left(2-\frac{11}{10}\vartheta\right)} > e^{10\frac{1}{\vartheta}lg\frac{1}{\vartheta}}$$

oder

$$\left(1{,}0102 \cdot 3{,}72 \cdot 0{,}9568 \cdot lg\, \overline{m}\left(1-\frac{\vartheta}{10}\right)\right)^{\frac{20}{9\vartheta}} > e^{10\frac{1}{\vartheta}lg\frac{1}{\vartheta}}$$

oder

$$lg\, \overline{m}\left(1-\frac{\vartheta}{10}\right) > 0{,}2781 \cdot e^{4{,}5\, lg\frac{1}{\vartheta}}.$$

Da aber $\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^2 \geqq 0{,}217 \cdot \frac{10}{\vartheta}\, lg\frac{10}{\vartheta}$ für $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{10}$, so folgt

$$lg\, \overline{m}\left(1-\frac{\vartheta}{10}\right) > 0{,}06 \cdot e^{2{,}5\, lg\, 10} \cdot \frac{10}{\vartheta}\, lg\frac{10}{\vartheta} > 10\,\frac{10}{\vartheta}\, lg\frac{10}{\vartheta}\,.$$

Wegen der Symmetrie der Formeln I und II in bezug auf M und m ergibt sich hieraus weiter $M\left(1-\frac{\vartheta}{100}\right) > e^{10\cdot\frac{100}{\vartheta}\,lg\frac{100}{\vartheta}}$ und daher allgemein

$$M\left(1-\frac{\vartheta}{100^n}\right) > e^{10\cdot\frac{100^n}{\vartheta}\,lg\frac{100^n}{\vartheta}},$$

so daß $M\left(1-\frac{\vartheta}{100^n}\right)\longrightarrow\infty$, wenn $n\longrightarrow\infty$, während $M(r)$ für $0<r\leqslant 1$ stetig ist. Damit ist (31) bewiesen.

Um $M(1-\vartheta)$ für $0<\vartheta\leqslant 1$ abzuschätzen, setzen wir wieder in II $\varrho = 1-\vartheta$, $r = 1-\frac{\vartheta}{10}$, so daß $\frac{\vartheta}{10}\leqslant\frac{1}{10}$ und deshalb für $m(r)$ wegen der Symmetrie unserer Annahmen über f und $\frac{1}{f}$ die Abschätzung (31) gilt. Es folgt

$$M(1-\vartheta)\leqslant Max\left\{e^5;\ 1{,}0102\left(3{,}72\cdot 10\frac{10}{\vartheta}\,lg\frac{10}{\vartheta}\right)^{\frac{20}{9}\cdot\frac{1-\vartheta}{\vartheta}}.\,(0{,}9568)^{\frac{10}{9\vartheta}\left(2-\frac{11}{10}\vartheta\right)}\right\}.$$

Für $\vartheta=\sqrt{3}-1$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer $< e^{5,786}$ und deshalb $M(2-\sqrt{3}) < e^{5,786}$.

Dieses Resultat wurde hergeleitet unter der Annahme, daß $f(z)$ für $|z|\leqslant 1$ regulär sei. Ist über $f(z)$ nur bekannt, daß es in $|z|<1$ regulär sei, so betrachte man $g(z)=f(rz)$ für $0<r<1$. Da für $g(z)$ im Kreise $|z|\leqslant 2-\sqrt{3}$ die obige Abschätzung gilt, so folgt durch den Grenzübergang $r\longrightarrow 1$ dasselbe für $f(z)$. Es ist also $\mathfrak{M}(2-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}) < e^{5,786}$.

Setzen wir $r = 1-\vartheta$, so gilt nach (24), (5) und Nr. 5 für alle Schottky'schen Funktionen $f(z)$ in dem Kreis $|z|\leqslant 1-\vartheta$ die Abschätzung

$$|f(z)| < e^{5,786-\frac{\pi}{2}+\left[\pi+lg\left(e^{5,786}+1\right)+Max\left\{lg|a_0|,\ lg|a_0|^{-1},\ lg|a_0-1|^{-1}\right\}\right]\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}$$

$$(32)\qquad < e^{4,2153+\left[8,9376+Max\left\{lg|a_0|,\,lg|a_0|^{-1},\,lg|a_0-1|^{-1}\right\}\right]\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}.$$

8. Setzen wir in (32) wieder $a_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, so ist

$$Max\,(lg\,|\,a_0\,|,\, lg\,|\,a_0\,|^{-1},\, lg\,|\,a_0 - 1\,|^{-1}) = 0.$$

Da ferner

$$7,6 \cdot \frac{1}{\vartheta}\, lg\, \frac{1}{\vartheta} \geqslant 4{,}2153 + 8{,}9376\, \frac{2-\vartheta}{\vartheta}$$

für $0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{10}$, so erhalten wir folgende Verschärfung von (31)

$$(33) \qquad lg\, M(1-\vartheta) \leqslant 7{,}6 \cdot \frac{1}{\vartheta}\, lg\, \frac{1}{\vartheta},\; 0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{10}.$$

Daraus folgt aber weiter

$$M(1-\vartheta) \leqslant Max \left\{ e^5;\, 1{,}0102\left(3{,}72 \cdot 7{,}6 \cdot \frac{10}{\vartheta}\, lg\, \frac{10}{\vartheta}\right)^{\frac{20}{9} \cdot \frac{1-\vartheta}{\vartheta}} . \,(0{,}9568)^{\frac{10}{9\vartheta}\left(2 - \frac{11}{10}\vartheta\right)} \right\}.$$

Für $\vartheta = \sqrt{3} - 1$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer $< e^{5,57}$ und somit $\mathfrak{M}(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}) < e^{5,57}$. Analog wie (32) folgt weiter

$$|\,f(z)\,| < e^{4 + \left[8,73 + Max\left\{lg\,|a_0|,\, lg\,|a_0|^{-1},\, lg\,|a_0 - 1|^{-1}\right\}\right]\frac{2-\vartheta}{\vartheta}},\; |\,z\,| \leqslant 1 - \vartheta.$$

Ist also $|\,a_0\,| > e$, so gilt

$$(34) \qquad |\,f(z)\,| < e^{4 + (8,73 + lg\,|a_0|)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}},\; |\,z\,| \leqslant 1 - \vartheta.$$

Ist $e^{-1} < |\,a_0\,| < e$ und $|\,a_0 - 1\,|^{-1} < e$, so gilt

$$(35) \qquad |\,f(z)\,| < e^{4 + (8,73 + 1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}},\; |\,z\,| \leqslant 1 - \vartheta.$$

Ist $|\,a_0\,| < e^{-1}$ und wird $f - 1 = \varphi$ gesetzt, so ist $e^{-1} \leqslant |\,\varphi(0)\,| \leqslant e$ und $|\,\varphi(0) - 1\,|^{-1} < e$. Es gilt also für φ die Abschätzung (35) und deshalb für f die Abschätzung

$$(36) \qquad |\,f(z)\,| < 1 + |\,f(z) - 1\,| \leqslant e^{4 + (8,73 + 1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}} + 1,\; |\,z\,| \leqslant 1 - \vartheta.$$

Ist $| a_0 - 1 | < e^{-1}$ und wird $f - 1 = \psi$ gesetzt, so ist $| \psi(0) | < e^{-1}$. Es gilt also für ψ die Abschätzung (36) und deshalb für f die Abschätzung

$$(37) \qquad | f(z) | \leqq 1 + | f(z) - 1 | \leqq e^{4 + (8{,}73 + 1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}} + 2 < e^{4 + (8{,}74 + 1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}.$$

(34), (35), (36) und (37) ergeben somit wegen $lg\, m \geqq 1$

$$| f(z) | < e^{4 + (8{,}74 + lg\, m)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}, \; | z | \leqq 1 - \vartheta, \; m = Max\,(e, | f(z) |),$$

woraus schließlich die gesuchten Abschätzungen folgen:

Ist $f(z)$ eine im Einheitskreise reguläre und von 0 und 1 verschiedene Funktion und wird $m = Max\,(e, | f(0) |)$ gesetzt, so gelten für $f(z)$ in dem Kreis $| z | \leqq 1 - \vartheta$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} | f(z) | &< e^{4 + (9 + lg\, m)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}} \\ &< m^{4 + 10\frac{2-\vartheta}{\vartheta}} \\ &< m^{20\frac{1}{\vartheta}}. \end{aligned}$$

(Eingegangen den 18. September 1934.)