# Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes.

# Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes

Par PAUL MONTEL, Paris

1. Dans un travail antérieur[1]), j'ai montré que tout polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_n x^n$$

pour lequel les $p + 1$ premiers coefficients sont fixes admet $p$ zéros dont les modules ne dépassent pas un nombre qui ne dépend que des coefficients fixés et du nombre des termes figurant effectivement dans le polynome. Cette limite ne dépend donc pas du degré $n$ à moins que le nombre des termes ne soit égal à $n + 1$, cas où le polynome n'admet pas de lacune. Le résultat demeure exact lorsqu'on fixe les valeurs des coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, a_{p+h}$; $h$ désignant un entier supérieur à 0 et non supérieur à $n - p$ ou lorsqu'on assujettit le polynome à $p + 1$ autres conditions convenablement choisies, par exemple en fixant les valeurs du polynome et de certaines de ses dérivées en un certain nombre de points donnés. La valeur exacte de la limite supérieure des $p$ zéros de plus petits modules est en général difficile à déterminer. Elle a fait l'objet de recherches dues à MM. Van Vleck, Biernacki, Dieudonné, etc.[2]). En particulier, M. Van Vleck a déterminé les limites exactes pour les polynomes sans lacunes dont on fixe les $p$ premiers coefficients. Il a attiré l'attention sur le fait suivant: pour que les modules de $p$ zéros demeurent bornés lorsqu'on fixe les valeurs de certains coefficients, il faut et il suffit que ces coefficients soient $a_0, a_1, \cdots a_{p-1}, a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n - p)$.

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons d'abord que l'un des coefficients $a_k$ de la suite $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ soit variable. Laissons fixes tous les autres coefficients et donnons à $|a_k|$ des valeurs augmentant indéfiniment. Les zéros des polynomes correspondants ont pour limites ceux du polynome $x^k$ vers lequel tend le polynome $\dfrac{P(x)}{a_k}$ et, comme $k$

---

[1]) Sur les modules des zéros des polynomes (Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, s. 3, t. XL (1923), p. 1—34).

[2]) *Van Vleck,* On limits to the absolute values of the roots of a polynomial (Bulletin de la Société mathématique de France, t. 53 (1925), p. 105—125).

*Biernacki,* Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres (1927), p. 541—685).

*Dieudonné,* Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, s. 3, t. XLVIII, p. 247—358 (1931)).

est inférieur à $p$, il y a moins de $p$ zéros de modules bornés. Il est donc nécessaire de fixer $a_0$, $a_1$, $\cdots a_{p-1}$. Si aucun des autres coefficients n'est fixé, on peut les faire tendre vers zéro et on voit encore qu'il y a au plus $(p - 1)$ zéros dont les modules soient bornés: il faut donc fixer $a_{p+h}$.

Réciproquement, supposons fixés les nombres $a_0$, $a_1$, $\cdots$ $a_{p-1}$, $a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n - p)$. Si les modules de $p$ zéros n'étaient pas bornés pour tous les polynomes $P(x)$ de degré $n$, admettant ces $p + 1$ coefficients donnés, à chaque entier $m$ correspondrait un polynome $P_m(x)$ pour lequel les modules de $p - 1$ zéros au plus seraient inférieurs à $m$. Si les coefficients variables de ces polynomes demeurent bornés, on peut extraire de la suite $P_m(x)$ une suite partielle ayant pour limite un polynome de degré $p + h$ au moins: donc $p$ zéros au moins ont des modules bornés pour tous les polynomes de cette suite partielle, ce qui contredit l'hypothèse lorsque $m$ est assez grand. Si l'un des coefficients variables augmente indéfiniment, nous diviserons les coefficients des polynomes $P_m(x)$ par le coefficient de plus grand module de ce polynome. Les nouveaux polynomes auront les mêmes zéros et des modules bornés; et tout polynome limite de la nouvelle suite aura un degré au moins égal à $p$, ce qui conduit à la même contradiction. La condition est donc suffisante. On verrait de la même manière que $p$ zéros ont leurs modules bornés si $a_0$, $a_1$, $\cdots$, $a_{p-1}$ ont leurs modules bornés supérieurement et si $a_{p+h}$ a un module borné inférieurement par un nombre positif.

Le raisonnement qui précède pourra être répété chaque fois que toute limite de polynomes $P(x)$, normés au besoin en divisant par le coefficient de plus grand module, est un polynome de degré $p$ au moins. Il en sera ainsi par exemple lorsqu'on fixe les valeurs de $P(x)$ en $p + 1$ points donnés pourvu que ces valeurs n'appartiennent pas à un polynome de degré inférieur à $p$.

Enfin, dans chacun des cas indiqués, il existe une borne supérieure des modules de $p$ zéros ne dépendant que du nombre des termes de $P(x)$ lorsque ce polynome a des lacunes. Il suffit, pour le voir, de répéter les démonstrations du mémoire cité au début. Nous nous limiterons dans la suite aux polynomes sans lacunes.

Dans le présent travail, je me propose de montrer que la plupart des règles donnant une limite supérieure des modules des $n$ zéros de $P(x)$ en fonction des coefficients peuvent être étendues d'une manière simple et donner une limite supérieure de $p < n$ zéros en fonction de $p + 1$ coefficients, et du degré $n$.

2. Considérons d'abord le polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + x^n$$

dont le dernier coefficient est égal à l'unité. Nous désignerons par $M_p$ le plus grand des modules des coefficients $a_0, a_1, \cdots a_{p-1}$ et par $\varrho$ un nombre réel supérieur à l'unité. Ou bien le polynome $P(x)$ a au moins $p$ zéros dont les modules sont inférieurs à $\varrho$ ou bien $n - p + 1$ zéros au moins ont des modules supérieurs ou égaux à $\varrho$. Plaçons-nous dans ce dernier cas et divisons $P(x)$ par $\alpha - x$, $\alpha$ désignant un zéro de module supérieur ou égal à $\varrho$. Le quotient

$$P_1(x) = a_0' + a_1' x + \cdots + a_{p-1}' x^{p-1} + \cdots - x^{n-1}$$

a des coefficients donnés par les formules

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_0' &= \frac{a_0}{\alpha}, \\ a_1' &= \frac{a_0}{\alpha^2} + \frac{a_1}{\alpha}, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ a_k' &= \frac{a_0}{\alpha^{k+1}} + \frac{a_1}{\alpha^k} + \cdots + \frac{a_k}{\alpha}, \\ &\cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

Si $k$ ne dépasse pas $p - 1$, on a

$$| a'_k | < M_p \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots + \frac{1}{\varrho^{k+1}} + \cdots \right) = \frac{M_p}{\varrho - 1}.$$

Les $p$ premiers coefficients de $P_1(x)$ ont leurs modules inférieurs à $\frac{M_p}{\varrho - 1}$. Une seconde division correspondant à une autre racine de module supérieur ou égal à $\varrho$ donne un polynome $P_2(x)$ dont les $p$ premiers coefficients ont des modules inférieurs à $\frac{M_p}{(\varrho - 1)^2}$, etc.; au bout de $n - p$ divisions, on obtiendra un polynome $P_{n-p}(x)$, de degré $p$, dont les $p$ premiers coefficients ont leurs modules inférieurs à $\frac{M_p}{(\varrho - 1)^{n-p}}$ et dont le dernier est $\pm 1$. Un tel polynome a tous ses zéros de modules inférieurs à

$$1 + \frac{M_p}{(\varrho - 1)^{n-p}},$$

d'après une règle classique. Ecrivons que ce dernier nombre est précisément égal à $\varrho$, nous aurons l'équation

$$\varrho = 1 + \frac{M_p}{(\varrho - 1)^{n-p}},$$

d'où, en posant $n - p + 1 = q$,

$$\varrho = 1 + \sqrt[q]{M_p}.$$

On peut donc énoncer la proposition: *Le polynome $P(x)$ a au moins $p$ zéros dont les modules sont inférieurs au nombre*

$$1 + \sqrt[q]{M_p}.$$

Pour $p = n$, $q = 1$ et on retrouve la règle de Cauchy. La règle précédente est d'une application commode; il suffit de calculer la suite des nombres:

$$\sqrt[n]{M_1}\,, \quad \sqrt[n-1]{M_2}\,, \cdots \sqrt[q]{M_p}, \cdots \sqrt{M_{n-1}}, M_n.$$

Lorsque $M_p = 1$, la limite est 2. On peut d'ailleurs toujours être ramené à ce cas par la substitution $x = \lambda x'$. Le nouveau polynome

$$\frac{a_0}{\lambda^n} + \frac{a_1}{\lambda^{n-1}} x' + \cdots + \frac{a_{p-1}}{\lambda^q} x'^{p-1} + \cdots + x'^n$$

aura ses $p$ premiers coefficients de modules inférieurs à *un*, si l'on prend

$$|\lambda| \leqslant \max. \sqrt[n-k]{|a_k|} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots (p-1).$$

Donc: le polynome $P(x)$ a au moins $p$ zéros dont les modules sont inférieurs à

$$2 \max \sqrt[n-k]{|a_k|}\,.$$

M. *D. Birkhoff* a donné une expression analogue dans le cas où $p = n$. Au lieu du facteur 2, il introduit le facteur supérieur $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$. [3])

Lorsque $|a_k| < 1$, il y a $p$ zéros au moins de modules inférieurs à 2, résultat déjà obtenu par M. *Varopoulos*. Dans tous les cas, il y a $p$ zéros au moins de modules bornés par le plus grand des deux nombres 2 et $1 + M_p$ donc *bornés quel que soit n.*

3. Le calcul de $a_k'$, fait au paragraphe précédent, conduit à l'inégalité

$$\varrho \, | a_k' | \leqslant \frac{|a_0|}{\varrho^k} + \frac{|a_1|}{\varrho^{k-1}} + \cdots + |a_k|.$$

En répétant les divisions, cette inégalité peut être considérée comme une inégalité récurrente entre les coefficients de deux polynomes consécutifs. La loi de formation des coefficients numériques est celle du triangle arithmétique de Pascal. On en déduit que les coefficients $a_k^{(q-1)}$ du polynome $P_{q-1}(x)$ vérifient les inégalités suivantes dans lesquelles le symbole $C_r^s$ désigne le nombre des combinaisons de $r$ objets pris $s$ à $s$:

$$\begin{aligned}
&\varrho^{q-1} \, | a_0^{(q-1)} | \leqslant C_{q-2}^{q-2} \, | a_0 | , \\
(2)\qquad &\varrho^{q-1} \, | a_1^{(q-1)} | \leqslant C_{q-1}^{q-2} \frac{|a_0|}{\varrho} + C_{q-2}^{q-2} \, | a_1 | , \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\varrho^{q-1} \left| a_{p-1}^{(q-1)} \right| \leqslant C_{p+q-3}^{q-2} \frac{|a_0|}{\varrho^{p-1}} + C_{p+q-4}^{q-2} \frac{|a_1|}{\varrho^{p-2}} + \cdots + C_{q-2}^{q-2} \, | a_{p-1} | .
\end{aligned}$$

Or, on a évidemment

$$(3)\qquad |P_{q-1}(x)| \geqslant |x|^p - \left| a_{p-1}^{(q-1)} \right| \, \left| x \right|^{p-1} - \left| a_{p-2}^{(q-1)} \right| \, \left| x \right|^{p-2} \cdots - | a_0^{(q-1)} |,$$

et cette inégalité demeure exacte si on remplace les coefficients des puissances de $|x|$ par les limites supérieures écrites au-dessus. On obtient ainsi un polynome qui admet un zéro positif et l'inégalité montre que $P_{p-1}(x)$ ne peut s'annuler lorsque $|x|$ est supérieur à ce zéro. Si nous écrivons que ce zéro est égal à $\varrho$, nous voyons que $P(x)$ a, dans tous les

[3]) An elementary double inequality for the roots of an algebraic equation having greatest absolute value (Bulletin of the American Math. Society, vol. XXI (1915), p. 494).

cas, $p$ zéros dont les modules ne dépassent pas la valeur ainsi obtenue. L'équation dont elle est la racine positive s'obtiendra en égalant à zéro le second membre de la dernière inégalité après y avoir remplacé $|x|$ par $\varrho$ et les coefficients par leurs limites supérieures. Le coefficient de $-|a_k|$ est

$$\frac{1}{\varrho^{q-1}}\left[C_{q-2}^{q-2}+C_{q-1}^{q-2}+\cdots+C_{p+q-k-3}^{q-2}\right]=\frac{1}{\varrho^{q-1}}\;C_{n-k-1}^{p-k-1}.$$

L'équation donnant la limite supérieure est donc

$$\varrho^n - C_{n-p}^{0}\,|a_{p-1}|\,\varrho^{p-1} - C_{n-p+1}^{1}\,|a_{p-2}|\,\varrho^{p-2} - \cdots - C_{n-1}^{p-1}\,|a_0| = 0.$$

Dans le cas où

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0, \quad a_0 = 1$$

on retrouve la limite exacte $\sqrt[n]{C_{n-1}^{p-1}}$ obtenue par M. Van Vleck. Si, dans l'inégalité relative à $P_{q-1}(x)$, on remplace les coefficients par la limite plus large $\dfrac{M_p}{(\varrho-1)^{q-1}}$, on est conduit à l'équation

$$\varrho^p - \frac{M_p}{(\varrho-1)^{q-1}}(\varrho^{p-1}+\varrho^{p-2}+\cdots+1) = 0$$

ou

$$\varrho^p(\varrho-1)^q - M_p(\varrho^p-1) = 0 \tag{4}$$

dont la racine positive supérieure à *un* donne une limite supérieure pour $p$ zéros plus petite que $1+\sqrt[q]{M_p}$. Lorsque $p=n$, on retrouve l'équation bien connue

$$\varrho^n = M_n(\varrho^{n-1}+\varrho^{n-2}+\cdots+\varrho+1).$$

4. Supposons maintenant que les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p$ soient fixés. On peut toujours admettre que $a_p$ est égal à l'unité. Les égalités (1) donnent

$$|a_p'a| > 1 - M_p\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}+\cdots\right) = 1-\frac{M_p}{(\varrho-1)},$$

$$|a_k'a| < M_p\left(1+\frac{1}{\varrho}+\cdots\right) = \frac{M_p\varrho}{(\varrho-1)}, \quad k=0,1,2,\cdots(p-1).$$

Nous pouvons supposer que dans le polynome $P_1(x)$ tous les coefficients aient été multipliées par $a$. Nous continuerons à appeler $P_1(x)$ le nouveau polynome et à désigner ses coefficients par $a'_k$. Nous aurons donc

$$|a'_p| > 1 - \frac{M_p}{(\varrho - 1)}, \qquad |a'_k| < \frac{M_p \varrho}{\varrho - 1}, \qquad k = 0, 1, \cdots (p-1).$$

Au bout de $(q-1)$ opérations, nous aurons des coefficients $a_k{}^{(q-1)}$, vérifiant les inégalités:

$$|a_p{}^{(q-1)}| > 1 - \frac{M_p}{\varrho - 1} - \frac{M_p \varrho}{(\varrho - 1)^2} - \cdots - \frac{M_p \varrho^{q-2}}{(\varrho - 1)^{q-1}}$$

ou

$$|a_p{}^{(q-1)}| > 1 - M_p \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{q-1} - 1\right];$$

et

$$|a_k{}^{(q-1)}| < M_p \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{q-1}, \quad k = 0, 1, \cdots (p-1).$$

Le polynome $P_{q-1}(x)$ de degré $p$ admet $p$ zéros dont les modules sont inférieurs à

$$1 + \frac{M_p \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{q-1}}{1 + M_p - M_p \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{q-1}}.$$

Ecrivons que cette limite est égale à $\varrho$. Le polynome $P(x)$ aura dans tous les cas $p$ zéros de modules inférieurs à la valeur obtenue. L'équation s'écrit

$$\left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^q = \frac{M_p}{1 + M_p},$$

d'où

$$\varrho = \frac{1}{1 - \sqrt[q]{\frac{M_p}{1 + M_p}}} = \varrho_p(M_p).$$

Pour $p = n$, on retrouve encore la limite classique $1 + M_n$.

La limite $\varrho_p$ croît avec $M_p$ et avec $q$. Si $p$ est fixe et $n$ variable, $\varrho$ croît de $1 + M_p$ à l'infini lorsque $n$ croît de $p$ à l'infini. On ne peut d'ailleurs avoir aucune limite supérieure de $p$ zéros qui reste bornée quel que soit $n$, comme le montre le polynome

$$\left(1+\frac{x^p}{n}\right)^n = 1 + x^p + \cdots + \frac{x^{np}}{n^n}$$

dont tous les zéros augmentent indéfiniment avec $n$, bien que les $p+1$ premiers coefficients soient fixes.

Au contraire, si l'on fixe la valeur de $a_n$ à la place de celle de $a_p$, on a vu que les modules de $p$ zéros demeurent bornés quel que soit $n$.

5. Pour obtenir une limite supérieure en fonction des modules des $p+1$ premiers coefficients, on utilisera les inégalités (2), dans lesquelles il faut ici supprimer le facteur $\varrho^{q-1}$ puisque les coefficients de chaque polynome ont été multipliés par la racine $a$ correspondante, auxquelles on adjoindra l'inégalité

$$| a_p^{(q-1)} | \geqslant 1 - C_{p+q-2}^{q-2} \frac{| a_0 |}{\varrho^p} - C_{p+q-3}^{q-2} \frac{| a_1 |}{\varrho^{p-1}} - \cdots - C_{q-1}^{q-2} \frac{| a_{p-1} |}{\varrho} .$$

En portant la limite inférieure de $| a_p^{(q-1)} |$ et les limites supérieures de $| a_k^{(q-1)} |$ pour $k = 0, 1, \cdots (p-1)$ dans l'inégalité

$$| P_{q-1}(x) | \geqslant | a_p^{(q-1)} | \, | x |^p - | a_{p-1}^{(q-1)} | \, | x |^{p-1} - \cdots - | a_0^{(q-1)} | ,$$

puis, en remplaçant comme précédemment $| x |$ par $\varrho$, on est conduit à l'équation

$$\varrho^p - C_{n-p+1}^1 | a_{p-1} | \varrho^{p-1} - C_{n-p+2}^2 | a_{p-2} | \varrho^{p-2} - \cdots - C_n^p | a_0 | = 0$$

dont la racine positive donne une limite supérieure de $p$ zéros de $P(x)$. Cette équation a déjà été obtenue par M. Van Vleck en suivant une autre voie[4]). Pour

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0 \qquad a_p = 1,$$

elle donne la limite exacte $\sqrt[p]{C_n^p}$.

Si on remplace les coefficients $| a_k^{(q-1)} |$ par les limites plus larges du paragraphe précédent, on est conduit à l'équation

$$\varrho^{p-q+1} (\varrho - 1)^q - \frac{M_p}{1 + M_p} (\varrho^{p+1} - 1) = 0 \tag{5}$$

dont la racine supérieure à *un* donne une limite plus petite que $\varrho_p(M_p)$.

[4]) loc. cit. p. 115.

6. Supposons enfin que les coefficients fixés soient $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$, $a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n-p)$ avec $a_{p+h} = 1$. Désignons par $a_{p+h'}$ le premier coefficient suivant $a_{p-1}$ dont le module ne soit pas inférieur à *un*. Le nombre $h'$ est au plus égal à $h$. On est ainsi ramené au cas précédent, $p$ étant remplacé par $p+h'$ et $M_p$ par le plus grand des deux nombres 1 et $M_p$. Le polynome a donc toujours au moins $p+h' \geqslant p$ zéros dont les modules ne dépassent pas $\varrho_{p+h'}(M_p) < \varrho_p(M_p)$ si $M_p \geqslant 1$ ou $\varrho_{p+h'}(1) < \varrho_p(1)$ si $M_p \leqslant 1$. En définitive: *Le polynome $P(x)$ a toujours $p$ zéros au moins dont les modules sont inférieurs à $\varrho_p(M_p)$ lorsque $M_p \geqslant 1$, ou $\varrho_p(1)$ lorsque $M_p \leqslant 1$.*

Un raisonnement semblable permet de calculer une limite supérieure en fonction des coefficients donnés. On ramène la question à celle du paragraphe précédent en remplaçant par l'unité les coefficients $a_p$, $a_{p+1}, \ldots, a_{p+h}$. Pour chaque valeur possible de $h'$, on obtient ainsi une limite supérieure. La plus grande de ces limites lorsque $h'$ prend toutes les valeurs $0, 1, \ldots, h$ convient dans tous les cas.

On peut d'ailleurs toujours adopter la limite

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[n-p+1]{2}}} \max. \sqrt[p+h-k]{|a_k|}, \quad k = 0, 1, \cdots (p-1).$$

comme on le voit par un raisonnement en tous points semblable à celui de la fin du paragraphe 2.

7. On doit à *Hurwitz* le théorème suivant: Si les coefficients du polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

sont réels et positifs, les modules des zéros sont compris entre le plus petit et le plus grand des rapports

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad [5]$$

Ce théorème a été étendu par *M. Anghelutza* au cas où les coefficients ne sont plus soumis à la restriction d'être positifs[6]). Il suffit de se borner

[5]) The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 4 (1913), p. 89; Mathematische Werke, Bd. II, S. 627.

[6]) Sur une extension d'un théorème de Hurwitz (Bulletin de l'Académie roumaine, XVIe année (1934), p. 119).

à la limite supérieure, la limite inférieure s'en déduisant par le changement de $x$ en $\frac{1}{x}$. Si $s$ est la plus grande valeur des modules des rapports précédents, M. Anghelutza montre que $2s$ est une limite supérieure des modules des zéros et plus précisément, qu'il en est de même de $\varrho_n{}^s$, $\varrho_n$ désignant la racine positive de l'équation

$$\varrho^n = \varrho^{n-1} + \varrho^{n-2} + \dots + \varrho + 1,$$

qui est inférieure à 2.

Ce dernier résultat peut être étendu au cas de $p$ zéros en considérant seulement les $p+1$ premiers rapports. Soit donc $s$ la plus grande valeur des modules des rapports

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{p-1}}{a_p}$$

en supposant qu'aucun de ces coefficients ne soit nul. On a

$$|a_{p-1}| \leqslant s\,|a_p|, \quad |a_{p-2}| \leqslant s^2\,|a_p|, \quad \dots, \quad |a_0| \leqslant s^p\,|a_p|$$

et, la substitution de $sx'$ à $x$ dans le polynome $P(x)$ conduit, après division par $s^p a_p$, au polynome

$$\frac{a_0}{s^p\,a_p} + \frac{a_1}{s^{p-1}\,a_p}\,x' + \dots + \frac{a_{p-1}}{s\,a_p}\,x'^{p-1} + x'^p + \dots \quad .$$

Les $p$ premiers coefficients ont leurs modules inférieurs à l'unité. Ce dernier polynome a donc $p$ zéros au moins dont le module est inférieur à la racine $r_p$, supérieure à *un*, de l'équation (5), dans laquelle $M_p$ a été remplacé par l'unité. Cette racine $r_p$ est inférieure au nombre

$$\varrho_p(1) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\sqrt[q]{2}}}$$

qui est lui-même inférieur à $2q$. On a en effet

$$\frac{1}{2} < \left(1 - \frac{1}{2q}\right)^q$$

comme le montre aussitôt le développement du second membre par la formule du binome. On en déduit

$$\frac{1}{\sqrt[q]{2}} < 1 - \frac{1}{2q}$$

et par suite

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[q]{2}}} < 2q.$$

D'où la proposition:

*Si s désigne le plus grand module des rapports*

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \cdots, \frac{a_{p-1}}{a_p}$$

*le polynome*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_n x^n$$

*a au moins p zéros dont les modules sont inférieurs à* $2(n - p + 1)\, s$.

Nous avons supposé différents de zéro les $p + 1$ premiers coefficients. Si l'un d'eux $a_k$ est nul, on remplacera les rapports $\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|$ et $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ par le rapport unique $\sqrt{\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right|}$ et rien ne sera changé aux raisonnements. Plus généralement, si les coefficients $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+l-1}$ sont nuls, on remplace les $l + 1$ rapports

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|, \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \cdots \left|\frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}\right|$$

par le rapport unique $\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+l}}\right|^{\frac{1}{l+1}}$.

On peut remarquer que le nombre $s$ est supérieur aux termes de la suite

$$\sqrt[p]{|a_0|}, \sqrt[p-1]{|a_1|}, \cdots \sqrt{a_{p-2}}, a_{p-1},$$

en supposant pour simplifier $a_p = 1$. Mais inversement, si $s$ est le plus grand terme de cette suite, il n'est pas nécessairement supérieur aux modules des $p$ rapports considérés. Il suffit, pour s'en rendre compte, de supposer que deux coefficients consécutifs aient des modules dont l'ordre de grandeur est très différent. Il en résulte que, dans l'énoncé précédent comme dans celui du théorème de Hurwitz, il est plus avantageux de remplacer la suite des rapports par la suite, d'ailleurs moins simple, des radicaux.

Au lieu des coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_p$ on peut faire intervenir la suite $a_0, a_1, \cdots a_{p-1}, a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n - p)$. Supposons par exemple $h = n - p$. On considèrera la suite des rapports

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \cdots, \left(\frac{a_{p-1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

et l'on démontrera de la même manière la proposition: *Si $s$ est le plus grand module des rapports précédents, le polynome a au moins $p$ zéros dont les modules sont inférieurs à $2s$.*

Il suffit d'observer qu'il y a au moins $p$ zéros de modules inférieurs à la racine $r_n$ supérieure à *un* de l'équation (4) dans laquelle on a fait $M_p = 1$. Cette racine est d'ailleurs inférieure à 2.

Si on considère la suite $a_0, \cdots a_{p-1}, a_{p+h}$, il faut prendre les rapports

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \cdots \frac{a_{p-2}}{a_{p-1}}, \left(\frac{a_{p-1}}{a_{p+h}}\right)^{\frac{1}{h+1}}.$$

On verra de la même manière qu'il y a au moins $p$ zéros de modules inférieurs à $2\,(n - p + 1)\,s$, $s$ désignant le plus grand module des $p$ rapports.

8. Désignons par $S_m$ la somme des puissances $m^{\text{èmes}}$ des modules des coefficients $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ du polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \cdots + x^n.$$

J'ai démontré que le nombre

$$R_m = \left[1 + S_m^{\frac{1}{m-1}}\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

est une limite supérieure du module des zéros, lorsque le nombre $m$ est supérieur à l'unité[7]). Lorsque $m$ croît indéfiniment, l'expression précé-

[7]) Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique (Comptes-Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIV (1931), p. 317—326).

dente a pour limite, $1 + M_n$; lorsque $m$ tend vers l'unité, elle a pour limite le plus grand des deux nombres 1 et

$$S_1 = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|;$$

on retrouve ainsi des limites connues; pour $m = 2$, on a la limite

$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 + 1}$$

qui a déjà été obtenue par MM. *Carmichael et Mason*[8]).

Lorsque $1 < m \leqslant 2$, le nombre $\mu = \frac{1}{m-1}$ est supérieur à *un*; l'inégalité

$$1 + A^\mu \leqslant (1 + A)^\mu \qquad A \geqslant 0$$

entraîne

$$R_m \leqslant (1 + S_m)^{\frac{1}{m}};$$

on peut donc prendre comme limite supérieure

$$R'_m = \sqrt[m]{|a_0|^m + |a_1|^m + \cdots + |a_{n-1}|^m + 1}.$$

Lorsque $m > 2$, puisque $\mu < 1$, on a l'inégalité,

$$\frac{1 + A^\mu}{2} \leqslant \left(\frac{1 + A}{2}\right)^\mu,$$

ou

$$1 + A^\mu \leqslant 2^{1-\mu} (1 + A)^\mu < 2 (1 + A)^\mu;$$

on peut alors adopter la limite supérieure

$$2 R'_m = 2 \,.\, \sqrt[m]{|a_0|^m + \cdots + |a_{n-1}|^m + 1}.$$

Nous allons voir que les expressions correspondantes portant sur les $p$ premiers coefficients vont nous permettre d'obtenir des limites supérieures pour les modules de $p < n$ zéros. Les égalités (1) donnent

$$|a'_k| \leqslant \frac{|a_0|}{\varrho^{k+1}} + \frac{|a_1|}{\varrho^k} + \cdots + \frac{|a_k|}{\varrho}.$$

---

[8]) Note on the roots of algebraic equations (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. XXI (1915), p. 14—22).

Soient $m$ et $m'$, deux nombres positifs, vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1.$$

L'inégalité

$$\sum_{i=1}^{k} A_i B_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} A_i^m\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} B_i^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \tag{6}$$

valable pour les nombres positifs $A_i$, $B_i$, entraîne

$$| a_k' | \leqslant \left(\sum_{i=0}^{k} | a_i |^m\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\varrho^{(1+i)m'}}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{k} | a_i |^m \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} | a_i |^m = S_{m,p}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\varrho^{(1+i)m'}} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\varrho^{(1+i)m'}} = \frac{1}{\varrho^{m'} - 1}$$

Par conséquent

$$| a_k' |^m < S_{m,p} \frac{1}{(\varrho^{m'} - 1)^{m-1}}$$

et

$$\sum_{i=0}^{p-1} | a_k' |^m = S'_{m,p} < S_{m,p} \frac{p}{(\varrho^{m'} - 1)^{m-1}} \cdot$$

Au bout de $(q - 1)$ opérations, nous aurons

$$S_{m,p}^{(q-1)} < S_{m,p} \frac{p^{q-1}}{(\varrho^{m'} - 1)^{(q-1)(m-1)}} \cdot$$

Appliquons toujours la même méthode; si $P(x)$ a moins de $p$ zéros dont les modules sont inférieurs à $\varrho$, nous effectuerons les $q - 1$ divisions qui conduisent à un polynome $P_{q-1}(x)$ dont le terme de degré le plus élevé est $\pm x^p$. Ce polynome a certainement $p$ zéros de modules inférieurs à

$$\left\{1 + \left[S_{m,p}^{(q-1)}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}^{\frac{1}{m'}}.$$

Ecrivons que le nombre obtenu en remplaçant dans cette expression $S_{m,p}^{(q-1)}$ par sa limite supérieure est égal à $\varrho$. Nous obtiendrons l'équation

$$1+\left[S_{m,p}\frac{p^{q-1}}{(\varrho^{m'}-1)^{(q-1)\,(m-1)}}\right]^{\frac{1}{m-1}}=\varrho^{m'}$$

ou

$$(\varrho^{m'}-1)^{q\,(m-1)}=S_{m,p}\,p^{q-1},$$

d'où l'on tire

$$\varrho=\left[1+p^{\frac{q-1}{q\,(m-1)}}\,S_{m,p}^{\frac{1}{q\,(m-1)}}\right]^{\frac{m-1}{m}}.$$

On peut d'ailleurs remplacer ce nombre par un nombre plus grand. On a d'abord

$$\varrho\leqslant p^{\frac{q-1}{q\,m}}\left[1+S_{m,p}^{\frac{1}{q\,(m-1)}}\right]^{\frac{m-1}{m}}.$$

Si $1<m\leqslant 1+\frac{1}{q}$,

$$1+S_{m,p}^{\frac{1}{q\,(m-1)}}\leqslant(1+S_{m,p})^{\frac{1}{q\,(m-1)}}.$$

On prendra donc la limite

$$p^{\frac{q-1}{q\,m}}\sqrt[q\,m]{|\,a_0\,|^m+\cdots+|\,a_{p-1}\,|^m+1}.$$

Si $1+\frac{1}{q}<m$, on a

$$1+S_{m,p}^{\frac{1}{q\,(m-1)}}<2\,(1+S_{m,p})^{\frac{1}{q\,(m-1)}}$$

et l'on pourra adopter la limite

$$2\,p^{\frac{q-1}{q\,m}}\sqrt[q\,m]{|\,a_0\,|^m+\cdots+|\,a_{p-1}\,|^m+1}.$$

Par exemple lorsque $p<n$, $1+\frac{1}{q}\leqslant 2$ et on a, pour $m=2$, la limite

$$2\,p^{\frac{q-1}{2\,q}}\sqrt[2\,q]{|\,a_0\,|^2+\cdots+|\,a_{p-1}\,|^2+1}.$$

En résumé: *Le polynome $P(x)$ a $p$ zéros au moins dont les modules sont inférieurs à*

$$p^{\frac{q-1}{qm}} \sqrt[qm]{|a_0|^m + \cdots + |a_{p-1}|^m + 1}$$

*pour toute valeur de $m$ comprise entre* 1 *et* $1 + \frac{1}{q}$. *Ils sont inférieurs à*

$$2p^{\frac{q-1}{qm}} \sqrt[qm]{|a_0|^m + \cdots + |a_{p-1}|^m + 1}$$

*lorsque $m$ est supérieur à* $1 + \frac{1}{q}$.

Pour $p = n$, $q = 1$, le facteur $p^{\frac{q-1}{q}}$ se réduit à l'unité et l'on retrouve les limites connues valables pour tous les zéros de $P(x)$.

Lorsque $m$ augmente indéfiniment, on retrouve la limite $1 + \sqrt[q]{M_p}$ établie au paragraphe 2.

Nous avons laissé de côté l'hypothèse $m = 1$. Dans ce cas, on verra aisément que $P(x)$ admet au moins $p$ zéros dans le cercle-unité lorsque

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{p-1}| < \frac{1}{p^{n-p}}$$

et $p$ zéros au moins de modules inférieurs à

$$p^{\frac{q-1}{q}} \sqrt[q]{|a_0| + \cdots + |a_{p-1}|}$$

dans le cas contraire.

Les égalités (1) donnent en effet

$$|a'_k| \leqslant \frac{S_{1,p}}{\varrho}, \qquad \varrho \geqslant 1$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots (p-1).$$

On en déduit

$$S'_{1,p} \leqslant \frac{p\, S_{1,p}}{\varrho},$$

et, après $q - 1$ opérations,

$$S^{(q-1)}_{1,p} \leqslant \left(\frac{p}{\varrho}\right)^{q-1} S_{1,p}$$

En égalant à $\varrho$ cette valeur supérieure, on obtient

$$\varrho = p^{\frac{q-1}{q}} \cdot \sqrt[q]{S_{1,p}}$$

d'où l'on conclut le résultat précédent. On peut aussi remarquer que

$$S'_{1,p} < | a_0 | \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots\right) + | a_1 | \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots\right) + \cdots$$
$$+ | a_{p-1} | \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \cdots\right).$$

c'est-à-dire

$$S'_{1,p} < \frac{S_{1,p}}{\varrho - 1}.$$

Le même procédé conduit à l'équation

$$\frac{S_{1,p}}{(\varrho - 1)^{q-1}} = \varrho - 1 < \varrho$$

d'où

$$\varrho = 1 + \sqrt[q]{| a_0 | + | a_1 | + \cdots + | a_{p-1} |}$$

*Il y a donc toujours $p$ zéros au moins de modules inférieurs à la valeur*

$$1 + \sqrt[q]{| a_0 | + | a_1 | + \ldots + | a_{p-1} |}.$$

Si l'on fait le même calcul en prenant $\varrho = 2$, on voit que

$$S'_{1,p} < S_{1,p}.$$

Au bout de $q - 1$ opérations, on obtient un polynome de degré $p$ dont le coefficient de $x^p$ est $\pm 1$ et pour lequel

$$S^{(q-1)}_{1,p} < S_{1,p}.$$

Les zéros de ce polynome ont des modules inférieurs au plus grand des deux nombres 1 et $S^{(q-1)}_{1,p}$; donc, au plus grand des deux nombres 1, $S_{1,p}$. Par conséquent le polynome $P(x)$ a $p$ zéros au moins de modules inférieurs au plus grand des nombres 1, 2, $S_{1,p}$, c'est-à-dire au plus grand des deux nombres 2 et $S_{1,p}$. En particulier, si

$$| a_0 | + | a_1 | + \ldots + | a_{p-1} | \leqslant 2,$$

*le polynome $P(x)$ a au moins $p$ zéros de modules inférieurs ou égaux à 2.*

Nous avons trouvé une limite qui convient à tous les cas: c'est le nombre $1+\sqrt[q]{S_{1,p}}$; lorsque $S_{1,p}$ est inférieur à $\frac{1}{p^{n-p}}$, la limite 1 est plus avantageuse. Lorsque $S_{1,p}$ est supérieur à $\frac{1}{p^{n-p}}$, la limite $p^{\frac{q-1}{q}}\sqrt[q]{S_{1,p}}$ est plus avantageuse tant que $\sqrt[q]{S_{1,p}}$ ne dépasse pas $\frac{1}{p^{\frac{q-1}{q}}-1}$; elle devient ensuite moins avantageuse. Pour les grandes valeurs de $n$, il faut prendre la limite $1+\sqrt[q]{S_{1,p}}$; cette limite tend vers 2 pour $n$ infini

9. Si l'on remplace le polynome $P(x)$ par le polynome

$$Q(x) = (1-x)\,P(x) = a_0 + (a_1 - a_0)\,x + \cdots + (a_{p-1} - a_{p-2})x^{p-2} + \cdots - x^{n+1},$$

on pourra appliquer au nouveau polynome chacun des résultats précédents en remplaçant les coefficients $a_0, a_1, \cdots a_{p-1}$ respectivement par $a_0, a_1 - a_0, \cdots a_{p-1} - a_{p-2}$.

Par exemple, le polynome $Q(x)$ a tous ses zéros inférieurs en modules à l'expression

$$\sqrt[m]{|a_0|^m + |a_1 - a_0|^m + \ldots + |a_{n-1} - a_{n-2}|^m + |1 - a_{n-1}|^m + 1},$$

lorsque $1 < m \leqslant 2$. Il en est donc de même pour le polynome $P(x)$. Le cas de $m = 2$ a déjà été considéré par M. *Williams*[9]).

Désignons par $O, A_0, A_1, \cdots A_{p-1}, \cdots A_n$ les points du plan d'affixes $0, a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, \cdots a_n = 1$. Les nombres $|a_k - a_{k-1}|$ représentent les longueurs des côtés de la ligne brisée $O\,A_0\,A_1 \cdots A_{p-1} \cdots A_n\,O$.

Supposons $m = 1$; soit $L_p$ la longueur de la ligne brisée $O\,A_0\,A_1 \cdots A_{p-1}$. D'après ce qui précède, si $L_p$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{p^q}$, le polynome $Q(x)$, donc aussi le polynome $P(x)$ a au moins $p$ zéros de modules inférieurs à l'unité.

Si $p = n+1$, on a toujours $L_{n+1} > 1$ à moins que les points $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}$ ne soient rangés sur le segment $(0,1)$ dans l'ordre de leurs indices. Dans ce cas, les nombres $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ sont réels et positifs et vérifient les inégalités

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} \leqslant 1;$$

[9]) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. XXVIII (1922), p. 394.

les modules des zéros sont inférieurs ou égaux à *un*. C'est le théorème de M. *Kakeya*[10]).

Les résultats précédents permettent d'en donner une extension. Supposons $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ réels et positifs vérifiant les inégalités

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{p-1} < \frac{1}{p^q},$$

les autres coefficients demeurant arbitraires, sauf le dernier qui est toujours égal à l'unité. Le polynome $Q(x)$ a alors $p$ zéros au moins de modules inférieurs à l'unité: il en est donc de même de $P(x)$. On peut d'ailleurs supposer $a_{p-1} = \frac{1}{p^q}$. En d'autres termes:

*Le polynome*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + x^n$$

*dans lequel les coefficients $a_0, a_1, \cdots a_{p-1}$ sont réels et vérifient les inégalités :*

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{p-1} \leqslant \frac{1}{p^q}$$

*a au moins $p$ zéros de modules inférieurs à l'unité.*

Si $p = n + 1$, la dernière inégalité peut s'écrire $a_n = 1$ et l'on retrouve le théorème de M. Kakeya.

Si l'on suppose seulement

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots a_{p-1} \leqslant 2,$$

on voit, d'après la proposition finale du paragraphe 9, que $P(x)$ a au moins $p$ zéros de modules inférieurs à 2.

10. Nous venons d'obtenir des extensions de théorème de M. Kakeya en laissant arbitraires les coefficients $a_p, a_{p+1}, \cdots a_{n-1}$. On peut obtenir une extension d'une autre nature en supposant que tous les coefficients restent réels. On est conduit au théorème de M. Kakeya en supposant que le polygone $O\, A_0\, A_1 \cdots A_n\, O$ s'aplatit sur le segment $(0,1)$. Admettons maintenant que ce polygone s'aplatisse sur le côté $O\, A_n$ sans que tous les sommets demeurent à l'intérieur de ce segment. Nous obtiendrons ainsi

[10]) On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients (The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 2 (1912), p. 140).

un théorème déjà démontré par M. *L. Berwald* comme conséquence d'une proposition plus générale[11]). Voici une démonstration directe simple de ce théorème. Nous aurons des inégalités telles que

$$a_{p+1} \leqslant a_{p+2} \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_p;$$

la valeur absolue de $a_n$ peut être laissée arbitraire. Le polynome

$$Q(x) = a_0 + (a_1 - a_0)\, x + \cdots + (a_p - a_{p-1})\, x^p - (a_p - a_{p+1})\, x^{p+1} + \\ + (a_{p+2} - a_{p+1})\, x^{p+2} + \cdots + (-a_n)\, x^{n+1}$$

présente deux variations. Comme il admet le zéro 1, il y a un autre zéro positif $\xi$. Le polynome est négatif lorsque $x$ est dans l'intervalle $(1, \xi)$ et positif lorsque $x$ est à l'extérieur de cet intervalle. On a

$$Q'(1) = P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Si $P(1)$ est négatif, $Q(x)$ décroît quand $x$, en croissant, traverse la valeur 1, et $\xi$ est supérieur à 1. Si $P(1)$ est positif, $\xi$ est inférieur à 1. Soit

$$f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)\, x + \cdots + (a_p - a_{p-1})\, x^p + (a_{p+2} - a_{p+1})\, x^{p+2} + \\ \cdots + (-a_n)\, x^{n+1}, \quad g(x) = (a_p - a_{p+1})\, x^{p+1}.$$

Dans le premier cas, soit $\varrho$ un nombre très voisin de *un* dans l'intervalle $(1, \xi)$. On a $1 < \varrho < \xi$ et $f(\varrho) < g(\varrho)$. Pour $|x| = \varrho$, on a l'inégalité

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{f(\varrho)}{g(\varrho)} < 1$$

Donc, le polynome $Q(x) = f(x) - g(x)$ et le polynome $g(x)$ ont le même nombre de zéros dans le cercle $|x| < \varrho$, soit $p+1$; par conséquent, $P(x)$ a $p$ zéros dans ce cercle, puisque $Q(x)$ admet le zéro $x = 1$.

Dans le second cas, prenons $\varrho$ voisin de $\xi$ dans l'intervalle $(\xi, 1)$. On aura $\xi < \varrho < 1$ et on verra de la même manière que $P(x)$ a $p+1$ zéros dans le cercle $|x| < \varrho$, donc dans le cercle $|x| \leqslant \xi$.

Si enfin $P(1) = 0$, on pourra considérer ce cas comme limite du précédent. Dans tous les cas, $P(x)$ a $p$ zéros au moins dans le cercle-unité. En définitive: Le polynome à coefficients réels

[11]) Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze (Math. Zeitschrift, Bd. 37, (1935) p. 61—76). – Je dois cette indication bibliographique à l'obligeance de M. Pólya.

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \, .. + a_n x^n$$

dans lequel

$$a_{p+1} \leqslant a_{p+2} \leqslant \, .. \leqslant a_n \leqslant 0 \leqslant a_0 \leqslant \, .. \leqslant a_p,$$

a $p$ zéros au moins dans le cercle unité.

Si $p = n$, on retrouve le théorème de M. Kakeya.

11. Les expressions $S_m$, introduites au paragraphe 9, sont liées aux moyennes d'ordre $m$ de M. Hardy relatives au polynome $P(x)$. On sait que la moyenne $\mathfrak{M}_m(r)$ de la fonction $f(x)$, holomorphe dans le cercle $|x| \leqslant r$, est le nombre

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^m d\theta\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Nous supposons $m \geqslant 0$. La moyenne $\mathfrak{M}_m(1)$ sera désignée par $\mathfrak{M}_m$: Le nombre $\mathfrak{M}_m(r)$ croît constamment avec $m$; lorsque $m$ croît indéfiniment, $\mathfrak{M}_m(r)$ tend vers le module maximum $M(r)$ de $f(x)$ pour $|x| \leqslant r$; lorsque $m$ tend vers zéro, il tend vers la moyenne géométrique

$$\mathfrak{M}_0(r) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta}$$

Pour $m = 1$, on a la moyenne arithmétique

$$\mathfrak{M}_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

La moyenne quadratique $\mathfrak{M}_2(r)$ est donnée par l'égalité

$$\mathfrak{M}_2(r) = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \, .. + |a_p|^2 r^{2p} + \cdots}$$

si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \cdots \qquad (|x| \leqslant r).$$

Considérons les moyennes $\mathfrak{M}_m$ du polynome $P(x)$ sur la circonférence unité. La moyenne quadratique n'est autre que la somme $\sqrt{1 + S_2}$ introduite précédemment. D'ailleurs, si $m > 1$, l'inégalité (6) donne pour $|x| = r \leqslant 1$,

$$| P(x) | < \left[ \sum_{k=0}^{n} | a_k |^m \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[ \sum_{k=0}^{n} r^{km'} \right]^{\frac{1}{m'}} < (n+1)^{\frac{1}{m'}} (1 + S_m)^{\frac{1}{m}}$$

avec $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'} = 1$. On en déduit

$$\mathfrak{M}_m < R'_m (n+1)^{1-\frac{1}{m}} < (n+1) R'_m.$$

Nous allons voir que $\mathfrak{M}_m$ est, quel que soit $m$, une limite supérieure du module des zéros de $P(x)$. En effet, soient $r_1, r_2, \ldots r_h$, les modules des zéros de $P(x)$ intérieurs au cercle-unité. La formule de Jensen

$$\log \frac{| P(0) |}{r_1 r_2 \cdots r_h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log | P(e^{i\theta}) | \, d\theta$$

donne

$$\frac{| a_0 |}{r_1 r_2 \cdots r_h} = r_{h+1} \cdots r_n = \mathfrak{M}_0 \leqslant \mathfrak{M}_m ,$$

en désignant par $r_{h+1}, \cdots r_n$, les modules des autres zéros. Or, on a évidemment

$$r_{h+1} \cdots r_n \geqslant r_n$$

si $r_n$ est un zéro de plus grand module; donc

$$r_n \leqslant \mathfrak{M}_m.$$

D'autre part,

$$r_1 \geqslant r_1 r_2 \cdots r_h \geqslant \frac{| a_0 |}{\mathfrak{M}_m} .$$

On en déduit la proposition suivante:

*Les modules des zéros du polynome*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*sont compris entre les nombres*

$$\frac{| a_0 |}{\mathfrak{M}_m} \text{ et } \frac{\mathfrak{M}_m}{| a_n |},$$

$\mathfrak{M}_m$ *désignant une moyenne d'ordre positif du polynome sur la circonférence-unité*[12]).

En particulier, les modules des zéros sont compris entre $\frac{|a_0|}{M}$ et $\frac{M}{|a_n|}$, $M$ désignant le module maximum dans le cercle-unité.

On peut remplacer le cercle-unité par un cercle $|x| = r$ arbitraire. On voit aussitôt, en supposant $a_n = 1$, que le nombre $\frac{\mathfrak{M}_m(r)}{r^{n-1}}$ est une borne supérieure des modules des zéros. Lorsque $r$ varie de zéro à l'infini, cette expression a un minimum qui donne la meilleure limite du type considéré.

Si l'on se borne à la moyenne $\mathfrak{M}_m^{(p)}$ relative au polynome

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1},$$

un raisonnement tout à fait semblable à celui qui a été utilisé maintes fois dans ce travail, montre que le polynome $P(x)$, dans lequel on suppose fixée la moyenne précédente et un coefficient $a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n - p)$, a $p$ zéros au moins dont les modules sont inférieurs à $2 + \left[\mathfrak{M}_m^{(p)}\right]^{\frac{1}{q}}$, par exemple lorsque $a_n = 1$.

(Reçu le 14 octobre 1934.)

[12]) Pour $m=2$, voir aussi *Ed. Landau*. Sur quelques théorèmes de *M. Petrovitch* relatifs aux zéros des fonctions analytiques. (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 33 (1905), p. 251—261).