Über die Potenzreihenentwicklung gewisser mehrdeutiger Funktionen.

Autor(en): **Pólya, Georg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **7 (1934-1935)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515595

Über die Potenzreihenentwicklung gewisser mehrdeutiger Funktionen

Von Georg Pólya, Zürich

Einleitung

1. Die vorliegende kurze Arbeit liefert einen Beitrag zur *Hadamard'*schen Fragestellung, d. h. zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Koeffizientenfolge einer Potenzreihe und den Eigenschaften der analytischen Funktion, die durch diese Potenzreihe definiert ist. Die *Hadamard'*sche Fragestellung ist sehr vielgestaltig, denn sowohl von der Koeffizientenfolge, wie von der Funktion kann man mannigfaltig verschiedene Eigenschaften in Betracht ziehen. Eine in der allgemeinen *Hadamard'*schen miteingeschlossene spezielle Fragestellung ist z. B. die folgende: *Von welchen Eigenschaften der Koeffizientenfolge ist bedingt der Verlauf, den die Riemannsche Fläche der durch die Potenzreihe definierten Funktion nimmt?*

Diese spezielle Frage ist bisher nur wenig bearbeitet und wohl überhaupt nicht explizite hervorgehoben worden. Ich greife zuerst den folgenden noch spezielleren, besonders einfachen Fall heraus: *Wie müssen beschaffen sein die Koeffizienten der Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \tag{1. 1}$$

damit die dadurch definierte analytische Funktion die folgenden Eigenschaften zeige: Sie bleibt eindeutig auf der Riemann'schen Fläche von $\sqrt[p]{z-1}$, *sie ist regulär in allen Punkten außerhalb der Windungspunkte* $z = 1$ *und* $z = \infty$ *dieser Fläche und sie verschwindet im Windungspunkte* $z = \infty$. (Hierin bedeutet p eine positive ganze Zahl.) Diese Frage läßt sich einfach und, bei richtiger Benützung des Vorhandenen, mühelos beantworten. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die verlangte Beschaffenheit der Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ besteht darin, daß diese Folge sich durch eine meromorphe Funktion $H(z)$ von besonderer Bauart interpolieren läßt. Es muß $H(z)$ die Form haben

$$H(z) = \frac{\Gamma\left(z+\frac{1}{p}\right)F_1(z) + \Gamma\left(z+\frac{2}{p}\right)F_2(z) + \cdots + \Gamma\left(z+\frac{p}{p}\right)F_p(z)}{\Gamma(z+1)}. \tag{1. 2}$$

Hierin bedeuten $F_1(z), F_2(z), \cdots F_p(z)$ ganze Funktionen, die den Minimaltypus der Ordnung 1 nicht übersteigen; d. h. irgend eine $F(z)$ unter ihnen hat die Eigenschaft, daß bei beliebig, aber fest gewähltem positivem ε das Produkt $F(z)e^{-\varepsilon|z|}$ in der ganzen z-Ebene beschränkt bleibt. Die durch (1. 2) gegebene Funktion $H(z)$ ist, wegen der bekannten Eigenschaften der Gammafunktion, meromorph. *Zur verlangten Beschaffenheit der Koeffizientenfolge ist notwendig und hinreichend, daß*

$$a_n = H(n) \textit{ für } n = 0, 1, 2, \cdots \qquad \textit{sei.} \tag{1. 3}$$

2. Das eben Ausgesprochene ist ein Spezialfall (der Fall $\varrho = 0$) des folgenden Satzes:

Satz I. *Es sei p eine positive ganze Zahl und $0 \leqq \varrho < 1$. Die Potenzreihe* (1. 1) *definiere eine analytische Funktion, welche eindeutig und regulär bleibt auf der Fläche, welche von der Riemann'schen Fläche von $\sqrt[p]{z-1}$ übrigbleibt, wenn davon herausgeschnitten wird diejenige Umgebung des Windungspunktes $z = 1$, die sich auf die abgeschlossene Kreisscheibe vom Mittelpunkte $z = 1$ und Radius ϱ projiziert; ferner wird gefordert, daß die Funktion im Windungspunkte $z = \infty$ verschwindet.*

Die Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ kann dann und nur dann die Koeffizientenfolge einer so beschaffenen Potenzreihe sein, wenn sie durch eine meromorphe Funktion $H(z)$ interpoliert wird, im Sinne der Gleichung (1. 3), *wobei $H(z)$ gemäß* (1. 2) *mit ganzen Funktionen $F_1(z), F_2(z), \cdots F_p(z)$ vom Exponentialtypus aufgebaut ist, deren Indikatordiagramme enthalten sind im Bilde, das die Funktion $z = -\log(1-w)$ um den Nullpunkt der z-Ebene von dem Kreis $|w| \leqq \varrho$ der w-Ebene entwirft.*

Die Zuordnung des Funktionensystems $F_1(z), F_2(z), \cdots F_p(z)$ zu der Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ ist eineindeutig.

Die Fassung des Satzes I, insbesondere die darin gebrauchte weniger geläufige Terminologie, soll in Nr. 3—5 weiter erläutert werden. Der in vielen Hinsichten besonders einfache Spezialfall $\varrho = 0$ wurde in Nr. 1 erläutert. In andern Hinsichten ist der Fall $p = 1$ besonders einfach. In diesem Fall ist die Blätterzahl der Riemann'schen Fläche 1, die durch die Potenzreihe (1. 1) definierte Funktion ist im Kreisaußenraume $|z-1| > \varrho$ der z-Ebene regulär und eindeutig (im absoluten Sinne eindeutig), und die Funktion $H(z)$ ist eine ganze Funktion. Der Fall $p = 1$ ist wohlbekannt, er ordnet sich in ein von vielen, insbesondere von *Carlson* untersuchtes Gebiet ein[1]). Der äußerste Spezialfall, in welchem sowohl $\varrho = 0$ wie $p = 1$,

[1]) *Carlson* (3), (4); ferner Zitate in (6), S. 553. Die eingeklammerten Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

bildet den Gegenstand eines durch vielfache Anwendungen bekannten Satzes von *Wigert*[2]).

Die Begründung des Satzes I wird in Nr. 5—9 gegeben. In den nachfolgenden Nr. 10—13 wird ein Grenzfall von Satz I, der Satz IV behandelt. Der Grenzfall betrifft $p \to \infty$, wobei die betrachtete Riemann'sche Fläche in eine logarithmische Fläche übergeht; die Frage wird jedoch durch Satz IV nur angeschnitten, nicht erschöpft. Die letzte Nr. 14 bringt Andeutungen über Anwendungen und verwandte Fragen.

3. Ich will einige im Satz I gebrauchte Begriffe erläutern und gewisse damit zusammenhängende Sätze zu nachherigem Gebrauch zusammenstellen[3]).

Eine ganze Funktion $F(z)$ heißt vom *Exponentialtypus*, wenn ihr Anwachsen den Mitteltypus der Ordnung 1 nicht übersteigt, d. h. wenn es zwei positive Zahlen A und a gibt, so beschaffen, daß in der ganzen z-Ebene

$$|F(z)| < A e^{a|z|}$$

gilt[4]). Wenn die ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus ist, so heißt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |F(r e^{i\varphi})| = h(\varphi)$$

der *Indikator* von $F(z)$. Der Indikator $h(\varphi)$ ist eine stetige Funktion von φ, periodisch von der Periode 2π. Die Schar der Geraden

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$$

umhüllt einen endlichen konvexen Bereich, der als *Indikatordiagramm* von $F(z)$ bezeichnet wird, in folgendem Sinne: Das Indikatordiagramm hat mit jeder Geraden der Schar einen Punkt gemeinsam und liegt auf der negativen Seite davon (d. h. in der Halbebene, wo die linke Seite der Geradengleichung ≤ 0 wird). Die in Nr. 1 erwähnten ganzen Funktionen, deren Anwachsen den Minimaltypus der Ordnung 1 nicht übertrifft, sind

---

[2]) *Wigert* (10).

[3]) Beweise und ausführlichere Darstellung bei *Pólya* (6), insbesondere S. 571—586, oder *Bernstein* (1), insbesondere Note III.

[4]) Wenn diese Ungleichung in der Halbebene $\Re z \geqq 0$ für eine daselbst analytische Funktion $F(z)$ gilt, so heißt $F(z)$ vom *Exponentialtypus in der Halbebene* $\Re z \geqq 0$. Ähnlich ist die Terminologie für irgendeinen Winkelraum.

dadurch charakterisiert, daß ihr Indikatordiagramm aus dem einzigen Punkt $z = 0$ besteht.

Man schreibe die Potenzreihe der ganzen Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus in der Form

$$F(z) = d_0 + \frac{d_1 z}{1!} + \frac{d_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{d_k z^k}{k!} + \cdots, \tag{3. 1}$$

und betrachte daneben die in einer Umgebung von $z = \infty$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \frac{d_0}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \frac{d_2}{z^3} + \cdots + \frac{d_k}{z^{k+1}} + \cdots. \tag{3. 2}$$

Der kleinste konvexe Bereich, außerhalb dessen die Fortsetzung dieser Potenzreihe von $f(z)$ regulär bleibt, ist das Spiegelbild des Indikatordiagramms von $F(z)$ in bezug auf die reelle Achse und heißt das *konjugierte Diagramm* von $F(z)$. Es sind $F(z)$ und $f(z)$ miteinander durch die beiden, zueinander reziproken Integralformeln

$$f(z) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-zt} dt, \tag{3. 3}$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, e^{zt} dz \tag{3. 4}$$

verbunden; die Integrationslinie von (3. 3) ist die positive reelle Achse, die von (3. 4) irgendeine doppelpunktlose geschlossene Kurve, welche das konjugierte Diagramm von $F(z)$ im Innern enthält. Die Darstellung (3. 3) ist in der Halbebene $\Re z > h(0)$ gültig, die Darstellung (3. 4) für alle Werte von t.

4. Die Funktion

$$z = \log \frac{1}{1 - w}$$

entwirft von dem Kreis $|w| \leqq \varrho$ der w-Ebene, wobei $0 \leqq \varrho < 1$, unendlich viele, zueinander kongruente und gleichgelegene, äquidistante Bilder in der z-Ebene, von welchem ein bestimmtes den Punkt $z = 0$ enthält: dieses Bild ist im Satz I gemeint und soll im folgenden mit $\mathfrak{B}_\varrho$ bezeichnet werden. Entlang des Randes von $\mathfrak{B}_\varrho$ gilt also die Gleichung

$$|1 - e^{-z}| = \varrho.$$

Wie leicht zu konstatieren, liegt dieser Bildbereich im Innern des Horizontalstreifens $-\frac{\pi}{2} < \mathfrak{J} z < \frac{\pi}{2}$, sie ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse, seine auf der reellen Achse gelegenen Randpunkte sind

$$z = -\log(1+\varrho), \qquad z = -\log(1-\varrho).$$

Schließlich ist $\mathfrak{B}_\varrho$ ein *konvexer* Bereich[5]). $\mathfrak{B}_0$ besteht aus dem einzigen Punkt $z = 0$, und $\mathfrak{B}_\varrho$ ist in $\mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}$ als Teilbereich enthalten für

$$0 \leqq \varrho < \varrho + \varepsilon < 1.$$

Aus der Symmetrie von $\mathfrak{B}_\varrho$ geht hervor, daß das Indikator- und das konjugierte Diagramm entweder beide in $\mathfrak{B}_\varrho$ enthalten sind oder keines von den beiden in $\mathfrak{B}_\varrho$ enthalten ist. Betrachten wir den Fall, daß das konjugierte (also auch das Indikator-) Diagramm von $F(z)$ in $\mathfrak{B}_\varrho$ enthalten ist. Aus der beschriebenen Situation von $\mathfrak{B}_\varrho$, und aus seiner Symmetrie und Konvexität folgt, daß

$$h(0) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |F(r)| \leqq \log \frac{1}{1-\varrho}\,, \tag{4. 1}$$

und ähnlich, daß

$$h(\pi) \leqq \log(1+\varrho)\,, \qquad h\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}\,, \qquad h\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}\,.$$

Beweis des Satzes I

5. Für die in Satz I beschriebene, aus der Fortsetzung der Potenzreihe (1. 1) entstehende Funktion ist der Punkt $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt p-ter Ordnung. (Eventuell bloß von q-ter Ordnung, wo q ein Teiler von p ist. Man beachte, daß auf der *Riemann'schen Fläche* von $\sqrt[p]{1-z}$ die Funktion regulär sein soll, nicht notwendigerweise in der

---

[5]) Dies folgt aus einem bekannten Kriterium (vgl. z. B. (8), Bd. I, Nr. III 108, S. 105 und S. 277), da, $\varphi(w) = -\log(1-w)$ gesetzt,

$$\Re\left(1 + w\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}\right) = \Re\frac{1}{1-w} = \frac{1-\Re w}{|1-w|^2} > 0$$

ist für $|w| = \varrho < 1$.

Ebene.) In der nächsten Überlegung könnte man die *Puiseux*'sche Entwicklung um den Verzweigungspunkt $z=\infty$ verwenden, ich ziehe jedoch vor, anders zu schließen[6]).

Man nehme von der Ebene heraus zuerst die Kreisscheibe $|z-1|\leqq\varrho$, dann die Punkte der positiven reellen Achse von $z=1+\varrho$ bis $z=\infty$; in dem übriggebliebenen Teil der Ebene definiert die Potenzreihe (1. 1), wie in Satz I erwähnt, einen Funktionszweig $g(z)$. Wenn der variable Punkt z von der Stelle $z=0$ ausgehend die Kreisscheibe $|z-1|\leqq\varrho$ einmal in positivem Sinne umkreist, gehe der Zweig $g(z)$ in den Zweig $g_1(z)$, der Zweig $g_1(z)$ in $g_2(z)$, $g_2(z)$ in $g_3(z)$, $\cdots$ schließlich $g_{p-1}(z)$ wieder in $g(z)$ über. Diese zyklische Verbundenheit der Funktionszweige $g(z)$, $g_1(z), \cdots g_{p-1}(z)$ drückt die Voraussetzung von Satz I über die Art der Mehrdeutigkeit aus.

Es sei $\Theta=e^{\frac{2\pi i}{p}}$, l eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots p$, und $(1-z)^{1/p}$ bezeichne denjenigen Zweig, welcher für ein z des Intervalles $0<z<1$ positiv ausfällt. Die Funktion

$$(5.\ 1)\qquad \frac{1}{p}(1-z)^{\frac{l}{p}-1}\left[g(z)+\Theta^l g_1(z)+\Theta^{2l}g_2(z)+\cdots+\Theta^{(p-1)l}g_{p-1}(z)\right]=h_l(z)$$

kehrt zur Ausgangsbestimmung zurück, wenn z auf die beschriebene Art die Kreisscheibe $|z-1|\leqq\varrho$ umkreist. Folglich ist $h_l(z)$ eindeutig und regulär im Kreisaußenraum $|z-1|>\varrho$, ausgenommen möglicherweise den Punkt $z=\infty$. Wie alle Funktionszweige $g(z)$, $g_1(z), \cdots g_{p-1}(z)$, verschwindet auch $h_l(z)$ für $z=\infty$, da $l\leqq p$. Hieraus schließt man, daß die in der Umgebung von $z=\infty$ eindeutige Funktion $h_l(z)$ im Punkte $z=\infty$ *regulär ist und verschwindet*; somit ist $h_l(z)$ regulär für $|z-1|>\varrho$. Irgendeine $h(z)$ der Funktionen $h_1(z), h_2(z), \cdots$ besitzt also eine Entwicklung von der Gestalt

$$(5.\ 2)\qquad h(z)=\frac{c_0}{1-z}+\frac{c_1}{(1-z)^2}+\frac{c_2}{(1-z)^3}+\cdots$$

für $|z-1|>\varrho$; folglich ist

$$(5.\ 3)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}\leqq\varrho.$$

[6]) Der Schluß kommt im Grunde auf einen Beweis der Puiseux'schen Entwicklung heraus; es liegt mir dabei daran, die Rolle der vorausgesetzten Art der Mehrdeutigkeit hervorzuheben.

Indem man in (5. 1) $l = 1, 2, \cdots p$ setzt und linear kombiniert, erhält man

$$(5.4) \qquad g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$= (1-z)^{1-\frac{1}{p}} h_1(z) + (1-z)^{1-\frac{2}{p}} h_2(z) + \cdots + (1-z)^{1-\frac{p}{p}} h_p(z)\,;$$

daß eine Funktion dieser Gestalt von der in Satz I erwähnten Art ist, ist evident. Somit hängt der Beweis von Satz I von dem des folgenden Satzes ab:

Satz II. *Es sei* $0 \leqq \varrho < 1$, λ *eine von* $0, -1, -2, -3, \cdots$ *verschiedene Zahl, und die Potenzreihe*

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

stelle eine Funktion von der Form

$$(1-z)^{1-\lambda}\, h(z)$$

dar, wobei $h(z)$ *für* $|\, z - 1\,| > \varrho$ *regulär ist, auch im Punkte* $z = \infty$, *wo es verschwindet.*

Die Zahlenfolge $b_0, b_1, b_2, \cdots$ *kann dann und nur dann die Koeffizientenfolge einer so beschaffenen Potenzreihe sein, wenn es eine ganze Funktion* $F(z)$ *gibt, deren konjugiertes Diagramm in dem Bereich* $\mathfrak{B}_\varrho$ *enthalten ist, und die den Gleichungen*

$$b_n = \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)}\, F(n) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

genügt.

In der Tat wird, gemäß (5. 4), durch einen Beweis von Satz II auch Satz I mitbewiesen, abgesehen von einem Punkt: Daß die Koeffizienten a_n die Funktionen $F_1(z), \cdots F_p(z)$ eindeutig bestimmen, muß nachher (vergl. Nr. 9) noch besonders gezeigt werden. Die Zahl λ muß nicht eine rationale Zahl des Intervalls $0 < \lambda \leqq 1$ sein, sie kann auch komplex sein. Der Spezialfall $\lambda = 1$, $\varrho = 0$ des Satzes II fällt wieder mit dem erwähnten Satz von *Wigert* zusammen.

6. Wir betrachten nun Satz II. Die dort genannte Eigenschaft von $h(z)$ läßt sich durch (5. 2) und (5. 3) ausdrücken. Durch eine (vorderhand rein formale) Rechnung erhalten wir aus (5. 2)

$$\sum_0^\infty b_n z^n = (1-z)^{1-\lambda} h(z)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty c_k (1-z)^{-k-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty c_k \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda+k)\,(\lambda+k+1)\cdots(\lambda+k+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} z^n$$

$$(6.1) \qquad = \sum_{k=0}^\infty c_k \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\lambda+k+n)}{\Gamma(\lambda+k)\,\Gamma(n+1)} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(n+\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+k)} c_k$$

$$= \sum_{n=0}^\infty z^n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{\Gamma(\lambda+k)} (n+\lambda)\,(n+\lambda+1)\cdots(n+\lambda+k-1)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty z^n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)} F(n)\,;$$

wir haben dabei zur Abkürzung gesetzt

$$(6.2) \qquad F(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{\Gamma(\lambda+k)} (z+\lambda)\,(z+\lambda+1)\cdots(z+\lambda+k-1).$$

Um diese Rechnung zu einem Beweis von Satz II auszugestalten, müssen wir zweierlei leisten: Erstens müssen wir von $h(z)$ zu $F(z)$ gelangen, zweitens von $F(z)$ zu $h(z)$.

Wenn wir von $h(z)$ ausgehen, haben wir die Voraussetzung (5. 3) zur Verfügung und unser Zielpunkt ist das konjugierte Diagramm von $F(z)$.

Wenn wir von $F(z)$ ausgehen, haben wir eine Voraussetzung über das konjugierte Diagramm zur Verfügung, nämlich, daß es in $\mathfrak{B}_\varrho$ liegt, und unser Zielpunkt ist (5. 3). Kurzum, wir haben folgendes zu beweisen:

Satz III. *Es sei $\lambda \neq 0, -1, -2, -3, \cdots$. Notwendig und hinreichend dafür, daß $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus sei, dessen konjugiertes Diagramm in $\mathfrak{B}_\varrho$ liegt, ist, daß $F(z)$ durch die in der ganzen Ebene konvergente Reihe* (6. 2) *darstellbar sei, mit Koeffzienten c_k, welche der Bedingung* (5. 3) *genügen.*

Wenn der Satz III schon bewiesen sein wird, kann die formale Rechnung unter (6. 1) so gerechtfertigt werden: Wenn c_k durch $|c_k|$ ersetzt wird, wird an (5. 3) nichts geändert. Ersetzen wir c_k durch $|c_k|$ und λ durch $|\lambda|$; dann ergibt sich aus (6. 2) anstatt $F(z)$ eine ganze Funktion $F^*(z)$, deren konjugiertes Diagramm ebenfalls in $\mathfrak{B}_\varrho$ liegt. Daher gilt (4. 1) auch mit $F^*(z)$ statt mit $F(z)$. Folglich ist insbesondere für beliebiges $\varepsilon > 0$ und für genügend großes positives ganzzahliges n

$$(6.\,3) \qquad F^*(n) < e^{n[-\log(1-\varrho)+\varepsilon]}.$$

Ersetzen wir in (6. 1) c_k, λ, z durch $|c_k|$, $|\lambda|$, $|z|$ und somit $F(n)$ durch $F^*(n)$, so handelt es sich um die Umordnung einer Doppelreihe mit lauter positiven Gliedern, die gestattet ist, sobald das Endresultat, die letzte Zeile von (6. 1), mit $F^*(n)$ und $|\lambda|$ anstatt $F(n)$ und λ, konvergiert: Das ist aber wegen (6. 3) für $|z| < 1 - \varrho$ der Fall, und die Anwendung des *Weierstraß*'schen Doppelreihensatzes beendigt die Überlegung.

Satz III ist, allerdings in ziemlich verschiedener Formulierung, schon von *Carlson*[7]) aufgestellt worden. Ich gebe im folgenden einen völlig neuen Beweis, der auf Grund der in Nr. 3 zusammengestellten Tatsachen ohne irgendwelche mühsamen Abschätzungen, bloß durch Aufstellung geeigneter Formeln, zum Ziele gelangt. Die Natur der aufzustellenden Formeln läßt sich voraussehen: Wie die Formeln (5. 2), (6. 2), (3. 3) lehren, ist die Funktion $h(z)$ mit der Zahlenfolge $c_0, c_1, c_2, \cdots$, diese Zahlenfolge mit der ganzen Funktion $F(z)$, und $F(z)$ mit der Funktion $f(z)$ *linear verbunden.* Durch passende Elimination drückt man zunächst $f(z)$ durch $h(z)$, dann $h(z)$ durch $f(z)$ linear aus, und erschließt Satz III aus dem Aufbau der erhaltenen Ausdrücke.

7. Gegeben ist die Funktion $h(z)$, durch ihre Entwicklung (5. 2), und wir gehen aus von (5. 3) als Voraussetzung. Wir wollen zunächst $F(z)$, dann $f(z)$ konstruieren, und zu einer Aussage über das konjugierte Diagramm gelangen.

Die Voraussetzung (5. 3) besagt, daß die Reihe

$$(7.\,1) \qquad h(1-w) = \frac{c_0}{w} + \frac{c_1}{w^2} + \cdots + \frac{c_k}{w^{k+1}} + \cdots,$$

welche wir hier statt (5. 2) betrachten wollen, für $|w| > \varrho$ konvergiert. Aus der Produktdarstellung der Gammafunktion (oder, weniger elementar, auch aus der Stirling'schen Formel) folgt, daß für $k \to \infty$

[7]) *Carlson* (4), S. 60.

$$\Gamma(k+\lambda) \sim k!\, k^{\lambda-1},$$

$$\sqrt[k]{\frac{k!}{\Gamma(k+\lambda)}} \to 1.$$

Daher hat die Reihe

$$h^*(1-w) = \frac{c_0}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{w} + \cdots + \frac{k!\,c_k}{\Gamma(k+\lambda)} \frac{1}{w^{k+1}} + \cdots$$

denselben Konvergenzkreis, wie (7. 1), ist also für $|w| > \varrho$ konvergent[8]). Es sei $\varrho < \varrho + \varepsilon < 1$; dann ist, die Integration entlang des Kreises $|w| = \varrho + \varepsilon$ im positiven Sinne erstreckt

(7. 2) $$\frac{1}{2\pi i}\oint h^*(1-w)\,(1-w)^{-z-\lambda}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k!\,c_k}{\Gamma(k+\lambda)} \frac{1}{w^{k+1}} \frac{(z+\lambda)(z+\lambda+1)\cdots(z+\lambda+l-1)}{l!}\, w^l\,dw$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(k+\lambda)} (z+\lambda)(z+\lambda+1)\cdots(z+\lambda+k-1).$$

Zur Rechtfertigung der vollzogenen gliedweisen Integration genügt es, zu bemerken, daß die Doppelreihe auf der Integrationslinie $|w| = \varrho + \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergiert, ebenso wie die beiden Reihen, deren Produkt sie ist. Der zweite dieser Faktoren, die Reihenentwicklung von $(1-w)^{-z-\lambda}$, stellt den Hauptzweig dar, d. h.

$$e^{-(z+\lambda)\log(1-w)}$$

mit derjenigen Bestimmung von $\log(1-w)$, die für $w = 0$ verschwindet.

Die Reihe in der letzten Zeile von (7. 2) ist, wie aus der Rechnung hervorgeht, für alle Werte von z konvergent; sie ist, in Übereinstimmung mit (6. 2), als die Definition von $F(z)$ anzusehen; $F(z)$ ist somit eine ganze Funktion. $F(z)$ ist sogar vom Exponentialtypus, da aus

[8]) Mit Hinsicht auf anschließende, später (in Nr. 14, unter b) zu erläuternde Fragen ist wesentlich zu bemerken, daß $h(1-w)$ und $h^*(1-w)$ *dieselben singulären Punkte* haben, mindestens bei Fortsetzung entlang von Halbstrahlen, die von $w = \infty$ gegen $w = 0$ laufen; dies ergibt sich durch zweimalige Anwendung des bekannten *Hadamard*'schen Satzes über die Multiplikation der Singularitäten.

$$(7.3) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint h^*(1-w)\,(1-w)^{-z-\lambda} dw$$

leicht die Abschätzung

$$|F(z)| < A\, e^{\left(-\log(1-\varrho-\varepsilon)+\frac{\pi}{2}\right)|z|}$$

mit einer passenden positiven Konstanten A folgt.

Wir erhalten aus (3. 3) und (7. 3)

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \oint h^*(1-w)\,(1-w)^{-t-\lambda} dw \cdot e^{-tz} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint h^*(1-w)\,(1-w)^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-t[z+\log(1-w)]} dt \cdot dw\,,$$

$$(7.4) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h^*(1-w)\,(1-w)^{-\lambda}}{z - \log\frac{1}{1-w}} dw\,.$$

Die Rechnung gilt, und insbesondere ist die Änderung der Reihenfolge der Integrationen wegen absoluter Konvergenz erlaubt, wenn

$$(7.5) \qquad \Re z > \log \frac{1}{1-\varrho-\varepsilon}$$

ist; in der Halbebene (7. 5) ist $f(z)$ sicher regulär. Die Formel (7. 4) zeigt, daß $f(z)$ noch weiter regulär bleibt, nämlich solange z sich außerhalb der Kurve bewegt, welche $-\log(1-w)$ beschreibt, wenn w den Integrationskreis $|w| = \varrho + \varepsilon$ durchläuft. Somit bleibt $f(z)$ regulär außerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}$: da ε beliebig klein ist, haben wir die eine Hälfte des Satzes III bewiesen. (Auch daß $f(z)$ eine Reihenentwicklung von der Form (3. 2) besitzt, kann man leicht der Formel (7. 4) entnehmen.)

8. Nun haben wir einen Weg zu finden, der dem in der vorangehenden Nr. 7 befolgten entgegengesetzt läuft.

Gegeben ist nun die Funktion $f(z)$, durch ihren Zusammenhang mit der ganzen Funktion vom Exponentialtypus $F(z)$, und wir gehen aus von der Voraussetzung, daß $f(z)$ außerhalb $\mathfrak{B}_\varrho$ regulär ist. Wir wollen zunächst die Koeffizienten c_k, dann $h(z)$ konstruieren und zu der Aussage (5. 3) gelangen.

Von den beiden, zwischen $f(z)$ und $F(t)$ vermittelnden Formeln (3. 3) und (3. 4) benützen wir jetzt, nicht wie vorher die erste, sondern die zweite; sie kann entlang des Randes vom Bereich $\mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}$, der $\mathfrak{B}_\varrho$ umschließt, erstreckt werden; es gilt somit auf der Integrationslinie von (3. 4)

$$|1 - e^{-z}| = \varrho + \varepsilon < 1. \tag{8. 1}$$

Unter der Bedingung (8. 1) gilt auch

$$\begin{aligned} e^{zt} &= e^{-z\lambda} e^{z(t+\lambda)} = e^{-z\lambda} (e^{-z})^{-(t+\lambda)} \\ &= e^{-z\lambda} [1 - (1 - e^{-z})]^{-(t+\lambda)} \\ &= e^{-z\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+\lambda)(t+\lambda+1)\cdots(t+\lambda+k-1)}{k!} (1-e^{-z})^k \end{aligned}$$

und zwar absolut und gleichmäßig in z. Somit ergibt Einsetzen in (3. 4) und gliedweise Integration

(8. 2)
$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+\lambda)(t+\lambda+1)\cdots(t+\lambda+k-1)}{\Gamma(k+\lambda)} \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\, 2\pi i} \oint f(z) e^{-z\lambda} (1-e^{-z})^k dz$$

für alle Werte von t. Diese Formel definiert die c_k. In der Tat, soll die Formel (6. 2) für alle Werte von z bestehen, dann kann man darin $z = -\lambda, -\lambda-1, \cdots -\lambda-k$ setzen, und die Koeffizienten

$$c_0, c_1, c_2, \cdots \quad c_k$$

rekursive durch

$$F(-\lambda),\ F(-\lambda-1),\ F(-\lambda-2), \cdots\ F(-\lambda-k)$$

ausdrücken. Daher ergeben (6. 2) und (8. 2)

$$c_k = \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\, 2\pi i} \oint f(z)\, e^{-\lambda z} (1-e^{-z})^k dz. \tag{8. 3}$$

Wird c_k aus (8. 3) in (7. 1) eingesetzt, so erhalten wir, falls nur $|w| > \varrho + \varepsilon$,

$$h(1-w) = \frac{1}{2\pi i w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!} \oint f(z) e^{-\lambda z} \left(\frac{1-e^{-z}}{w}\right)^k dz,$$

$$h(1-w) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi i w} \oint f(z) e^{-\lambda z} \left(1 - \frac{1-e^{-z}}{w}\right)^{-\lambda} dz. \tag{8. 4}$$

Vergessen wir nicht, daß entlang der Integrationslinie in (8. 4), wie in (8. 3) und (8. 2), die Gleichung (8. 1) gilt. Somit bleibt $h(1-w)$ für $|w| > \varrho + \varepsilon$, und, da ε beliebig klein, für $|w| > \varrho$ regulär. Für die Entwicklung (7. 1) gilt somit (5. 3) und so ist auch die zweite noch ausstehende Hälfte von Satz III bewiesen.

9. Die letzte, bisher noch unbewiesene Behauptung des Satzes I besagt im wesentlichen dies: *Wenn die Indikatordiagramme der ganzen Funktionen $F_1(z), F_2(z), \cdots F_p(z)$ in $\mathfrak{B}_\varrho$ enthalten sind, und die durch* (1. 2) *gegebene Funktion $H(z)$ für $z = 0, 1, 2, 3, \cdots$ verschwindet, so verschwindet jede der Funktionen $F_1(z), F_2(z), \cdots F_p(z)$ identisch.*

Dies folgt aber leicht aus einem wohlbekannten, für ähnliche Zwecke oft angewendeten Satz von *Carlson*[9]), der dies besagt: *Eine Funktion $H(z)$, die für $z = 0, 1, 2, \cdots$ verschwindet, in der Halbebene $\Re z \geqq 0$ vom Exponentialtypus ist*[10]), *und deren Indikator der Bedingung*

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi \tag{9. 1}$$

genügt, verschwindet identisch.

Die Funktion $H(z)$, auf welche sich die eingangs dieser Nr. 9 ausgesprochene Behauptung bezieht, erfüllt aber diese Bedingungen. Der Quotient

$$\frac{\Gamma(z+\lambda)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{z+n+\lambda}, \tag{9. 2}$$

(wobei λ reell, $0 < \lambda < 1$) bleibt nämlich, wie es z. B. aus der angeschriebenen Partialbruchzerlegung ersichtlich ist, in der Halbebene $\Re z \geqq 0$ beschränkt; es ist $l/p = \lambda$ gesetzt. Die Funktionen $F_l(z)$ sind vom Exponentialtypus; da das Indikatordiagramm von $F_l(z)$ in $\mathfrak{B}_\varrho$ enthalten und die Breite von $\mathfrak{B}_\varrho$ senkrecht zur reellen Achse kleiner als π ist, gilt für die hier betrachtete Funktion (1. 2) nicht bloß (9. 1), sondern es könnte sogar das 2π an der rechten Seite durch π ersetzt werden. Somit folgt aus $H(0) = H(1) = H(2) = \cdots = 0$, daß identisch $H(z) = 0$.

Es darf also $H(z)$ keine Pole haben. Durch die Betrachtung der Pole von $\Gamma(z + l/p)$ folgt für $l = 1, 2, \cdots p-1$, daß

$$F_l\left(-\frac{l}{p}\right) = F_l\left(-\frac{l}{p}-1\right) = \cdots = F_l\left(-\frac{l}{p}-n\right) = \cdots = 0.$$

[9]) *Carlson* (3), S. 58. Vgl. ferner (6), S. 607.

[10]) Vgl. Fußnote [4]).

Die Anwendung des *Carlson*'schen Satzes auf $F_l(-l/p-z)$ (hier würde auch ein schwächerer Satz genügen) ergibt, daß $F_l(z)$ identisch verschwindet, für $l = 1, 2, \cdots p-1$. Mit $H(z), F_1(z), \cdots F_{p-1}(z)$ muß schließlich auch $F_p(z)$ verschwinden, womit Satz I restlos bewiesen ist.

Anschließende Fragestellungen

10. Für $p \to \infty$ geht die *Riemann*'sche Fläche von $\sqrt[p]{1-z}$ in die von $\log(1-z)$ über; es schließt sich der hier durch Satz I gelösten Frage die weitere an: *Welchen Bedingungen müssen die Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung (um den Punkt* $z = 0$*) genügen, damit die dargestellte Funktion auf der Riemann'schen Fläche von* $\log(1-z)$ *eindeutig und regulär sei?*

Eine Funktion der erwähnten Art hat die Gestalt

$$F\left(\log\frac{1}{1-z}\right), \tag{10. 1}$$

wobei $F(w)$ eine ganze Funktion von w ist. Einen Teil der gestellten Frage beantwortet der folgende

Satz IV: *Die Potenzreihe* (1. 1) *stelle eine Funktion von der Gestalt* (10. 1) *dar, wobei* $F(w)$ *eine ganze Funktion von* w *bedeutet, deren Anwachsen den Mitteltypus der Ordnung 1 nicht übertrifft.*

Die Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ *kann dann und nur dann die Koeffizientenfolge einer so beschaffenen Potenzreihe sein, wenn, abgesehen vielleicht von endlich vielen Werten von* n,

$$a_n = H(n)$$

ist, wobei die Funktion $H(z)$ *die folgende Gestalt hat:*

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l\, \Gamma^{(l)}(z)}{l\,!}\,; \tag{10. 2}$$

die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots$ *ist nur der einen Bedingung unterworfen, daß*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = R \tag{10. 3}$$

endlich ist.

Die Funktion $H(z)$, wie auch die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots$ sind durch $a_0, a_1, a_2, \cdots$ eindeutig bestimmt. Jedoch $H(z)$ bestimmt die Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ nicht völlig eindeutig, sondern müssen zwei Zahlenfolgen $a_0, a_1, a_2, \cdots$, die zu demselben $H(z)$ gehören, erst von einem bestimmten Index angefangen miteinander übereinstimmen.

Es sind hier einige Bemerkungen über die Gestalt (10. 2) von $H(z)$ angebracht.

a) Man beschreibe um jeden Pol von $\Gamma(z)$, d. h. um jeden der Punkte $z = 0, -1, -2, \cdots$ einen Kreis vom Radius R. Diejenigen Punkte der Ebene, die der Vereinigungsmenge der so entstandenen, als abgeschlossen aufgefaßten Kreisscheiben nicht angehören, bilden ein offenes zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$. Irgend ein Punkt z von $\mathfrak{G}$ hat von jedem Pol von $\Gamma(z)$ einen Abstand, der größer ist als R. Wenn also z zu $\mathfrak{G}$ gehört, konvergiert für ein passend klein gewähltes positives ε die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(R+\varepsilon)^l \Gamma^{(l)}(z)}{l\,!}$$

absolut, und somit konvergiert, wegen (10. 3), auch die Reihe (10. 2). Es ist leicht zu sehen, daß (10. 2) in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert und somit eine in $\mathfrak{G}$ reguläre und eindeutige Funktion definiert.

Außerhalb $\mathfrak{G}$ braucht $H(z)$ überhaupt nicht zu existieren[11]). Nur wenn der Punkt $z = n$ in $\mathfrak{G}$ gelegen ist (was ja für alle ganzen n mit höchstens endlich vielen Ausnahmen zutrifft), hat die Gleichung $a_n = H(n)$ einen Sinn.

Man beachte hierzu, daß das Weglassen eines Einzelgliedes der Reihendarstellung der Funktion (10. 1) die Subtraktion einer ganzen Funktion vom *Mitteltypus der Ordnung 1* von $F(w)$ bedeutet. In der Tat, wird $-\log(1-z) = w$ gesetzt, so ist

$$a_m z^m = a_m (1 - e^{-w})^m.$$

b) Die Formel (10. 2) ist ein Grenzfall der Formel (1. 2), wenn in der letzteren p unendlich wird und $F_1(z), \cdots F_p(z)$ Polynome bedeuten, deren Koeffizienten sich mit wachsendem p passend ändern, deren Grade jedoch unter einer von p unabhängigen Schranke bleiben.

[11]) Um dies mit Beispielen zu belegen, vgl. (6), S. 604, den Satz der Nr. 42 (in der letzten Zeile lies $\Psi^*(z)$ statt $\Psi(z)$). Für die vorangehende Überlegung vgl. daselbst S. 598—604.

Dies sieht man in zwei Schritten ein. Erstens kann man, wenn $F_l(z)$ ein Polynom von höchstens m-ten Grade ist,

$$\Gamma\left(z+\frac{l}{p}\right)F_l(z)=\sum_{\mu=0}^{m} B_\mu \Gamma\left(z+\frac{l}{p}+\mu\right)$$

setzen, mit passenden Konstanten $B_0, B_1, \cdots B_m$. Zweitens ist, wenn C irgend eine Konstante bedeutet,

$$\Gamma(z+C)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C^l\Gamma^{(l)}(z)}{l\,!},$$

und eine lineare Kombination solcher Reihen hat stets die Gestalt der Reihe in Formel (10. 2).

c) Wird

$$A_0+\frac{A_1 z}{1\,!}+\cdots+\frac{A_l z^l}{l\,!}+\cdots=G(z) \tag{10. 4}$$

gesetzt, so ist, wegen (10. 3), $G(z)$ eine ganze Funktion höchstens vom Mitteltypus der Ordnung 1 (vom Exponentialtypus, vgl. Nr. 3), wie die vorgelegte ganze Funktion $F(z)$ selber, und es ist

$$\Gamma(z+1)H(z)=\int_0^\infty G(\log t)\,t^{z-1}e^{-t}dt\,; \tag{10. 5}$$

diese Formel gilt sicherlich, wie leicht zu sehen, in der Halbebene $\mathfrak{R}z>R$.

Der Beweis von Satz IV soll nun in drei Schritten, aber mit weniger Einzelheiten als der des Satzes I, dargelegt werden.

11. Gegeben ist die ganze Funktion $F(z)$, und wir gehen aus von der Voraussetzung, daß $F(z)$ vom Exponentialtypus ist (vgl. Nr. 3).

Dieser Voraussetzung gemäß stellen wir $F(z)$ mittels Formel (3. 4) dar, und wir erhalten, wenn wir unter $\log(1-z)$ den Hauptzweig verstehen,

$$\begin{aligned} F\left(\log\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\oint f(u)\,e^{-u\log(1-z)}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint f(u)\,(1-z)^{-u}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint f(u)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n\,!}z^n du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!}\frac{1}{2\pi i}\oint f(u)\,\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}H(n)\,z^n. \end{aligned} \tag{11. 1}$$

Wir setzten dabei

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{\Gamma(u)} \Gamma(u+z)\,du. \tag{11. 2}$$

Diese Formel hat nicht für alle Werte von z einen Sinn und sie stellt nicht notwendigerweise für alle Werte von z, für welche sie einen Sinn hat, dieselbe analytische Funktion von z dar. Wenn aber z von der negativen reellen Achse (von den Polen der Gammafunktion) genügend weit entfernt ist, kann $\Gamma(z+u)$ nach Potenzen von u in eine entlang der ganzen Integrationslinie von (11. 1) gleichmäßig konvergente Reihe entwickelt werden, und wir erhalten in einem Gebiet der z-Ebene, das den Charakter von den in Nr. 10 unter a) erwähnten Gebiet $\mathfrak{G}$ hat,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1)\,H(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{\Gamma(u)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma^{(l)}(z)\,u^l}{l\,!}\,du \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l \Gamma^{(l)}(z)}{l\,!} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (10. 2). Es wurde

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(u)\,u^l\,du}{\Gamma(u)} = A_l \tag{11. 3}$$

gesetzt, für $l = 0, 1, 2, \cdots$. Wenn die Integrationslinie von (11. 3) der Kreis $|z| = P$ ist, gilt offenbar bei passender Wahl von M

$$|A_l| < MP^l \text{ für } l = 0, 1, 2, \cdots.$$

Hiemit ist (10. 3) erreicht und eine Behauptung des Satzes IV bewiesen.

12. Gegeben ist nun die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots$ und wir gehen aus von der Voraussetzung (10. 3). Wir haben $F(z)$ zu konstruieren, oder, was wegen (3. 1) auf dasselbe hinauskommt, die Reihe (3. 2) für $f(z)$.

Infolge der Voraussetzung (10. 3) besitzt die Reihe $\Sigma A_l z^{-l-1}$ ein Kreisäußeres als Konvergenzgebiet. Im Innern dieses Konvergenzgebietes liege der Punkt $z = -m$, wobei m eine (genügend große) natürliche ganze Zahl sei. Die Funktion $\Gamma(z)\Sigma A_l z^{-l-1}$ ist im Kreisring

$$m < |z| < m + 1$$

regulär und eindeutig; wir schreiben ihre Laurent'sche Entwicklung in der Form

$$\Gamma(z) \sum \frac{A_l}{z^{l+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + f(z).$$

$f(z)$ ist somit wie in Formel (3. 2) dargestellt und diese Darstellung konvergiert sicherlich für $|z| > m$. Es folgt

$$\frac{f(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{z^{l+1}} - \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ;$$

das zweite Glied auf der rechten Seite ist sicherlich regulär für $|z| < m + 1$ und folglich gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\, z^l\, dz}{\Gamma(z)} = A_l \text{ für } l = 0, 1, 2, \cdots ;$$

die Integration ist entlang des Kreises $|z| = m + \frac{1}{2}$ erstreckt. Somit haben wir die Formel (11. 3) der vorangehenden Nr. erreicht und von diesem Punkte aus haben wir den dort eingeschlagenen Weg einfach rückwärts zu verfolgen: Die Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \cdots$ definiert jetzt die Funktion $H(z)$; die Reihe $\Sigma H(n) z^n$ wird zuerst angesetzt und sie wird dann hinterher, mit Hilfe der von unten nach oben durchzunehmenden Rechnung (11. 1), als die Entwicklung von $F(-\log(1-z))$ erkannt.

13. Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit der Zuordnung zwischen der Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ und der Funktion $H(z)$ zu untersuchen. Es soll hier eine Skizze genügen. Wir haben eine Folgerung aus dem Umstande zu ziehen, daß $H(n) = 0$ für alle ganzen Zahlen n von einer gewissen an. Wir verifizieren die Erfüllung der Bedingungen des in Nr. 9 zitierten *Carlson*'schen Satzes für $H(m + z)$, wo m eine genügend große Zahl ist, was mit Hilfe der Darstellung (11. 2) ohne Schwierigkeit geht, und die Folgerung lautet: $H(z)$ verschwindet identisch.

Wenn aber die Voraussetzung (10. 3) erfüllt und auch die Gleichung

$$A_0 \Gamma(z) + \frac{A_1 \Gamma'(z)}{1!} + \cdots + \frac{A_l \Gamma^{(l)}(z)}{l!} + \cdots = 0 \tag{13. 1}$$

identisch in z erfüllt ist, müssen alle Konstanten $A_0, A_1, A_2, \cdots$ verschwinden: Denn (13. 1) bedeutet das identische Verschwinden der rechten Seite von (10. 5), woraus, etwa mit Hilfe der *Mellin*'schen Umkehrformel, das identische Verschwinden der Funktion $G(\log t)$, also, vgl. (10. 4), das Verschwinden der Koeffizienten A_l folgt.

Wir haben somit gefunden, daß die Funktion $\Gamma(z)$, die bekanntlich keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, auch *keiner linearen homogenen Differentialgleichung unendlicher Ordnung von der Gestalt* (13. 1), *mit der Nebenbedingung* (10. 3), *genügt* (natürlich ausgenommen den Fall, wenn alle A_l verschwinden).

14. Zum Schluß einige Bemerkungen, die nicht ins einzelne ausgeführt werden sollen.

a) Man betrachte die Funktion (1. 2) unter der Voraussetzung der Nr. 1, daß die ganzen Funktionen $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots F_p(z)$ den Minimaltypus der Ordnung 1 nicht übersteigen. Dann ist $H(z)$, wie leicht zu sehen, vom Minimaltypus der Ordnung 1 in dem Winkelraum

$$(14.\ 1) \qquad -\pi + \varepsilon < \operatorname{arc} z < \pi - \varepsilon$$

bei jedem $\varepsilon > 0$. Dasselbe Resultat findet man auch für die Funktion (10. 2), nur muß man eine passende endliche Umgebung des Nullpunktes vom Winkelraume ausschließen. Hieraus folgt[12]), daß die Anzahl der verschwindenden unter den n Zahlen $H(1)$, $H(2)$, $\cdots H(n)$ von kleinerer Ordnung ist, als n. Mit Rücksicht auf die Sätze I und IV gelangt man so zu der folgenden, zwar nicht unerwarteten [13]), aber wohl neuen Tatsache:

Die Potenzreihe (1. 1) *soll eine Funktion darstellen, welche eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

Entweder ist die Funktion auf der Riemann'schen Fläche von $\sqrt[p]{1-z}$ *mit Ausnahme des Windungspunktes* $z = 1$ *regulär und eindeutig, und verschwindet im Windungspunkte* $z = \infty$.

Oder es ist die Funktion von der Gestalt (10. 1), *wobei* $F(w)$ *eine ganze Funktion von* w, *höchstens vom Mitteltypus der Ordnung 1 bedeutet.*

In beiden Fällen kann man behaupten, daß die Dichte der nichtverschwindenden Koeffizienten der Potenzreihe 1 ist.

---

[12]) Vgl. Miss *Cartwright* (5), S. 166, Theorem II.

[13]) Vgl. (7), insbesondere Satz X.

b) Der ganze Beweis von Satz I, insbesondere aber die beiden, zueinander reziproken Formeln (7. 4) und (8. 4), erlauben die durch Satz I gelöste Frage mit Leichtigkeit in einer gewissen Richtung zu verallgemeinern: Anstatt, wie hier geschehen, eine kreisförmige, soll eine beliebig gestaltete Umgebung des Punktes $z = 1$ aus allen Blättern der *Riemann*'schen Fläche von $\sqrt[p]{z-1}$ ausgeschnitten werden, und es sollen, ähnlich wie hier, die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer auf der verbleibenden Fläche eindeutigen und regulären Funktion charakterisiert werden.

c) Es soll wie in Nr. 1, das Anwachsen der ganzen Funktionen $F_1(z), \cdots F_p(z)$ den Minimaltypus der Ordnung 1 nicht übertreffen. Wenn man die Funktion (1. 2) durch

$$H^*(z) = z^{\frac{1}{p}-1} F_1(z) + z^{\frac{2}{p}-1} F_2(z) + \cdots + z^{\frac{p}{p}-1} F_p(z) \tag{14. 2}$$

ersetzt, so wird das asymptotische Verhalten für großes positives z nur wenig abgeändert, jedoch kann, wie es aus Satz I in Verbindung mit dem in Nr. 9 zitierten *Carlson*'schen Satz leicht folgt, die durch die Potenzreihe

$$H^*(1)z + H^*(2)z^2 + \cdots + H^*(n)z^n + \cdots \tag{14. 3}$$

definierte Funktion nicht auf der, in $z = 1$ punktierten, *Riemann*'schen Fläche von $\sqrt[p]{z-1}$ regulär und eindeutig sein, ausgenommen den Fall $p = 1$ und den (nicht wesentlich verschiedenen), in welchem $F_1(z)$, $F_2(z), \cdots F_{p-1}(z)$ identisch verschwinden: Denn sonst ist ja $H^*(z)$ keine meromorphe Funktion, sondern eine mehrdeutige.

Mit Benutzung der Untersuchungen von *Braitzew* und *Subbotin*[14]) kann man jedoch eine *Riemann*'sche Fläche angeben, auf welcher die durch (14. 3) definierte Funktion eindeutig bleibt: Sie hat nur Verzweigungspunkte, die über den drei Punkten $z = 0, 1, \infty$ liegen, und zwar sind die über $z = 1$ gelegenen Verzweigungspunkte algebraisch von $(p - 1)$-ter Ordnung, die über $z = 0$ und $z = \infty$ gelegenen Verzweigungspunkte sind hingegen unendlicher Ordnung; in solchen Punkten der *Riemann*'schen Fläche, die über keinem der drei Punkte liegen, bleibt die durch (14. 3) definierte Funktion regulär. Durch welche Eigenschaften die Entwicklungskoeffizienten einer Potenzreihe ausgezeichnet sind, die eine analytische Funktion mit den eben beschriebenen Fortsetzbarkeits- und Regularitätseigenschaften definiert, ist noch nicht bekannt.

[14]) Vgl. (2), (9).

(Eingegangen den 4. Dezember 1934.)

Literaturverzeichnis

V. Bernstein:

(1) Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet (Paris, Gauthier-Villars, 1933).

I. R. Braitzew:

(2) Über die Singularitäten der durch eine Dirichlet'sche Reihe bestimmten analytischen Funktion (Mathematische Annalen, Bd. CIX), (1933), S. 83—94.

F. Carlson:

(3) Sur une classe de séries de Taylor. Thèse, Upsala, 1914.

(4) Sur les séries de coefficients binomiaux, Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis, ser. 4, vol. IV (1915), No. 3, pp. 1—61.

Mary L. Cartwright:

(5) On functions which are regular and of finit order in an angle, Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, vol. XXXVIII (1934), pp. 158—179.

G. Pólya:

(6) Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift, Bd. XXIX (1929), S. 549—640.

(7) Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (zweite Mitteilung), Annals of Mathematics, ser. 2, vol. XXXIV (1933), pp. 731—777.

G. Pólya und *G. Szegö:*

(8) Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, II (Berlin, J. Springer, 1925).

M. Th. Subbotin:

(9) Sur les propriétés-limites du module des fonctions entières d'ordre fini, Mathematische Annalen, Bd. CIV (1931), S. 377—386.

S. Wigert:

(10) Sur les fonctions entières, Oefversigt af K. Vetenskapsakademiens Förhandlingar, vol. LVII (1900), pp. 1001—1011.