# Sur les systèmes de quadruples.

# Sur les systèmes de quadruples

Par S. Bays et E. de Weck, Fribourg

Jusqu'ici à notre connaissance rien n'a été fait concernant *l'existence* des systèmes de quadruples analogues aux systèmes de triples de Steiner. Dans ce travail nous amorçons l'étude de ce problème difficile. Nous donnons trois méthodes de construction des systèmes de quadruples. Elles suffiraient à assurer l'existence d'un système de quadruples pour chaque $N$ des formes nécessaires, si elles étaient établies sous leur forme générale. Malheureusement cela n'est fait que pour la première d'entre elles; elle intervient d'ailleurs dans la moitié des cas et elle est exceptionnellement simple.

Ces constructions font l'objet de la seconde partie du travail. Dans la troisième partie nous donnons les systèmes de quadruples qu'elles fournissent pour les toute premières valeurs de $N$, $N = 4, 8, 10$ et $14$ éléments et les groupes de substitutions qui appartiennent à ces systèmes. La première partie contient les définitions et les propriétés nécessaires pour la suite.

## I. Définitions et propriétés

**1.** Le problème des quadruples, extension du problème des triples de Steiner, est le suivant:

*Pour quel nombre d'éléments $N$ peut-on trouver un système de quadruples (combinaisons 4 à 4 de ces éléments) tel que chaque triple entre une fois et une seule fois dans un quadruple?*

D'une façon générale, le problème des $n$-uples est le suivant:

*Pour quel nombre d'éléments $N$ peut-on trouver un système de $n$-uples (combinaisons $n$ à $n$ de ces éléments) tel que chaque $(n-1)$-uple entre une fois et une seule fois dans un $n$-uple?*

Nous désignerons par $\Delta_N^n$ un tel système de $n$-uples de $N$ éléments.

Le nombre des $(n-1)$-uples de $N$ éléments est:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \quad \cdots \quad (n-1)}$$

Chaque $n$-uple contient $n$ $(n-1)$-uples. Le nombre des $n$-uples d'un $\Delta_N^n$ est donc:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \quad \cdots \quad (n-1)n}$$

Ainsi le nombre des couples d'un $\Delta_N^2$ est:

$$\frac{N}{2} \tag{1}$$

Il faut en effet $\frac{N}{2}$ couples pour contenir une fois et une seule fois chacun des $N$ éléments.

Le nombre des triples d'un $\Delta_N^3$ est:

$$\frac{N(N-1)}{2 \cdot 3} \tag{2}$$

Le nombre des quadruples d'un $\Delta_N^4$ est:

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \tag{3}$$

Pour l'existence d'un système de couples, il *faut* donc d'après (1) que $N$ soit pair; d'autre part il est évident que cette condition est *suffisante.*

Pour l'existence d'un système de triples, il *faut* que l'expression (2) soit un nombre entier; pour celle d'un système de quadruples, il *faut* que l'expression (3) soit un nombre entier. Mais ces conditions ne sont pas les seules nécessaires pour $N$.

**2.** Prenons dans un $\Delta_N^n$ tous les $n$-uples qui contiennent un élément fixé $a$. *Les* $(n-1)$*-uples associés à cet élément* $a$*, dans ces* $n$*-uples forment un système de* $(n-1)$*-uples,* un $\Delta_{N-1}^{n-1}$.

La raison en est simple. Soit $A$ l'ensemble de ces $n$-uples contenant l'élément $a$ dans $\Delta_N^n$. Chaque $(n-1)$-uple $abc \cdots h, b, c, \cdots, h$ parcourant toutes les combinaisons $n-2$ à $n-2$ des $N-1$ éléments autres que $a$, se trouve une fois et une seule fois dans $A$. Donc chaque $(n-2)$-uple $bc \cdots h$ se trouve une fois et une seule fois dans les $(n-1)$-uples qui restent après suppression de l'élément $a$, c. q. f. d.

Pour l'existence d'un système de triples $\Delta_N^3$, puisque les couples qui y sont associés à un élément fixé $a$ forment un système de couples $\Delta_{N-1}^2$, il *faut* donc l'intégrité des deux quotients:

$$\frac{N(N-1)}{2 \cdot 3} \text{ et } \frac{N-1}{2.} \tag{4}$$

Il en résulte immédiatement que les formes *nécessaires* pour $N$ sont $6x+1$ ou $6x+3$. D'autre part on sait que ces deux formes sont également *suffisantes.*

Pour l'existence d'un système de quadruples $\Delta_N^4$, puisque les triples qui y sont associés à un élément fixé $a$ forment un $\Delta_{N-1}^3$, et que les couples qui sont associés dans ce $\Delta_{N-1}^3$ à un autre élément fixé $b$ forment un $\Delta_{N-2}^2$, il *faut* l'intégrité des trois quotients:

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}, \quad \frac{N-2}{2}.$$

L'intégrité des deux derniers exige d'après (4) que $N-1$ soit des formes $6x+1$ ou $6x+3$, donc que $N$ soit des formes $6x+2$ ou $6x+4$. D'autre part pour ces deux formes le premier quotient est entier.

Les formes *nécessaires* pour $N$ pour l'existence d'un système de quadruples sont donc $6x \pm 2$. Nous verrons que pour les toute premières valeurs de $N$ au moins, ces formes sont également *suffisantes.*

**3.** Nous appellerons deux systèmes $\Delta_N^n$ *équivalents* ou *distincts,* lorsqu'il existe une substitution (on dit aussi permutation) des $N$ éléments permettant de déduire l'un des systèmes de l'autre. Nous les appellerons *différents* dans le cas contraire.

L'ensemble des substitutions des $N$ éléments qui changent un $\Delta_N^n$ en lui-même, ou autrement dit, qui le laissent invariant, constitue un groupe. Il est dit le groupe qui *appartient* au système. Ce groupe est *transitif* s'il contient une substitution qui change un élément fixé quelconque en un autre élément fixé quelconque.

Nous désignerons par $\overline{\Delta}{}_{N-1}^{n-1}$ un système de $(n-1)$-uples obtenu en supprimant dans $\Delta_N^n$ un élément fixé $a$. Dans un $\Delta_N^n$ nous pouvons donc obtenir ainsi $N$ systèmes $\overline{\Delta}{}_{N-1}^{n-1}$. Inversement nous désignerons par $\underline{\Delta}{}_N^n$ un système de $n$-uples construit sur un $\Delta_{N-1}^{n-1}$, en ajoutant à ses $(n-1)$-uples un nouvel élément $a$ et en complétant ensuite l'ensemble de $n$-uples ainsi formé par des $n$-uples des $n-1$ éléments primitifs jusqu'à ce que l'on obtienne un système complet de $n$-uples. Il n'est évidemment pas dit, que sur chaque $\Delta_{N-1}^{n-1}$, on puisse ainsi construire un $\underline{\Delta}{}_N^n$, sinon l'existence des systèmes de quadruples serait assurée par celle des systèmes de triples.

Nous avons maintenant à établir les quelques propriétés suivantes qui nous seront utiles pour la suite.

**4.** I. *Si le groupe $H$ qui appartient à $\Delta_N^n$ est transitif, les $\overline{\Delta}{}_{N-1}^{n-1}$ sont équivalents.*

*Preuve*. Soit $A$ et $B$ deux $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ quelconques, $a$ et $b$ les éléments auxquels ils correspondent. Il y a une substitution de $H$ qui change $a$ en $b$, en laissant $\Delta^n_N$ invariant, donc qui change $A$ en $B$.

II. *Si le groupe $H$ qui appartient à $\Delta^n_N$ est transitif, $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ et $\overline{\Delta}'^{n-1}_{N-1}$ sont équivalents dès que $\Delta^n_N$ et $\Delta'^n_N$ sont équivalents.*

*Preuve:* Il y a une substitution $s$ qui change $\Delta^n_N$ en $\Delta'^n_N$ et donc, d'après I, $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ en un système équivalent à $\overline{\Delta}'^{n-1}_{N-1}$.

III. *Si le groupe $H$ qui appartient à $\Delta^n_N$ est transitif, le nombre des formes distinctes de ce système est un multiple du nombre des formes distinctes d'un $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$.*

*Preuve:* Soit $h$ l'ordre de $H$. $H$ étant transitif, on a $h = Nk$, où $k$ est le nombre des substitutions de $H$ qui laissent en place un élément fixé quelconque. D'autre part le nombre $n$ des formes distinctes de $\Delta^n_N$ est $\frac{N!}{h}$.

Soit $H_1$ le groupe qui appartient à l'un des $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$, celui correspondant à l'élément quelconque fixé $a$. Soit $h_1$ l'ordre de $H_1$. Les substitutions de $H$ qui laissent $a$ en place changent $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ en lui-même; elles forment donc un sous-groupe de $H_1$ d'ordre $k$ et on a $h_1 = lk$. D'autre part le nombre $n_1$ des formes distinctes de $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ est $\frac{(N-1)!}{h_1}$.

On a ainsi:

$$n = \frac{N!}{h} = \frac{N!}{Nk} = \frac{(N-1)!}{k} = \frac{l(N-1)!}{h_1} = ln_1 \quad \text{c. q. f. d.}$$

IV. *Si tous les $\underline{\Delta}^n_N$ construits sur un $\Delta^{n-1}_{N-1}$ fixé sont équivalents, les $\underline{\Delta}'^n_N$ construits sur un $\Delta'^{n-1}_{N-1}$ équivalent au premier $\Delta^{n-1}_{N-1}$, sont aussi équivalents entre eux et équivalents aux premiers $\underline{\Delta}^n_N$.*

*Preuve:* Il existe une substitution qui change $\Delta'^{n-1}_{N-1}$ en $\Delta^{n-1}_{N-1}$, qui change donc[1]) chaque $\underline{\Delta}'^n_N$ construit sur $\Delta'^{n-1}_{N-1}$ en un $\underline{\Delta}^n_N$ construit sur $\Delta^{n-1}_{N-1}$. Si l'un de ces $\underline{\Delta}'^n_N$ était différent des autres, les premiers $\underline{\Delta}^n_N$ ne seraient pas tous équivalents.

V. *S'il n'existe pas de $\Delta^{n-1}_{N-1}$ différents, et si tous les $\underline{\Delta}^n_N$ construits sur un $\Delta^{n-1}_{N-1}$ fixé sont équivalents, il n'existe pas de $\Delta^n_N$ différents.*

*Preuve:* Elle résulte sans autre de la propriété précédente.

Cette dernière propriété nous servira à établir que pour $N = 8$ et $N = 10$, il n'existe qu'un seul système de quadruples.

[1]) en laissant en place le nouvel élément $a$.

## II. Constructions

**5.** Nous avons cherché des constructions de systèmes de quadruples. Nous en avons obtenu *trois* qui seraient valables dans les cas suivants:

Construction I: d'un $\Delta_N^4$, on obtient un $\Delta_{2N}^4$;
Construction II: d'un $\Delta_N^4$ et d'un $\Delta_{N-4}^4$, on obtient un $\Delta_{2N-6}^4$;
Construction III: d'un $\Delta_{N-2}^4$, on obtient un $\Delta_{2N-6}^4$.

Dans la construction I, $N$ est naturellement des deux formes $6n - 2$ ou $6n + 2$ (§ 2, dernier alinéa); $2N$ sera respectivement des formes $6n + 2$ et $6n - 2$. Dans la construction II, $N$ et $N - 4$ devant être simultanément des formes $6n \pm 2$, $N$ ne peut être que de la forme $6n + 2$; $2N - 6$ est alors de la forme $6n - 2$. Dans la construction III, $N - 2$ doit être de la forme $6n + 2$ pour que $2N - 6$ soit de l'une des deux formes nécessaires; $2N - 6$ est alors de la forme $6n + 2$.

Si ces trois constructions étaient entièrement établies, la preuve de l'existence d'un système de quadruples serait complète pour chaque $N$ des deux formes $6n \pm 2$. Pour le voir remarquons simplement que dans les deux formes nécessaires $6n \pm 2$ ou $6n + 2$ et $6n + 4$, $n$ peut être pair ou impair.

Pour $n$ impair, $n = 2n' - 1$:

$N = 6n + 2 = 12n' - 4 = 2(6n' - 2) = 2N'$; construction I.

$N = 6n + 4 = 12n' - 2 = 2(6n' + 2) - 6 = 2N'' - 6$
et $N'' - 4 = 6n' - 2$; construction II.

Pour $n$ pair, $n = 2n'$:

$N = 6n + 2 = 12n' + 2 = 2(6n' + 4) - 6 = 2N' - 6$
et $N' - 2 = 6n' + 2$; construction III.

$N = 6n + 4 = 12n' + 4 = 2(6n' + 2) = 2N''$; construction I.

Malheureusement seule la construction I est établie d'une manière générale. Elle est d'ailleurs exceptionnellement simple. Elle fournit immédiatement un système de quadruples pour les cas $N = 8$ et $N = 16$. Par contre les constructions II et III, qui nous ont permis d'obtenir également un système de quadruples pour les deux autres premières valeurs de $N$, $N = 10$ et $N = 14$, sont loin d'être établies complètement. Elles donnent les systèmes cherchés dans ces deux cas particuliers, $N = 10$ et $N = 14$, parce que pour ces premières valeurs de $N$, certaines conditions se trouvent réalisées. Nous ne sommes pas en état de dire si elles le seront nécessairement dans le cas général.

**6. Construction I.** La démonstration comporte deux parties, **A** et **B**.

**A.** M. Reiss[2]) a donné une manière de répartir les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples de $n$ éléments, $n$ pair, en $n-1$ systèmes de couples sans couple commun[3]). Les éléments étant 1, 2, ..., $n$, il forme le tableau suivant:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{lllllllll}
12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & \cdots, & 1\,n-1, & 1\,n, \\
-, & 2\,n, & 23, & 24, & 25, & 26, & \cdots, & 2\,n-2, & 2\,n-1, \\
3\,n-1, & -, & -, & 3\,n, & 34, & 35, & \cdots, & 3\,n-3, & 3\,n-2, \\
4\,n-2, & 4\,n-1, & -, & -, & -, & 4\,n, & \cdots, & 4\,n-4, & 4\,n-3, \\
\multicolumn{9}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{9}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

On voit d'abord immédiatement comment le tableau est écrit et que tous les couples s'y trouvent. La première ligne contient les couples commençant par l'élément 1, la seconde ligne, les couples commençant par l'élément 2, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne, la $(n-1)$ème, qui contient le seul couple $n-1$, $n$. A chaque ligne, le premier couple, 23, 34, etc., est reculé de deux colonnes par rapport au premier couple de la ligne précédente, et le dernier couple de la ligne, $2\,n$, $3\,n$, etc., est placé chaque fois dans la colonne qui précède immédiatement. L'ordre des colonnes est cyclique, c'est-à-dire que, comme on le voit déjà dans la partie écrite du tableau, après la dernière colonne, revient la première, puis la seconde, etc.

Il est facile de voir ensuite que chacun des $n$ éléments apparaît au moins une fois dans chaque colonne. L'élément 1 est dans chaque colonne à la première ligne; l'élément 2 est dans la première colonne à la première ligne, et dans chaque autre colonne à la deuxième ligne; l'élément 3 est en diagonale dans les deuxième, troisième et quatrième colonne et ensuite horizontalement dans chaque autre colonne; et ainsi de suite. Si nous admettons la partie en retour qui est à gauche du tableau, écrite à sa place normale à la droite du tableau, on voit que d'une façon générale, l'élément $k$ ($k \neq n$) est en diagonale de la première à la $k$ième ligne, dans les $k$ colonnes de rang $k-1$, $k$, $k+1$, $\cdots$, $2\,k-2$, et ensuite dans cette $k$ième ligne intervient horizontalement encore dans les $n-k-1$ autres

[2]) *M. Reiss*, Journal für Mathematik, t. LVI, 1859, p. 326.
Voir *E. Netto*, Lehrbuch der Kombinatorik, p. 206.

[3]) Pour simplifier l'écriture des deux tableaux (5) et (6) ci-dessous, nous écrivons dans cette construction I, $n$, là où d'après la notation adoptée jusqu'ici, nous devrions mettre $N$.

colonnes restantes. Quant à l'élément $n$, on voit aussi aisément qu'il apparaît une fois dans chaque colonne[4]).

Le tableau comporte $n - 1$ colonnes. Chaque élément se trouvant une fois dans chaque colonne, le nombre des éléments écrits est au moins $n\,(n-1)$. D'autre part, les $\frac{n\,(n-1)}{2}$ couples du tableau représentent $n\,(n-1)$ éléments. Il est donc impossible qu'un élément se trouve deux fois dans la même colonne. Ainsi chacune des colonnes est *un système de couples* et le tableau est une répartition des $\frac{n\,(n-1)}{2}$ couples des $n$ éléments en $n - 1$ systèmes de couples *sans couple commun*, c. q. f. d.

**B.** Formons le même tableau de Reiss avec les $n$ nouveaux éléments $1', 2', \cdots, n'$.

$$(6)\qquad \begin{array}{ccccccccc}
1'\,2', & 1'\,3', & 1'\,4', & 1'\,5', & 1'\,6', & 1'\,7', & \cdots, & 1'(n-1)', & 1'\,n', \\
—, & 2'\,n', & 2'\,3', & 2'\,4', & 2'\,5', & 2'\,6', & \cdots, & 2'(n-2)', & 2'(n-1)', \\
3'(n-1)', & —, & —, & 3'\,n', & 3'\,4', & 3'\,5', & \cdots, & 3'(n-3)', & 3'(n-2)', \\
4'(n-2)', & 4'(n-1)', & — & — & — & 4'\,n', & \cdots, & 4'(n-4)', & 4'(n-3)', \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Associons les couples de chaque colonne de (5) aux couples d'une colonne de (6) de la manière suivante:

1) à chaque couple de la $i$ième colonne de (5) s'unissent chaque couple de la $k$ième colonne de (6).
2) aux couples de deux colonnes différentes de (5) s'unissent les couples de deux colonnes différentes de (6).

Nous obtenons ainsi un ensemble de $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)$ quadruples dans lesquels chaque couple des éléments $1, 2, \cdots, n$, $(a)$, est lié et une seule fois

---

[4]) En somme le tableau de Reiss part de la disposition suivante que l'on voit mieux avec un cas concret. Nous prendrons $n = 8$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | | | | | | | |
| — | — | 28 | 23 | 24 | 25 | 26 | | 27 | | | | | |
| — | — | — | — | 38 | 34 | 35 | | 36 | 37 | | | | |
| — | — | — | — | — | — | 48 | | 45 | 46 | 47 | | | |
| | | | | | | | | | 58 | 56 | 57 | | |
| | | | | | | | | | | | 68 | 67 | |
| | | | | | | | | | | | | | 78 |

On complète alors les cases vides à gauche du tableau rectangulaire par les colonnes de couples qui sont à droite du trait vertical. Sous cette forme on voit immédiatement que chaque élément, y compris l'élément $n = 8$, entre une fois dans chaque colonne.

avec chacun des éléments $1', 2', \cdots, n'$, $(\beta)$, et inversement. Dans cet ensemble de quadruples, chaque triple constitué de deux éléments $(\alpha)$ et d'un élément $(\beta)$ ou de deux éléments $(\beta)$ et d'un élément $(\alpha)$, entre donc une fois et une seule fois.

Ajoutons à cet ensemble un système de quadruples des éléments $(\alpha)$ et un système de quadruples des éléments $(\beta)$. L'ensemble total contiendra chaque triple des éléments $1, 2, \cdots, n, 1', 2', \cdots, n'$ une fois et une seule fois. *Il constitue un système de quadruples.*

On a d'ailleurs bien:

$$\frac{n^2(n-1)}{4}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{4!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4!}.$$

**7. Construction II.** La démonstration comporte de nouveau deux parties, **a** et **b**.

**a)** Soit un système de quadruples $S$ des $N$ éléments $1, 2, \cdots, N$, $N = 6n+2$ (§ 5, second alinéa). Séparons ces éléments en deux parties:

$$1, 2, \cdots, N-2, \qquad (\alpha)$$
$$N-1, N. \qquad (\beta)$$

Les quadruples de $S$ se répartissent vis-à-vis des éléments $(\beta)$ en trois ensembles $A$, $A'$, $A''$, qui sont:

$A$) ceux qui ne contiennent pas d'élément $(\beta)$;

$A'$) ceux qui contiennent des deux éléments $(\beta)$, $N-1$ *ou* $N$ seuls;

$A''$) ceux qui contiennent le couple $N-1, N$.

Dans les quadruples $A''$, les couples des éléments $(\alpha)$ forment un $\Delta^2_{N-2}$ (en appliquant deux fois la propriété du § 2, premier alinéa); il y a donc $\frac{N-2}{2}$ quadruples $A''$. Dans les quadruples $A'$ qui contiennent $N$ (ou $N-1$), les triples des éléments $(\alpha)$ forment un $\Delta^3_{N-1}$, en y ajoutant les triples qui restent après suppression de l'élément $N$ (ou $N-1$) dans les quadruples $A''$. Le nombre des quadruples $A'$ contenant $N$ (ou $N-1$) est donc:

$$\frac{(N-1)(N-2)}{6}-\frac{N-2}{2}=\frac{N-2}{6}(N-4).$$

Barrons dans ces quadruples $A'$ les éléments $N$ et $N-1$. Il reste d'après ce qui vient d'être dit deux ensembles $A_1'$ et $A_2'$ de triples des éléments $(\alpha)$, de $\frac{(N-2)(N-4)}{6}$ triples chacun. A cause de la constitution du système de quadruples, chaque ensemble $A_1'$ et $A_2'$ contient les mêmes couples des éléments $(a)$, chaque couple une seule fois, et dans les deux ensembles il n'y a pas deux fois le même triple.

$\frac{N-2}{3}$ est entier, à cause de la forme de $N$. Nous pouvons donc répartir les $\frac{(N-2)(N-4)}{3}$ triples des deux ensembles $A_1'$ et $A_2'$ en $N-4$ colonnes de $\frac{N-2}{3}$ triples. L'exigence immédiate de la construction que nous cherchons, est simplement que cette répartition soit telle que dans chacune de ces colonnes *il n'y ait pas deux fois le même couple*. Pour cela il suffit, d'après ce qui est dit ci-dessus, de partager arbitrairement chacun des ensembles $A_1'$ et $A_2'$ en $\frac{N-4}{2}$ colonnes de $\frac{N-2}{3}$ triples. Mais il est possible que la suite de la construction exige davantage, une répartition telle que dans chacune des $N-4$ colonnes, *il n'y ait pas deux fois le même élément*. Nous ne sommes pas en état de fixer ce point, ni surtout de dire si une telle répartition sera toujours possible. Nous avons seulement les premières conditions immédiatement nécessaires pour une telle répartition:

1) les $\frac{N-2}{3}$ triples de chaque colonne contiennent $N-2$ éléments, donc exactement, s'ils ne peuvent pas se répéter, les $N-2$ éléments $(a)$ que nous avons à disposition;
2) le nombre des éléments $(a)$ contenus dans les triples $A_1'$ et $A_2'$ est $(N-2)(N-4)$; chacun y intervient *le même nombre de fois*, puisque tous les couples de ces éléments, abstraction faite de ceux du système de couples associé au couple $N-1, N$ dans $A''$, y interviennent exactement deux fois; donc chaque élément y intervient $N-4$ fois, c'est-à-dire le nombre des colonnes que nous voulons former.

Admettons effectuée la répartition en question, avec la première, sinon avec la seconde des exigences que nous venons de discuter. Ajoutons aux $\frac{N-2}{3}$ triples de chaque colonne l'un des $N-4$ éléments suivants:

$$N-1, N, N+1, N+2, \cdots, 2N-6. \qquad (\gamma)$$

Nous formons ainsi un ensemble $B$ de $\frac{(N-2)(N-4)}{3}$ quadruples contenant avec les quadruples $A$ chaque triple des éléments $(a)$ une fois et une seule fois.

**b)** Dans le système de quadruples cherché, chaque couple $(\alpha)$[5]) doit être lié une fois exactement à chaque élément $(\gamma)$ et inversement chaque couple $(\gamma)$ doit être lié une fois exactement à chaque élément $(\alpha)$. Dans l'ensemble $B$, à chaque élément $(\gamma)$ se trouve lié déjà $N - 2$ couples $(\alpha)$. Donc chaque élément $(\gamma)$ doit encore être lié à $\frac{(N-2)(N-3)}{2} - (N-2) = \frac{(N-2)(N-5)}{2}$ couples $(\alpha)$. D'autre part, puisque dans les ensembles $A$ et $B$ formés jusqu'ici n'entre encore aucun couple $(\gamma)$, chacun des couples $(\gamma)$ doit encore être lié à chaque élément $(\alpha)$.

Nous aurons exactement les liaisons demandées si nous pouvons constituer l'ensemble suivant de quadruples, formés de couples $(\alpha)$ et de couples $(\gamma)$ associés. A chaque couple $ab$ des éléments $(\gamma)$ nous associons un système de couples $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, \varkappa\lambda$, des éléments $(\alpha)$, de façon à former les quadruples:

$$ab\alpha\beta,\ ab\gamma\delta,\ \cdots,\ ab\varkappa\lambda, \tag{7}$$

avec les deux conditions suivantes:

1) $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, x\lambda$ ne sont pas des couples $(\alpha)$ contenus dans les quadruples de $B$ qui contiennent $a$ et $b$;
2) pour tous les quadruples (7) contenant un même élément $(\gamma)$ les couples $(\alpha)$ sont tous différents.

Si nous pouvons former dans les conditions demandées, ce système de couples $(\alpha)$ pour chaque couple $(\gamma)$, les liaisons exigées ci-dessus seront complètes. En effet chaque couple $(\gamma)$ sera lié exactement une fois à chaque élément $(\alpha)$, et inversement chaque couple $(\alpha)$ qui reste à lier à un élément $(\gamma)$ fixé quelconque le sera exactement une fois, puisque, pour un même élément $(\gamma)$, le nombre des places à occuper par les couples $(\alpha)$, qui est d'après (7), condition 2), $(N-5)\frac{N-2}{2}$, est le même que le nombre de ces couples qui restent à lier avec cet élément $(\gamma)$ (voir ci-dessus).

Admettons constitué ce nouvel ensemble de quadruples et désignons-le par $C$. Ajoutons aux ensembles $A$, $B$ et $C$, un système de quadruples $D$ des éléments $(\gamma)$, contenant donc une fois et une seule fois chaque triple des éléments $(\gamma)$. L'ensemble total $A + B + C + D$ contiendra chaque triple des $2N - 6$ éléments $(\alpha)$ et $(\gamma)$ réunis, une fois et une seule fois. Il sera donc un système de quadruples des $2N - 6$ éléments. On a bien effectivement:

[5]) Pour simplifier, nous écrirons simplement: *couples* $(\alpha)$ et *couples* $(\gamma)$, au lieu de: couples des éléments $(\alpha)$, couples des éléments $(\gamma)$.

Nombre des quadruples de $D$ : $$\frac{(N-4)(N-5)(N-6)}{2\cdot 3\cdot 4}$$

„ „ „ „ $C$ : $$\frac{(N-4)(N-5)}{2}\cdot\frac{N-2}{2}$$

„ „ „ „ $B$: $$\frac{(N-2)(N-4)}{3}$$

„ „ „ „ $A$: $$\frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{(N-2)(N-4)}{3}-\frac{N-2}{2}$$

Nombre total des quadruples de $A+B+C+D$ :

$$\frac{(N-4)(8N^2-52N+84)}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{(2N-6)(2N-7)(2N-8)}{2\cdot 3\cdot 4}$$

**8. Construction III.** $N-2$ est de la forme $6n+2$ (§ 5, second alinéa). Nous constituons deux systèmes de quadruples de $N-2$ éléments, l'un avec les éléments $0, 1, 2, \cdots, N-3$, l'autre avec les éléments $0', 1', 2', \cdots, (N-3)'$. Nous barrons ensuite les éléments 0 et $0'$ dans chacun des systèmes. Il reste dans l'un et l'autre des systèmes un ensemble de $A$ quadruples et un ensemble de $B$ triples,

des éléments $1, 2, \cdots, N-3$, $(\alpha)$,
respectivement $1', 2', \cdots, (N-3)'$, $(\beta)$.

Les $B$ triples contiennent une fois et une seule fois chaque couple des éléments $(\alpha)$, resp. $(\beta)$ (§ 2, premier alinéa); les $A$ quadruples et les $B$ triples contiennent ensemble une fois et une seule fois chaque triple des éléments $(\alpha)$, resp. $(\beta)$.

$B=\frac{(N-3)(N-4)}{6}$. $\frac{N-4}{6}$ est entier à cause de la forme de $N-2$.

On peut donc répartir les $B$ triples de l'un et de l'autre des systèmes en $\frac{N-4}{6}$ colonnes de $N-3$ triples chacune. Admettons que nous pouvons faire cette répartition telle qu'il y a dans chaque colonne le même nombre de fois chaque élément, donc *trois fois* chaque élément, puisque $N-3$ triples contiennent $3(N-3)$ éléments. Aux $N-3$ triples de chaque colonne des triples $(\alpha)$, nous ajoutons les $N-3$ éléments $(\beta)$ dans un ordre quelconque; aux $N-3$ triples de chaque colonne des triples $(\beta)$, nous ajoutons de même les $N-3$ éléments $(\alpha)$.

Nous constituons ainsi un ensemble de $2\,B$ quadruples dans lesquels chaque couple $(\alpha)$ est lié à *un* élément $(\beta)$ et inversement. Pour la constitution du système de quadruples cherché des $2\,N - 6$ éléments $(\alpha)$ et $(\beta)$, chaque couple $(\alpha)$ doit être lié à *chaque* élément $(\beta)$ et inversement. Il reste donc à lier chaque couple $(\alpha)$ à $N - 4$ éléments $(\beta)$ et inversement.

Mais on peut aussi s'exprimer autrement. Dans les $2\,B$ quadruples formés, chaque élément $(\beta)$ est lié à $\frac{N-4}{2}$ couples $(\alpha)$ et inversement. Pour la constitution du système cherché, chaque élément $(\beta)$ doit être lié à chaque couple $(\alpha)$ et inversement. Il reste donc à lier chaque élément $(\beta)$ à $\frac{(N-3)\,(N-4)}{2} - \frac{N-4}{2} = \frac{(N-4)^2}{2}$ couples $(\alpha)$ et inversement.

Or nous aurons exactement les liaisons demandées si nous pouvons constituer l'ensemble suivant de quadruples, formés de couples $(\alpha)$ et de couples $(\beta)$ associés. A chaque couple $ab$ des éléments $(\alpha)$, nous associons un système de couples $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\cdots$, $\varkappa\lambda$, des $N - 4$ éléments $(\beta)$ qui ne sont pas encore liés à $ab$, de manière à former les quadruples:

$$ab\alpha\beta,\ ab\gamma\delta,\ \cdots,\ ab\varkappa\lambda, \tag{8}$$

avec les deux conditions suivantes:

1) $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\cdots$, $\varkappa\lambda$ ne sont pas des couples $(\beta)$ déjà liés à $a$ et $b$ dans les $2\,B$ quadruples ci-dessus;

2) pour tous les quadruples (8) contenant un même élément $(\alpha)$, les couples $(\beta)$ sont tous différents.

En effet dans ce cas les liaisons exigées seront complètes: chaque couple $(\alpha)$ sera lié aux $N - 4$ éléments $(\beta)$ auxquels il doit encore être lié (ci-dessus, troisième alinéa), et inversement chaque couple $(\beta)$ qui doit encore être lié à un élément $(\alpha)$ fixé quelconque, le sera, une fois et une seule fois, puisque, pour un même élément $(\alpha)$, le nombre des places à occuper par les couples $(\beta)$, qui est, d'après (8) condition 2), $(N-4)\,\frac{N-4}{2}$, est le même que le nombre de ces couples qui restent à lier avec cet élément $(\alpha)$ (ci-dessus, quatrième alinéa).

Admettons constitué ce nouvel ensemble de quadruples et désignons leur nombre par $C$. L'ensemble total des $2\,A + 2\,B + C$ quadruples que nous avons ainsi formés, contiendra maintenant chaque triple des $2\,N - 6$ éléments $1, 2, \cdots, N - 3, 1', 2', \cdots, (N - 3)'$ une fois et une seule fois. Il sera donc un système de quadruples. On a bien effectivement:

$$B = \frac{(N-3)(N-4)}{6}; \quad A = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{(N-3)(N-4)}{6};$$

$$C = \frac{(N-3)(N-4)}{2} \cdot \frac{N-4}{2}.$$

Le nombre total $2A + 2B + C$ de quadruples est le nombre nécessaire :

$$\frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{3\cdot 4} + \frac{(N-3)(N-4)^2}{4} = \frac{(N-3)(N-4)(4N-14)}{12} =$$

$$= \frac{(2N-6)(2N-7)(2N-8)}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

## III. Les systèmes de quadruples pour $N = 4$, 8, 10 et 14 éléments.

**9.** ***N* = *4*.** Le cas est trivial; le quadruple 1234 contient chaque triple de ces éléments une fois et une seule fois. Il constitue l'unique système de quadruples pour $N = 4$.

***N* = *8*.** Conformément à la construction I, les deux tableaux de Reiss sont:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 14 | $1'\ 2'$ | $1'\ 3'$ | $1'\ 4'$ |
| 34 | 24 | 23 | $3'\ 4'$ | $2'\ 4'$ | $2'\ 3'$ |

Nous associons chaque couple des colonnes de gauche à chaque couple de la colonne *de même rang* de droite. Nous obtenons l'ensemble de quadruples suivant:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $12\ 1'\ 2'$ | $13\ 1'\ 3'$ | $14\ 1'\ 4'$ |
| (9) | $12\ 3'\ 4'$ | $13\ 2'\ 4'$ | $14\ 2'\ 3'$ |
| | $34\ 1'\ 2'$ | $24\ 1'\ 3'$ | $23\ 1'\ 4'$ |
| | $34\ 3'\ 4'$ | $24\ 2'\ 4'$ | $23\ 2'\ 3'$ |

En y ajoutant les deux quadruples 1234 et $1'\ 2'\ 3'\ 4'$, nous avons un système de quadruples pour $N = 8$.

*Il n'existe pas d'autre système de quadruples différent de celui qui vient d'être trouvé, pour* $N = 8$. Pour l'établir, il suffit de remarquer le fait suivant:

*Le système de quadruples trouvé est fixé complètement par le* $\Delta_7^3$ *associé à l'un de ses éléments*. En effet le $\Delta_7^3$ associé à l'élément 1 est:

$$2\,3\,4,\quad 2\,1'\,2',\quad 2\,3'\,4',\quad 3\,1'\,3',\quad 3\,2'\,4',\quad 4\,1'\,4',\quad 4\,2'\,3'.$$

Le système $\Delta_7^3$ associé à l'élément 2 doit donc contenir les trois triples:

$$1\,3\,4,\quad 1\,1'\,2',\quad 1\,3'\,4'.$$

Pour que ce soit un système de triples, les quatre autres triples de ce $\Delta_7^3$ ne peuvent être que:

$$3\,1'\,3',\quad 3\,2'\,4',\quad 4\,1'\,4',\quad 4\,2'\,3' \quad \textit{ou} \quad 3\,1'\,4',\quad 3\,2'\,3',\quad 4\,1'\,3',\quad 4\,2'\,4'.$$

La première alternative est impossible avec ce qui est déjà dans (9). Il ne reste que la seconde qui donne précisément les quadruples qui sont ceux de (9): $2\,3\,1'\,4'$, $2\,3\,2'\,3'$, $2\,4\,1'\,3'$, $2\,4\,2'\,4'$. Il est clair maintenant que les trois derniers quadruples encore disponibles sont fixés par les onze déjà formés; pour le vérifier, il suffirait de prendre encore le $\Delta_7^3$ associé à l'élément 3.

Nous rappelons encore que pour $N = 7$, il n'existe qu'*un seul* système de triples, qui prend 30 formes distinctes ou, autrement dit, qui possède un groupe de substitutions d'ordre 168.

De là nous concluons sans autre (§ 4, propriété V): *le système* $\Delta_8^4$ *trouvé a 30 formes distinctes et il n'existe pas de* $\Delta_8^4$ *différent de celui-là*. Le groupe de substitutions qui lui appartient est d'ordre $\dfrac{8!}{30} = 1344$.

**10.** $\boldsymbol{N=10.}$ $10=6\cdot 1+4$; d'après le § 5, second alinéa, c'est la construction II qui intervient avec $N'' = 6\,n' + 2 = 8$, $N'' - 4 = 4$. Nous partons donc du $\Delta_8^4$ précédent; mais pour la concordance de la notation avec celle du § 7, au lieu des éléments $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, nous écrirons 5, 6, 7, 8. Le système de quadruples $S$ (§ 7) est ainsi:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1256 | 1357 | 1458 | 1234 |
| 1278 | 1368 | 1467 | 5678 |
| 3456 | 2457 | 2358 | |
| 3478 | 2468 | 2367 | |

Les deux ensembles de triples $A'_1$ et $A'_2$ des éléments $(a)$: 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont:

135, 245, 146, 236 et 136, 246, 145, 235.

Les premiers proviennent des quadruples contenant l'élément 7 seul; les seconds, des quadruples contenant l'élément 8 seul.

Leur répartition en $N - 4 = 4$ colonnes de $\frac{N-2}{3} = 2$ triples, telle que dans chaque colonne il n'y a pas deux fois *le même couple*, se fait immédiatement en partageant en deux colonnes chacun des ensembles. Mais dans ce cas-ci on peut faire immédiatement aussi la répartition telle, que dans chaque colonne il n'y a pas deux fois *le même élément*; elle est d'ailleurs unique:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 135, | 146, | 245, | 236, |
| 246, | 235, | 136, | 145. |

Les éléments $(\gamma)$ sont 7, 8, 9, 0′ et pour l'ensemble $B$ nous prendrons:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (10) | 1357 | 1468 | 2459 | 2360′ |
| | 2467 | 2358 | 1369 | 1450′ |

A chacun des couples $(\gamma)$ nous pouvons associer un système de couples $(a)$ qui remplit les conditions demandées (§ 7, b, second alinéa). Ces systèmes de couples sont donnés dans le tableau suivant en-dessous des couples $(\gamma)$:

| | 78 | 79 | 70′ | 89 | 80′ | 90′ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (11) | 12 | 14 | 16 | 15 | 13 | 12 |
| | 36 | 23 | 25 | 26 | 24 | 35 |
| | 45 | 56 | 34 | 34 | 56 | 46 |

Mais la constitution de ce tableau est encore unique; autrement dit il n'est pas possible de satisfaire aux conditions demandées avec une disposition autre des couples $(a)$.

Ajoutons aux deux ensembles $B$ et $C$ des quadruples (10) et (11), l'ensemble $A$ qui est 1256, 3456, 1234 et le système de quadruples $D$ des éléments $(\gamma)$ qui se réduit au quadruple 7890′. L'ensemble total $A + B + C + D$ est le $\Delta^4_{10}$ cherché.

*Il n'existe pas d'autre système de quadruples différent de celui qui vient d'être trouvé, pour $N = 10$.* Pour l'établir, il suffit encore de remarquer le fait suivant:

*Le système de triples $\Delta_9^3$ associé à l'élément 1 dans le système de quadruples trouvé, permet trois systèmes de quadruples $\Delta_{10}^4$, qui diffèrent par les 8 triples encore disponibles associés à l'élément 2 et par les autres quadruples qui en découlent. Ces trois systèmes sont équivalents.*

En effet ce $\Delta_9^3$ est:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 234 | 256 | 357 | 450′ |
| (12) | 589 | 278 | 380′ | 468 |
| | 670′ | 290′ | 369 | 479 |

Le système $\Delta_9^3$ associé à l'élément 2 doit donc contenir les quatre triples:

134, 156, 178, 190′.

Pour que ce soit un système de triples, les huit autres triples de ce $\Delta_9^3$ ne peuvent prendre que l'une des huit formes suivantes:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 579, | 680′, | 358, | 370′, | 3 9 6, | 467, | 489, | 4 0′ 5; | ($\alpha$) |
| 579, | 680′, | 350′, | 376, | 3 9 8, | 469, | 485, | 4 0′ 7; | ($\beta$) |
| 570′, | 689, | 358, | 379, | 3 0′ 6, | 467, | 480′, | 4 9 5; | ($\gamma$) |
| 570′, | 689, | 359, | 376, | 3 0′ 8, | 460′, | 485, | 4 9 7; | ($\delta$) |
| 589, | 670′, | 357, | 380′, | 3 9 6, | 468, | 479, | 4 0′ 5; | ($\varepsilon$) |
| 589, | 670′, | 350′, | 386, | 3 9 7, | 469, | 475, | 4 0′ 8; | ($\zeta$) |
| 580′, | 679, | 357, | 389, | 3 0′ 6, | 468, | 470′, | 4 9 5; | ($\eta$) |
| 580′, | 679, | 359, | 386, | 3 0′ 7, | 460′, | 475, | 4 9 8; | ($\theta$) |

Les formes ($\varepsilon$), ($\zeta$), ($\alpha$), ($\delta$) et ($\eta$) ne peuvent convenir, parce que contenant des triples qui sont déjà dans les triples (12) associés à l'élément 1. Seules peuvent convenir les formes ($\beta$), ($\gamma$) et ($\theta$); la forme ($\gamma$) est celle du système $\Delta_{10}^4$ déjà trouvé.

Les quadruples restant encore sont maintenant fixés par les vingt déjà formés. Pour le voir prenons encore le $\Delta_9^3$ associé à l'élément 3 dans le cas de la forme ($\beta$), par exemple. Il doit déjà contenir les sept triples suivants:

124, 157, 180′, 169, 250′, 267, 289.

Pour que ce soit un système de triples, les cinq autres triples de ce $\Delta_9^3$ ne peuvent encore prendre que l'une des trois formes suivantes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 459, | 460′, | 487, | 568, | 790′; | ($\alpha'$) |
| 458, | 460′, | 497, | 569, | 780′; | ($\beta'$) |
| 456, | 487, | 490′, | 589, | 670′; | ($\gamma'$) |

Les formes ($\beta'$) et ($\gamma'$) ne peuvent convenir à cause de triples qui sont déjà dans les triples (12). Seule la forme ($\alpha'$) convient. Enfin les cinq derniers quadruples encore disponibles sont fixés évidemment par les vingt-cinq qui ont été obtenus. Pour le vérifier, il suffirait de prendre encore par exemple le $\Delta_9^3$ associé à l'élément 4.

Enfin remarquons que les substitutions (589) (670′) et (598) (6 0′ 7) qui laissent invariant le système de triples (12), changent la forme ($\gamma$) respectivement dans les formes ($\beta$) et ($\theta$) et par conséquent le système $\Delta_{10}^4$ trouvé dans les deux autres fixés par les formes ($\beta$) et ($\theta$). Ainsi la proposition ci-dessus est complètement établie.

Rappelons maintenant que pour $N = 9$ il n'existe encore *qu'un seul* système de triples, qui prend 840 formes distinctes, ou autrement dit, qui possède un groupe de substitutions d'ordre 432.

Nous concluons de là sans autre (§ 4, propriété V): *le système $\Delta_{10}^4$ trouvé a $3 \times 840 = 2520$ formes distinctes et il n'existe pas un $\Delta_{10}^4$ différent de celui-là*. Le groupe de substitutions qui lui appartient est d'ordre $\dfrac{10!}{2520} = 1440$.

*Remarque*. Ce système $\Delta_{10}^4$ est cyclique. On trouve sa forme cyclique invariante par le groupe cyclique $\{ (1234567890') \}$, en faisant la substitution (4758) (69). On peut alors prendre pour têtes de ses trois colonnes cycliques les quadruples 1237, 1245, 1385. On voit aisément sous cette forme que le système possède le diviseur métacyclique $\{ \mid x, 1 + x \mid, \mid x, 3x \mid \}$, d'ordre 40.

**11. $N = 14$.** $14 = 6 \cdot 2 + 2$; d'après le § 5, second alinéa, c'est la construction III qui intervient, avec $N' = 6n' + 4 = 10$, $N' - 2 = 8$. D'après le § 8 nous partons donc de deux systèmes $\Delta_8^4$, l'un formé des éléments ($\alpha$): 0, 1, ⋯, 7, l'autre, des éléments ($\beta$): 0′, 1′, ⋯, 7′, du type (9):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0145 | 0246 | 0347 | 0123 |
| (13) | 0167 | 0257 | 0356 | 4567 |
| | 2345 | 1346 | 1247 | |
| | 2367 | 1357 | 1256 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0′ 1′ 4′ 5′ | 0′ 2′ 4′ 6′ | 0′ 3′ 4′ 7′ | 0′ 1′ 2′ 3′ |
| (14) | 0′ 1′ 6′ 7′ | 0′ 2′ 5′ 7′ | 0′ 3′ 5′ 6′ | 4′ 5′ 6′ 7′ |
| | 2′ 3′ 4′ 5′ | 1′ 3′ 4′ 6′ | 1′ 2′ 4′ 7′ | |
| | 2′ 3′ 6′ 7′ | 1′ 3′ 5′ 7′ | 1′ 2′ 5′ 6′ | |

$\frac{N-4}{6} = 1$. Ici la répartition des $B$ triples de chaque système (§ 8, second alinéa) en $\frac{N-4}{6}$ colonnes de $N-3$ triples chacune, est sans autre telle qu'il y a dans chaque colonne le même nombre de fois chaque élément, puisqu'il n'y a qu'*une* colonne de 7 triples qui est le $\Delta_7^3$ associé à l'élément 0 dans les $\Delta_8^4$ (13) et (14), et un $\Delta_7^3$ contient chaque élément trois fois.

Nous aurons ainsi les deux colonnes de triples rangées horizontalement:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 2 3 | 1 4 5 | 1 6 7 | 2 4 6 | 2 5 7 | 3 4 7 | 3 5 6 |
| 1′ 2′ 3′ | 1′ 4′ 5′ | 1′ 6′ 7′ | 2′ 4′ 6′ | 2′ 5′ 7′ | 3′ 4′ 7′ | 3′ 5′ 6′ |

Nous ajoutons les éléments $(\beta)$ aux premiers et les éléments $(\alpha)$ aux seconds, dans l'ordre qui se présente immédiatement:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (15) | 1 2 3 1′ | 1 4 5 2′ | 1 6 7 3′ | 2 4 6 4′ | 2 5 7 5′ | 3 4 7 6′ | 3 5 6 7′ |
| | 1′ 2′ 3′ 1 | 1′ 4′ 5′ 2 | 1′ 6′ 7′ 3 | 2′ 4′ 6′ 4 | 2′ 5′ 7′ 5 | 3′ 4′ 7′ 6 | 3′ 5′ 6′ 7 |

Ce sont les 2 $B$ quadruples. Il reste à former les $C$ quadruples. Nous pouvons en effet, associer à chacun des couples $(\alpha)$ que nous disposons dans le*s* deux lignes horizontales ci-dessous, un système de couples $(\beta)$ tel que l'ensemble remplit les deux conditions demandées (§ 8, cinquième alinéa). Chacun de ces systèmes de couples $(\beta)$ est écrit en-dessous du couple $(\alpha)$ correspondant:

| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2′ 4′ | 2′ 6′ | 1′ 5′ | 1′ 4′ | 1′ 7′ | 1′ 6′ | 2′ 5′ | 1′ 7′ | 1′ 2′ | 1′ 6′ | 1′ 3′ |
| 3′ 6′ | 4′ 7′ | 3′ 4′ | 3′ 7′ | 2′ 5′ | 2′ 7′ | 3′ 7′ | 2′ 3′ | 3′ 4′ | 2′ 7′ | 2′ 6′ |
| 5′ 7′ | 3′ 5′ | 6′ 7′ | 5′ 6′ | 4′ 6′ | 4′ 5′ | 4′ 6′ | 5′ 6′ | 6′ 7′ | 3′ 5′ | 4′ 7′ |

| 34 | 35 | 36 | 37 | 45 | 46 | 47 | 56 | 57 | 67 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1′ 3′ | 1′ 5′ | 1′ 4′ | 1′ 2′ | 1′ 6′ | 1′ 2′ | 1′ 4′ | 1′ 3′ | 1′ 7′ | 1′ 5′ |
| 2′ 7′ | 2′ 4′ | 2′ 3′ | 3′ 4′ | 3′ 5′ | 3′ 6′ | 2′ 5′ | 2′ 6′ | 2′ 3′ | 2′ 4′ |
| 4′ 5′ | 3′ 6′ | 5′ 6′ | 5′ 7′ | 4′ 7′ | 5′ 7′ | 3′ 7′ | 4′ 5′ | 4′ 6′ | 6′ 7′ |

Le $\Delta_{14}^4$ cherché est constitué des $2\,A$ quadruples (13) et (14) qui ne contiennent pas 0 et 0′, des $2\,B$ quadruples (15) et des $C$ quadruples du tableau ci-dessus, en tout 91 quadruples.

*Le système trouvé possède un groupe de substitutions d'ordre 42. Il prend donc* $\frac{14!}{42}$ *formes distinctes. Le système* $\Delta_{13}^3$ *associé à ses éléments est le système de triples de Kirkman qui possède un groupe de substitutions d'ordre* 6.

Le multiple dont il est question au § 4, propriété III, est donc ici 2, puisque $\frac{14!}{42} = 2 \cdot \frac{13!}{6}$. Le système $\Delta_{13}^3$ associé à l'élément 1, par exemple, dans le système de quadruples trouvé, ne permet donc qu'*un second* système $\Delta_{14}^4$ équivalent au premier et distinct par les autres quadruples qui ne contiennent pas l'élément 1. Mais il n'est pas dit que sur ce même système $\Delta_{13}^3$ de Kirkmann on ne puisse pas construire un autre système de quadruples $\Delta_{14}^4$ différent du premier, comme il est probable aussi que sur le système de triples cyclique $\Delta_{13}^3$ de Netto, dont le groupe de substitutions est d'ordre 39, on peut également construire *un* ou éventuellement plusieurs $\Delta_{14}^4$ différents. Ces systèmes seront différents des précédents (§ 4, propriété II). Il est donc probable qu'il existe pour $N = 14$ *au moins deux systèmes de quadruples différents.*

Pour établir la proposition énoncée ci-dessus, c'est-à-dire obtenir le groupe de substitutions du système $\Delta_{14}^4$ trouvé et déterminer la nature du système de triples $\Delta_{13}^3$ associé à ses éléments, le moyen le plus simple est celui des „*trains*" de H. S. White, établi pour le système de triples, mais dont la généralisation au système de $n$-uples est immédiate[6]). La place nous fait défaut pour le développer ici; nous ne donnerons que les résultats qui suffisent à établir ce que nous désirons.

1) Le groupe de substitutions qui appartient au système $\Delta_{14}^4$ trouvé est transitif. Les cinq substitutions suivantes, par exemple, qui laissent chacune le système invariant: (4 3′ 5 4′ 1 7′) (2 1′ 3 6′ 7 5′) (6 2′), (4 6′ 3 7′ 6 4′) (2 2′ 7 1′ 5 3′) (1 5′), (4 5′ 3 2′ 7 7′) (6 4′ 2 1′ 1 3′) (5 6′), (4 2′ 5 5′ 2 4′) (6 6′ 1 7′ 7 1′) (3 3′), (4 1′) (6 7′ 5 5′ 7 3′) (1 4′ 3 2′ 2 6′), suffisent à montrer que l'élément 4, par exemple, est transformé en chacun des 13 autres par les substitutions du groupe[7]).

[6]) *H. S. White*, Transactions of the Amer. Math. Society, vol. XIV, n° 1, 1913, p. 6. ou voir *S. Bays*, Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 40, Paris (1923), p. 81 à 96.

[7]) Il suffit de savoir qu'un élément *fixé* est changé en chaque autre, pour être assuré que *chaque* élément est changé en chaque autre par les substitutions du groupe.

2) Les substitutions qui changent le système en lui-même en laissant en place l'élément 4, sont uniquement, avec l'identité, la substitution (123) (567) ($2'$ $4'$ $6'$) ($3'$ $5'$ $7'$) et son inverse. Il est facile de s'en rendre compte en très peu de temps avec les trains de White ou sur le système lui-même. L'ordre du groupe cherché est donc $14 \times 3 = 42$, et ce groupe est simplement transitif, puisque certains couples de ses éléments ne peuvent pas se transformer en tous les autres.

3) Les trains de White du système $\Delta_{13}^3$ associé à l'élément 1, par exemple, montrent immédiatement une différence de forme avec ceux du système cyclique de Netto que nous connaissons[8]). Nous savons qu'il n'y a que *deux* systèmes de triples différents pour $N = 13$, le système cyclique de Netto et le système dit de Kirkman dont les groupes de substitutions sont respectivement d'ordre 39 et 6. Cela nous suffit donc pour être assuré que le $\Delta_{13}^3$ en question est le système de Kirkman, comme il fallait l'établir.

---

[8]) *S. Bays*, loc. cit. note 6, p. 82.

(Reçu le 11 janvier 1935.)