Über lineare, verschiebungstreue Funktionaloperationen und die Nullstellen ganzer Funktionen.

Über lineare, verschiebungstreue Funktionaloperationen und die Nullstellen ganzer Funktionen

Von Eduard Benz, Winterthur

Einleitung

Zum ersten Male hat Laguerre ganze Funktionen als Grenzwerte von Polynomfolgen untersucht, deren Nullstellen sämtlich reell bzw. sämtlich von gleichem Vorzeichen (d. h. die nicht verschwindenden sämtlich positiv oder sämtlich negativ) sind[1]). In der Abhandlung: „Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen"[2]) werden von den Herren G. Pólya und J. Schur auf Grund von Überlegungen algebraischen Charakters u. a. notwendige und hinreichende Kriterien dafür hergeleitet, daß eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten eine ganze Funktion darstelle, die die Eigenschaft hat, Grenzwert einer reellkoeffizientigen Polynomfolge von einer der beschriebenen Arten zu sein. Das daselbst entwickelte Beweisverfahren gestattet eine Verallgemeinerung der erwähnten Ergebnisse, d. h. ihre Ausdehnung auf gewisse ganze Funktionen bzw. Polynomfolgen mit komplexen Nullstellen, die sämtlich in einem konvexen Winkelbereich liegen, dessen Scheitel der Nullpunkt ist[3]). Die Definition der in Frage stehenden Funktionsklassen, deren Elemente wir als „gerichtete Funktionen" bezeichnen wollen, sowie Formulierung und Beweis der sie charakterisierenden Hauptsätze, bilden im wesentlichen den Inhalt des ersten Kapitels der vorliegenden Arbeit.

Die beiden folgenden Kapitel bringen Untersuchungen über lineare, mit der Derivation vertauschbare Funktionaloperationen, und zwar handelt es sich in der Hauptsache um den Beweis einiger von Herrn G. Pólya in den Comptes Rendus angekündigten Sätze[4]).

Im zweiten Kapitel wird das Operationsfeld gebildet von der Gesamtheit der Polynome einer komplexen Variablen, im dritten von Exponentialsummen. Es werden allgemeinste Funktionaloperationen der er-

[1]) *Laguerre*, Œuvres t. I. p. 174—177, Paris, Gauthier-Villars, 1898.
[2]) *G. Pólya* und *J. Schur*, Journal f. d. reine u. angew. Math. Bd. 144, S. 89—113.
[3]) Vgl. auch: *G. Pólya*, Journal f. d. reine u. angew. Math. Bd. 145 (1915), S. 224—249.
[4]) *G. Pólya*, Comptes Rendus, Bd. 183 (1926), S. 413—414, 467—468.

wähnten Art bestimmt, denen gegenüber gewisse, die Nullstellen betreffende Eigenschaften von Funktionen des Operationsfeldes invariant sind. Die ersten Fragestellungen und Ergebnisse in dieser Richtung stammen gleichfalls von Laguerre[5]).

I. Kapitel

Gerichtete Funktionen

1. Mit $\mathfrak{A}$ werde im folgenden ein Bereich in der Ebene der komplexen Zahlen bezeichnet, bestehend aus einer vom Nullpunkt O ausgehenden Halbgeraden, oder aus einem abgeschlossenen Winkelraum, dessen Scheitelpunkt in O liegt und dessen Öffnungswinkel $\omega < \pi$ ist.

Der Bereich $\mathfrak{B}$ bedeute eine durch O gehende Gerade oder eine abgeschlossene Halbebene, die von einer solchen Geraden begrenzt wird. φ sei der Winkel, um den die reelle Axe in positivem Sinne gedreht werden muß, bis sie erstmals mit der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt.

$\mathfrak{A} + c$ bezeichne denjenigen Bereich, der aus $\mathfrak{A}$ durch Translation um den Vektor c hervorgeht; analoges gilt für $\mathfrak{B} + c$.

$\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ seien die bezüglich der reellen Axe symmetrisch liegenden Bereiche zu $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$.

2. Die beiden Klassen von Funktionen, die wir als *gerichtet* bezeichnen wollen, und denen die Untersuchungen dieses Kapitels gelten, lassen sich nun folgendermaßen definieren:

a) Unter einer bezüglich $\mathfrak{A}$ gerichteten Funktion verstehen wir eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion

$$(a) \qquad G(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots,$$

deren Nullstellen sämtlich in $\mathfrak{A}$ liegen, und deren Produktzerlegung sich in der Form

$$(\mathrm{I}) \qquad G(z) = \frac{a_r}{r!} \cdot z^r \cdot e^{-\frac{z}{\alpha}} \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$$

schreiben läßt, wo α eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, die in $\mathfrak{A}$ liegt, oder $\frac{1}{\alpha}$ durch 0 zu ersetzen ist.

---

[5]) Vgl. a. a. O. 1), S. 199—202.

Eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion

$$(b) \qquad H(z) = b_0 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \cdots$$

heiße bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtet, wenn ihre sämtlichen Nullstellen in $\mathfrak{B}$ liegen und ihre Produktzerlegung folgende Gestalt aufweist:

$$(\mathrm{II}) \qquad H(z) = \frac{b_r}{r!} z^r \cdot e^{-\gamma z^2 - \frac{z}{\beta}} \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu}\right) \cdot e^{\frac{z}{\beta_\nu}},$$

wo $\gamma = |\gamma| e^{-2i\varphi}$, $|\gamma| \geqq 0$, φ die in Nr. 1 angegebene Bedeutung bezüglich $\mathfrak{B}$ hat und die nicht verschwindende Konstante β in $\mathfrak{B}$ liegt oder $\frac{1}{\beta}$ durch 0 zu ersetzen ist.

Setzt man $-\frac{1}{\delta_\varkappa} = -\frac{1}{\beta} + \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{1}{\beta_\nu}$, so soll auch $\delta_\varkappa$ für jedes $\varkappa$ dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören oder $\frac{1}{\delta_\varkappa} = 0$ sein.

Das Produkt $\prod_{(\nu)}$ kann, sowohl unter *a*) als auch unter *b*), unendlich viele oder endlich viele, eventuell überhaupt keine Faktoren umfassen; in dem letztgenannten, äußersten Fall ist unter $\prod_{(\nu)}$ die Zahl 1 zu verstehen. Wenn das Produkt $\prod_{(\nu)}$ unendlich viele Faktoren umfaßt, wird im Falle *b*) noch gefordert, daß $\sum_{(\nu)} \frac{1}{|\beta_\nu|^2}$ konvergiert*).

Jede bezüglich $\mathfrak{A}$ gerichtete Funktion ist ersichtlich auch bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtet, sofern $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Die Konstanten sind spezielle gerichtete Funktionen.

3. Die so definierten Funktionenklassen werden durch nachstehende zwei Hauptsätze vollständig charakterisiert.

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe*

$$(a) \qquad G(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots$$

---

*) Im Falle *a*) folgt die Konvergenz von $\sum_{(\nu)} \frac{1}{|a_\nu|}$ schon aus der Konvergenz des Produktes. Vgl. a. a. O. 7), Bd. I, III 36.

eine bezüglich $\mathfrak{A}$ gerichtete Funktion darstellt, läßt sich auf zwei verschiedene Arten formulieren:

1. *Es existiert eine Polynomfolge*

$$(a_1). \qquad G_n(z) = a_{n0} + \frac{a_{n1}}{1!} z + \frac{a_{n2}}{2!} z^2 + \cdots \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

mit Koeffizienten, die der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} a_{n\nu} = a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügen und deren sämtliche Nullstellen in $\mathfrak{A}$ liegen.

2. *Sämtliche Nullstellen der Polynome*

$$(a_2) \qquad g_n(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \cdots \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

liegen in $\mathfrak{A}$.

Satz 2. *Die Potenzreihe*

$$(b) \qquad H(z) = b_0 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \cdots$$

stellt dann und nur dann eine bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtete Funktion dar, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. *Es läßt sich eine Polynomfolge*

$$(b_1) \qquad H_n(z) = b_{n0} + \frac{b_{n1}}{1!} z + \frac{b_{n2}}{2!} z^2 + \cdots \ (n = 1, 2, \cdots)$$

angeben mit

$$\lim_{n \to \infty} b_{n\nu} = b_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

deren sämtliche Nullstellen im Bereich $\mathfrak{B}$ liegen.

2. *Sämtliche Nullstellen der Polynome*

$$(b_2) \qquad h_n(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \binom{n}{2} b_2 z^2 + \cdots \ (n = 1, 2, \cdots)$$

liegen in $\mathfrak{B}$.

Sind die a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$) reell und ist $\mathfrak{A}$ die positive reelle Axe, so geht Satz 1 über in den bekannten Satz über positiv gerichtete Funktionen. Analog ist in Satz 2 das Kriterium für reell gerichtete Funktionen als Spezialfall enthalten, der sich ergibt, wenn sämtliche b_ν reelle Zahlen, $\mathfrak{B}$ die reelle Axe bedeuten[6]).

4. Um den Beweis dieser beiden Sätze ohne Unterbrechung führen zu können, sollen in diesem Abschnitt einige Hilfssätze zusammengestellt werden, die wir zu seiner Durchführung benötigen.

Hilfssatz 1. *Das kleinste konvexe Polygon, das die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ einschließt, werde mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Dann besitzt $f'(z)$ keine Nullstelle außerhalb $\mathfrak{P}$. (Satz von Gauß.)*[7])

Hilfssatz 2. *Bedeutet $f(z)$ ein beliebiges Polynom, $c \neq 0$ eine Konstante, so liegen die Nullstellen von*

$$g(z) = f(z) - c \cdot f'(z)$$

im kleinsten konvexen Polygon, das die Halbstrahlen, die von den Nullstellen von $f(z)$ aus parallel zum Vektor c gezogen sind, enthält[8]).

Beweis: $z_1, z_2, \cdots z_m$ seien die Nullstellen von $f(z)$, a bedeute einen beliebigen Punkt des kleinsten konvexen Polygons, das sie enthält. Die Nullstellen der Ableitung des Polynoms

$$P(z) = \left(1 - \frac{z}{a + nc}\right)^n \cdot f(z) \qquad (n > 0,\ n \text{ ganz}),$$

die nicht mit Nullstellen von $P(z)$ identisch sind, stimmen überein mit den Nullstellen der logarithmischen Ableitung von $P(z)$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d}{dz} \log P(z) = \frac{n}{z - a - nc} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

und liegen nach Hilfssatz 1 im kleinsten konvexen Polygon, das die Punkte $z_1, z_2, \ldots z_m$, $a + nc$ enthält. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ schließt man, daß alle Nullstellen von

[6]) Vgl. a. a. O. 2) und betreffend Benennung dieser Funktionen: *G. Pólya*, Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung, Bd. 38 (1929), S. 161—168.

[7]) Vgl. *G. Pólya* und *G. Szegő*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925), Bd. 1, Kap. III, Aufg. 31.

[8]) Es läßt sich leicht beweisen, daß sämtliche Nullstellen von $g(z)$ im kleinsten konvexen Polygon liegen, das $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} + mc$ enthält, wenn $\mathfrak{P}$ die in Hilfssatz 1 angegebene Bedeutung für $f(z)$, m seinen genauen Grad bezeichnet. Vgl. a. a. O. 7), Bd. II; V 114.

$$-\frac{1}{c}+\frac{f'(z)}{f(z)}$$

und somit auch diejenigen von

$$-cf(z)\cdot\left[-\frac{1}{c}+\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=f(z)-c\cdot f'(z)=g(z)$$

in dem in der Behauptung angegebenen Bereich liegen.

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein unendlicher, konvexer Bereich der komplexen Zahlenebene, der den Nullpunkt, jedoch nicht alle Punkte der Ebene, enthält. Die Menge der von O ausgehenden Halbgeraden, die in $\mathfrak{K}$ enthalten sind, bedeckt einen Bereich, der als „Strahlinhalt" $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden möge. $\mathfrak{S}$ ist, je nach der Beschaffenheit von $\mathfrak{K}$, ein Bereich $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$.*

Mit $L(x)=\sum_{\nu=0}^{n} l_\nu x^\nu$ werde ein Polynom n-ten Grades bezeichnet, dessen Nullstellen sämtlich in $\overline{\mathfrak{S}}$, mit $f(z)=\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu z^\mu$ ein Polynom m-ten Grades, dessen Nullstellen sämtlich in $\mathfrak{K}$ liegen.

Unter diesen Voraussetzungen hat das Polynom

$$L(D)\,f(z)=\sum_{\nu=0}^{n} l_\nu\cdot f^{(\nu)}(z)$$

keine Nullstelle außerhalb $\mathfrak{K}$.

Beweis: Wenn $L(x)$ oder $f(z)$ Konstanten sind, ist der Satz trivial. Im andern Fall können wir, nach passender Verfügung über einen konstanten Faktor, setzen:

$$L(x)=x^r\cdot\prod_{\nu=0}^{n-r}(1-c_\nu x)\,,\qquad \begin{array}{c} n\geqq 1\,,\\ 0\leqq r\leqq n, \end{array}$$

wobei alle c_ν in $\mathfrak{S}$ liegen.

Es wird somit

$$L(D)\,f(z)=D^r\,(1-c_1\,D)\,(1-c_2\,D)\cdot\cdots\cdot(1-c_{n-r}\,D)\,f(z),$$

aus welcher Darstellung hervorgeht, daß diese Transformierte aus $f(z)$ durch Wiederholung ähnlicher Schritte erzeugt wird, so daß es genügt, die Richtigkeit des Satzes für $n=1$ zu beweisen.

$\mathfrak{P}$ habe dieselbe Bedeutung für $f(z)$ wie in Hilfssatz 1; nach Voraussetzung ist es demnach in $\mathfrak{K}$ enthalten. Infolge der Konvexität von $\mathfrak{K}$ gilt dasselbe auch für den in Hilfssatz 2 erwähnten Bereich, wenn c in $\mathfrak{S}$ liegt.

Es sei nun $L(x) = x$, also

$$L(D) f(z) = f'(z).$$

Nach Hilfssatz 1 liegen alle Nullstellen von $f'(z)$ in $\mathfrak{P}$, also auch in $\mathfrak{K}$.

Ist aber $L(x) = 1 - cx$ und liegt c in $\mathfrak{S}$, so folgt aus Hilfssatz 2 und der eben gemachten Bemerkung, daß sämtliche Nullstellen von

$$L(D) f(z) = f(z) - c f'(z)$$

ebenfalls in $\mathfrak{K}$ liegen, womit Hilfssatz 3 vollständig bewiesen ist.

5. Wir wenden uns nun zum Beweis der beiden Hauptsätze. Zuerst soll gezeigt werden, daß die Kriterien 1) und 2) äquivalent sind.

Es sei

$$G_m(z) = a_{mo} + \frac{a_{m1}}{1!} z + \frac{a_{m2}}{2!} z^2 + \cdots \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

eine Polynomfolge (a_1). Die Anwendung von Hilfssatz 3 mit $\mathfrak{K} \equiv \overline{\mathfrak{A}}$ auf $f(z) = z^n$ ergibt, daß sämtliche Nullstellen von

$$G_m(D) z^n = a_{mo} z^n + \binom{n}{1} a_{m1} z^{n-1} + \cdots + a_{mn}$$

für jedes m in $\overline{\mathfrak{A}}$ liegen. Zufolge eines von Hurwitz herrührenden Satzes[9]) trifft diese Eigenschaft auch für das, durch Grenzübergang $m \to \infty$, unter Berücksichtigung von

$$\lim_{m \to \infty} a_{m\nu} = a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

erhaltene Polynom

$$f_n(z) = G(D) z^n = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

zu. Alle Nullstellen von

$$g_n(z) = z^n \cdot f_n\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

liegen folglich in $\overline{\mathfrak{A}}$, und da n beliebig gewählt war $(n = 1, 2, \cdots)$, bilden die Polynome $g_n(z)$ eine Folge (a_2).

[9]) Vgl. a. a. O. 7), Bd. 1, III 170, 201.

Ist umgekehrt

$$g_n(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine derartige Folge, so liefert die Ersetzung von z durch $\frac{z}{n}$

$$G_n^*(z) = g_n\left(\frac{z}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{a_2}{2!} z^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{a_3}{3!} z^3 + \cdots$$

Polynome, die, wie man sich unmittelbar überzeugt, eine Folge (a_1) bilden.

Der Beweis für die Äquivalenz der Polynomfolgen (b_1) und (b_2) verläuft vollkommen analog.

6. Jede gerichtete Funktion geht durch die Transformation

$$z' = z \cdot e^{i\psi} \quad (\psi \text{ reell})$$

in eine Funktion vom gleichen Typus über (s. Definition). Wir können daher im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Bereich $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ durch passende Drehung um den Nullpunkt in folgende spezielle Lage gebracht worden sei:

Die positiv-imaginäre Halbaxe soll die Winkelhalbierende von $\mathfrak{A}$ sein oder mit $\mathfrak{A}$ zusammenfallen je nach Beschaffenheit; $\mathfrak{B}$ sei die reelle Axe oder die Halbebene $\mathfrak{I}\, z \geqslant 0$ (also $\varphi = 0$).

7. Wir setzen nun voraus, daß die mit Hilfe der Koeffizienten der Potenzreihe

$$(a) \qquad G(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots$$

gebildeten Polynome

$$g_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu z^\nu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine Folge (a_2) darstellen.

$$(1) \qquad G_n^*(z) = g_n\left(\frac{z}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot a_\nu \cdot \left(\frac{z}{n}\right)^\nu \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

sind dann Polynome einer Folge (a_1). Der triviale Fall, daß alle Koeffizienten a_ν der Reihe (a) verschwinden, also $G(z) \equiv 0$ ist, soll ausgeschlossen werden und a_r den ersten von Null verschiedenen Koeffizienten bedeuten. Rechnet man den Punkt $z = \infty$ als zu $\mathfrak{A}$ gehörend und schreibt dem Polynom (1), falls

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0, \quad a_{n-k} \neq 0,$$

die k-fache Nullstelle $z = \infty$ zu, so kann (1) für jedes $n > r$ in der Gestalt

$$G_n^*(z) = \binom{n}{r} \cdot a_r \left(\frac{z}{n}\right)^r \cdot \prod_{\nu=1}^{n-r} \left(1 - \frac{z}{a_{n\nu}}\right) \tag{2}$$

dargestellt werden, wobei sämtliche $a_{n\nu}$ in $\mathfrak{A}$ liegen, mit ihrer Vielfachheit gezählt und nach wachsendem Absolutbetrag, die darin übereinstimmenden nach wachsendem Argument, geordnet sein sollen.

Es ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{a_{n\nu}} = -\frac{n-r}{n} \cdot \frac{a_{r+1}}{(r+1) \cdot a_r}, \tag{3}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n-r} \mathfrak{J} \frac{1}{a_{n\nu}} = \frac{n-r}{n} \cdot \mathfrak{J} \frac{a_{r+1}}{(r+1)\, a_r}. \tag{4}$$

Aus der speziellen Lage von $\mathfrak{A}$ folgt wegen

$$\frac{\pi - \omega}{2} \leqslant \arg a_{n\nu} \leqslant \frac{\pi + \omega}{2},$$

$$\frac{1}{|a_{n\nu}|} \leqslant -\frac{1}{\cos\frac{\omega}{2}} \cdot \mathfrak{J} \frac{1}{a_{n\nu}};$$

in Verbindung mit (4) folgt also

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{|a_{n\nu}|} \leqslant \frac{n-r}{n} \cdot \frac{1}{(r+1) \cdot \cos\frac{\omega}{2}} \cdot \mathfrak{J} \frac{a_{r+1}}{a_r} \leqslant \frac{n-r}{n} \cdot \frac{1}{(r+1) \cos\frac{\omega}{2}} \cdot \left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|. \tag{5}$$

Ferner geht aus (2) hervor

$$(-1)^{n-r} \binom{n}{r} a_r \cdot \frac{1}{n^r} \prod_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{a_{n\nu}} = \frac{a_n}{n^n}.$$

Somit wird

$$\prod_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{|a_{n\nu}|} = \frac{1}{n^{n-r}\binom{n}{r}} \left|\frac{a_n}{a_r}\right|. \tag{6}$$

Wendet man auf (5) und (6) den Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel an[10]), so erhält man (nach Division durch $n!$ auf beiden Seiten) leicht die Ungleichung

$$(7) \qquad \left|\frac{a_n}{n!}\right| \leqq \frac{1}{(n-r)!}\left|\frac{a_r}{r!}\right| \cdot \left|\frac{a_{r+1}}{(r+1)\cos\frac{\omega}{2}\cdot a_r}\right|^{n-r},$$

aus der hervorgeht, daß die Reihe (a) eine ganze Funktion darstellt, deren Ordnung und Geschlecht höchstens 1 ist.

Die Polynome (1) konvergieren, wie man aus der Abschätzung (7) leicht ersieht, in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $G(z)$. Bedeuten α_ν ($\nu = 1, 2, \cdots$) die von Null verschiedenen, in der vorgängig beschriebenen Weise geordneten Nullstellen von $G(z)$, so folgt deshalb aus dem bereits zitierten Grenzwertsatz von Hurwitz[11]) in Verbindung mit Ungleichung (5), daß die α_ν in $\mathfrak{A}$ liegen und

$$\sum_{(\nu)} \frac{1}{|\alpha_\nu|} \leqq \frac{1}{(r+1)\cdot\cos\frac{\omega}{2}}\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|.$$

Hieraus folgt, auf Grund der Theorie der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung, daß

$$(8) \qquad G(z) = \frac{a_r}{r!} z^r \cdot e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right).$$

Es bleibt nur noch die über α gemachte Behauptung zu beweisen übrig. Wir schließen folgendermaßen:

Aus (8) wird unmittelbar die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{1}{\alpha} + \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha_\nu} = -\frac{a_{r+1}}{(r+1)a_r}$$

gewonnen, anderseits gilt für die Nullstellen $\alpha_{n\nu}$ der Polynome (1) die bereits erwähnte Gleichung

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{\alpha_{n\nu}} = -\frac{n-r}{n}\cdot\frac{a_{r+1}}{(r+1)a_r}.$$

---

10) Betr. Beweismethode vgl. a. a. O. 2).

11) Vgl. a. a. O. 9).

Subtrahieren wir (3) von (9), so wird

$$\frac{1}{a} + \sum_{(\nu)} \frac{1}{a_\nu} - \sum_{\mu=1}^{n-r} \frac{1}{a_{n\mu}} = -\frac{r \cdot a_{r+1}}{n \cdot (r+1) \cdot a_r}. \tag{10}$$

Zu jeder vorgegebenen, beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$, existieren offenbar zwei ganze, positive Zahlen n_0 und ν_0 von der Beschaffenheit, daß die beiden Ungleichungen

$$\left| \frac{r \cdot a_{r+1}}{n \cdot (r+1)\, a_r} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für jedes } n > n_0\,, \tag{11}$$

$$\left| \sum_{\nu > m} \frac{1}{a_\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für jedes } m > \nu_0 \tag{12}$$

erfüllt sind.

Nun werde, was immer möglich ist, die positive Zahl R beliebig groß, jedoch so gewählt, daß die Anzahl der Nullstellen von $G(z)$ in $|z| < R$ die Zahl $\nu_0 + r$ nicht untertrifft und $|a_\nu| \neq R$ gilt für jedes ν. Diese Anzahl werde mit $N(R) + r$ bezeichnet; dann läßt sich wegen der Anordnung der Nullstellen und auf Grund des Satzes von Hurwitz eine positive ganze Zahl n_1 bestimmen, derart, daß $G_n^*(z)$ für jedes $n > n_1$ in $|z| \leqslant R$ dieselbe Anzahl Nullstellen besitzt wie $G(z)$ und daß außerdem die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N(R)} \left(\frac{1}{a_\nu} - \frac{1}{a_{n\nu}} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

für jedes $n > n_1$ erfüllt ist.

Bedeutet m die größte der Zahlen n_0, ν_0 und n_1 und schreiben wir (10) in der Form

$$\frac{1}{a} - \sum_{|a_{n\nu}| > R} \frac{1}{a_{n\nu}} = -\frac{1}{n} \frac{r\, a_{r+1}}{(r+1)\, a_r} + \sum_{\nu=1}^{N(R)} \left(\frac{1}{a_{n\nu}} - \frac{1}{a_\nu} \right) - \sum_{|a_\nu| > R} \frac{1}{a_\nu}\,,$$

so folgt wegen (11), (12) und (13) für jedes $n > m(\varepsilon, R)$

$$\left| \frac{1}{a} - \sum_{\nu=N(R)+1}^{n} \frac{1}{a_{n\nu}} \right| < \varepsilon\,. \tag{14}$$

Da sich diese Ungleichung für jedes beliebig klein vorgegebene $\varepsilon > 0$

realisieren läßt, und mit $\frac{1}{a_{n\nu}}$ auch $\sum \frac{1}{a_{n\nu}}$ in $\mathfrak{A}$ liegt, so folgt aus dieser Darstellung, wenn $\frac{1}{a} \neq 0$, daß a in $\mathfrak{A}$ liegt.

Ist umgekehrt $G(z)$ eine in bezug auf einen Bereich $\mathfrak{A}$ gerichtete Funktion, so ist die in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $G(z)$ konvergierende Polynomfolge

$$G_n^{**}(z) = \frac{a_r}{r!} z^r \left(1 - \frac{z}{na}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n-r} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$$

von der verlangten Art — d. h. eine Folge (a_1) — womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

8. Zum Beweis des Satzes 2 übergehend, wollen wir die Potenzreihe

$$(b) \qquad H(z) = b_0 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \cdots$$

als nicht identisch verschwindend, b_r als ersten von Null verschiedenen Koeffizienten voraussetzen. Ferner mögen die Polynome

$$h_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu z^\nu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine Folge (b_2), somit die Polynome

$$H_n^*(z) = h_n\left(\frac{z}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu \left(\frac{z}{n}\right)^\nu$$

eine Folge (b_1) bilden. Für letztere gilt dann eine Darstellung

$$(15) \qquad H_n^*(z) = \binom{n}{r} b_r \left(\frac{z}{n}\right)^r \prod_{\nu=1}^{n-r} \left(1 - \frac{z}{\beta_{n\nu}}\right), \qquad n > r,$$

wobei die Nullstellen $\beta_{n\nu}$ in der früher beschriebenen Weise geordnet sind und für jedes $n > r$ und jedes ν der Ungleichung

$$(16) \qquad -\mathfrak{J} \frac{1}{\beta_{n\nu}} \geqq 0$$

genügen. Insbesondere kann $\frac{1}{\beta_{n\nu}}$ auch 0 bedeuten.

Aus (15) gewinnt man die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{\beta_{n\nu}} = -\frac{n-r}{n} \cdot \frac{b_{r+1}}{(r+1)b_r}, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{\beta_{n\nu}^2} = \frac{1}{(r+1)^2 b_r^2}\left[\left(\frac{n-r}{n} b_{r+1}\right)^2 - 2\frac{(n-r)(n-r-1)(r+1)}{n^2(r+2)} b_r b_{r+2}\right], \tag{18}$$

$$(-1)^{n-r} \prod_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{\beta_{n\nu}} = \frac{b_n}{n^{n-r}\binom{n}{r} b_r}, \tag{19}$$

und aus der letzten Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{|\beta_{n\nu}|} = \frac{1}{n^{n-r}\binom{n}{r}}\left|\frac{b_n}{b_r}\right|. \tag{20}$$

Beachtet man nun, daß

$$\frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2} = \Re\frac{1}{\beta_{n\nu}^2} + 2\left(\Im\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right)^2,$$

so wird wegen (16), (17) und (18)

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2} \leqslant \frac{1}{(r+1)^2|b_r|^2} \cdot \left\{\left(\frac{n-r}{n}\left|b_{r+1}\right|\right)^2 + 2\frac{(n-r)(n-r-1)}{n^2}\left|\frac{r+1}{r+2} b_r b_{r+2}\right|\right\}$$
$$+ 2\left(\frac{n-r}{n}\left|\frac{b_{r+1}}{(r+1)b_r}\right|\right)^2,$$

(21)
$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2} \leqslant \frac{1}{(r+1)^2|b_r|^2} \cdot \left\{3\left(\frac{n-r}{n}\left|b_{r+1}\right|\right)^2 + 2\frac{(n-r)(n-r-1)}{n^2} \cdot \left|\frac{r+1}{r+2} b_r b_{r+2}\right|\right\}.$$

Die Anwendung des Satzes über das arithmetische und das geometrische Mittel auf (20) und (21) ergibt, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$|b_n|^2 \leqslant \binom{n}{r}^2 |b_r|^2 \left\{\frac{3(n-r)\,|b_{r+1}|^2 + 2(n-r-1)\,\frac{r+1}{r+2}\,|b_r b_{r+2}|}{(r+1)^2\,|b_r|^2}\right\}^{n-r},$$

oder

$$\left|\frac{b_n}{n!}\right| \leqslant \frac{n^{\frac{n}{2}} c^{\frac{n}{2}}}{n!},$$

wo c eine passend gewählte Konstante ist, die nur von r, b_r, b_{r+1} und b_{r+2} abhängt.

Aus dieser Ungleichung kann geschlossen werden, daß die Reihe (b) eine ganze Funktion von der Ordnung und vom Geschlecht $\leqq 2$ darstellt, und daß die Polynome (15) in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $H(z)$ konvergieren. Bezeichnet man die von Null verschiedenen, geordneten Nullstellen der letztern Funktion mit β_ν, so ist unter Berücksichtigung des Grenzwertsatzes von Hurwitz wegen (21)

$$\sum_{(\nu)} \frac{1}{|\beta_\nu|^2} \text{ konvergent,}$$

aus (16) und (17) folgt ferner, daß

$$\sum_{(\nu)} \mathfrak{I} \frac{1}{\beta_\nu} \text{ konvergent und}$$

$$-\sum_{(\nu)} \mathfrak{I} \frac{1}{\beta_\nu} \leqq \frac{1}{r+1} \mathfrak{I} \frac{b_{r+1}}{b_r}. \tag{22}$$

$H(z)$ läßt infolgedessen, auf Grund der Theorie der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung, eine Produktentwicklung von der Form

$$H(z) = \frac{b_r}{r!} z^r e^{-\gamma z^2 - \frac{z}{\beta}} \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu}\right) \cdot e^{\frac{z}{\beta_\nu}}$$

zu, und da hieraus

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{b_{r+1}}{(r+1)\, b_r},$$

$$-\mathfrak{I} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{r+1} \mathfrak{I} \frac{b_{r+1}}{b_r}$$

abgelesen wird, erhellt aus (22), daß

$$\sum_{(\nu)} \mathfrak{I} \frac{1}{\beta_\nu} \geqq \mathfrak{I} \frac{1}{\beta}. \tag{23}$$

Hieraus folgt die im Abschnitt Nr. 2 unter b) über δ_k aufgestellte Behauptung.

Die γ betreffende Behauptung beweisen wir folgendermaßen:

Aus $$(-1)^r H(z) \cdot H(-z) = \frac{b_r{}^2}{(r!)^2} z^{2r} e^{-2\gamma z^2} \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{z^2}{\beta_\nu^2}\right)$$

berechnet man

$$(24)\qquad 2\gamma+\sum_{(\nu)}\frac{1}{\beta_\nu^2}=\frac{1}{(r+1)^2 b_r^2}\left(b_{r+1}^2-2\frac{r+1}{r+2}b_r\,b_{r+2}\right).$$

Völlig analog zum vorangehenden Abschnitt Nr. 7 läßt sich, unter Benützung von (18), zeigen, daß zu zwei positiven Zahlen ε, R, (ε beliebig klein vorgegeben, R genügend groß) eine ganze positive Zahl m (ε, R) bestimmt werden kann, derart, daß die Ungleichung

$$(25)\qquad \left|2\gamma-\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{\beta_{n\nu}^2}\right|<\varepsilon$$

für jedes $n>m$ erfüllt ist.

Setzt man $\beta=\beta'+i\,\beta''$, so folgt

$$\frac{1}{|\beta|^2}\geqslant\Re\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta'^2-\beta''^2}{|\beta|^4}=\frac{1}{|\beta|^2}-\frac{2\beta''^2}{|\beta|^4}\geqslant\frac{1}{|\beta|^2}-\frac{2}{|\beta|}\left|\Im\frac{1}{\beta}\right|,$$

$$\left|\Im\frac{1}{\beta^2}\right|=\frac{2|\beta'|\beta''}{|\beta|^4}\leqslant\frac{2}{|\beta|}\left|\Im\frac{1}{\beta}\right|.$$

Ferner gilt wegen (16) die Gleichung

$$\sum\left|\Im\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right|=\left|\sum\Im\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right|,$$

so daß für jedes $n>m$ (ε, R)

$$(26)\qquad \begin{gathered}\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2}\geqslant\Re\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{\beta_{n\nu}^2}>\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2}-\frac{2}{R}\left|\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\Im\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right|,\\ \left|\Im\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{\beta_{n\nu}^2}\right|<\frac{2}{R}\left|\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right|.\end{gathered}$$

Auf Grund von (16) und (17) folgt aber

$$(27)\qquad \frac{2}{R}\left|\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\Im\frac{1}{\beta_{n\nu}}\right|\leqslant\frac{2}{R}\frac{n-r}{n}\Im\frac{b_{r+1}}{(r+1)b_r}\leqslant\frac{2}{R(r+1)}\left|\frac{b_{r+1}}{b_r}\right|$$

und da R in (25) gewiß als so groß vorausgesetzt werden darf, daß die rechte Seite von (27) $<\varepsilon$ ist, gewinnen wir aus (25) und (26)

$$\left|\Re\gamma-\frac{1}{2}\sum_{|\beta_{n\nu}|>R}\frac{1}{|\beta_{n\nu}|^2}\right|<\varepsilon,$$

$$|\Im\gamma|<\varepsilon,$$

gültig für jedes $n > m(\varepsilon, R)$, wie klein auch das vorgegebene ε gewählt worden sei. Hieraus kann geschlossen werden, daß γ reell und nicht negativ ist.

Läßt umgekehrt die ganze Funktion eine Produktzerlegung von der Form (II) zu, so ist es leicht, eine zugehörige Polynomfolge (b_1) anzugeben. Man setze

$$-\frac{1}{\delta_\nu} = -\frac{1}{\beta} + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\beta_\mu},$$

dann ist ersichtlich $\Im\, \delta_\nu \geqq 0$ für jedes ν. Bestimmt man nun n_ν derart, daß für $|z| \leqq \nu$

$$\left|\left(1 - \frac{z}{n_\nu \delta_\nu}\right)^{n_\nu} - e^{-\frac{z}{\delta_\nu}}\right| < \frac{1}{\nu},$$

so gilt gleichmäßig in jedem endlichen Bereich

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(1 - \frac{\gamma z^2}{\nu}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{z}{n_\nu \delta_\nu}\right)^{n_\nu} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{\beta_\mu}\right) = \lim_{\nu \to \infty} H_\nu(z) = H(z).$$

Damit ist auch Satz 2 vollständig bewiesen.

9. Aus den eben bewiesenen Sätzen ergeben sich ohne Schwierigkeit einige Folgerungen.

a) *Ist*
$$\Omega(z) = c_0 + \frac{c_1}{1!} z + \frac{c_2}{2!} z^2 + \cdots$$

eine gerichtete Funktion, so ist ihre Ableitung

$$\Omega'(z) = c_1 + \frac{c_2}{2!} z + \frac{c_3}{3!} z^2 + \cdots$$

dem gleichen Typus angehörig.

Denn bedeutet $\Omega_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ eine (sicher existierende) Polynomfolge mit sämtlichen Nullstellen in $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$, die in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $\Omega(z)$ konvergiert, so besitzt auch die Folge $\Omega_n'(z)$ nur derartige Nullstellen (Hilfssatz 1) und konvergiert bekanntlich in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $\Omega'(z)$[12]).

b) *Verschwinden bei einer gerichteten Funktion zwei aufeinander folgende Koeffizienten c_ν und $c_{\nu+1}$, so ist*

---

[12]) Vgl. z. B. *Osgood*, Funktionentheorie, Bd. I, S. 257, Satz 5.

$$\Omega(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu\,!} z^\mu$$

entweder ein Polynom höchstens vom Grad $\nu - 1$, *oder es ist* $z = 0$ *eine Nullstelle mindestens der Ordnung* $\nu + 2$.

Da nämlich als Nullstellenbereich die Halbebene $\mathfrak{I}\, z \geqq 0$ angenommen werden darf, schließt man (mit Hilfe eines Satzes von Biehler und Satz 2), daß, $c_\mu = c'_\mu + i\, c''_\mu$ gesetzt,

$$\Omega(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c'_\mu}{\mu} z^\mu + i \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c''_\mu}{\mu\,!} z^\mu = \Omega_1(z) + i\, \Omega_2(z),$$

wo $\Omega_1(z)$ und $\Omega_2(z)$ reell gerichtete Funktionen bedeuten, für welche die Aussage zutrifft[13]). Falls keine von ihnen identisch verschwindet, zeigt sich als einfache Folgerung aus Satz 2, daß Ω_1 und Ω_2 gleichzeitig beide rational oder beide transzendent sein müssen, womit alles bewiesen ist.

Wenn ferner z.B. $c'_\nu = 0$, $\quad c'_{\nu-1} \neq 0$, $\; c'_{\nu+1} \neq 0$ ist, gilt

$$c'_{\nu-1} \cdot c'_{\nu+1} < 0\,.$$

c) *Die ganze Funktion*

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu\,!} z^\nu$$

sei bezüglich $\mathfrak{A}$ *und*

$$g(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu!} z^\mu$$

negativ gerichtet (d. h. $g(-z)$ *positiv gerichtet). Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu\, c_\nu}{\nu\,!} z^\nu$$

beständig und stellt eine bezüglich $\mathfrak{A}$ *gerichtete Funktion dar.*

Nach Satz 1 liegen ja die Nullstellen der Polynome

$$g_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu\, z^\nu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

sämtlich in $\mathfrak{A}$, diejenigen von

---

[13]) Vgl. z. B. a. a. O. 2).

$$\varphi_n(z) = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} c_\mu z^\mu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

sind alle reell und nicht positiv. Mit Hilfe eines Satzes von Grace[14]) gelangt man zum Schluß, daß sämtliche Nullstellen der Polynome

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu c_\nu z^\nu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

in $\mathfrak{A}$ liegen, was alles beweist.

Die Besselsche Funktion

$$J_0(2i\sqrt{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu!)^2}$$

genügt den über $g(z)$ zu stellenden Voraussetzungen, somit ist auch

$$\Omega(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu c_\nu}{(\nu!)^2} z^\nu$$

eine bezüglich $\mathfrak{A}$ gerichtete Funktion, was eine Übertragung des Maloschen Satzes auf ganze Funktionen mit komplexen Nullstellen bedeutet[15]).

Wie man den Satz für Funktionen $H(z)$, die bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtet sind, bzw. für positiv gerichtete Funktionen zu modifizieren hat, ist evident.

II. Kapitel

Über lineare, verschiebungstreue Funktionaloperationen und die Nullstellen der Polynome

1. Zwischen den Elementen zweier Klassen von Funktionen einer Variabeln z möge eine Beziehung bestehen von der Art, daß jeder Funktion der ersten Klasse eine oder mehrere Funktionen der zweiten Klasse zugeordnet seien. Diese Beziehung kann aufgefaßt werden als Ergebnis einer Operation, die, ausgeübt auf die Funktionen der ersten Klasse, diejenigen der zweiten Klasse erzeugt. Eine solche Operation heißt ein- oder mehrdeutige Funktionaloperation; die Klasse 1 von Funktionen, für welche sie definiert ist, bildet ihr Operationsfeld. Die Funktionen der

[14]) Vgl. a. a. O. 7), Bd. II, V 145, betr. Beweisführung: V 151—155.

[15]) Vgl. a. a. O. 7), Bd. II V 155, 156 und a. a. O. 2).

Klasse 2 sind die Transformierten der Elemente des Operationsfeldes. Beispiel einer eindeutigen Funktionaloperation ist etwa die Derivation D, die jeder Funktion $f(z)$ ihres Operationsfeldes — das z. B. aus der Gesamtheit der ganzen Funktionen bestehe — ihre Derivierte $D\,f(z) = f'(z)$ zuordnet.

Das Operationsfeld bestehe im folgenden aus der Menge der Polynome. Es soll die allgemeinste Funktionaloperation bestimmt werden, die folgende drei Forderungen erfüllt:

a) Jedem Polynom $f(z)$ werde eindeutig zugeordnet ein Polynom $f^*(z)$. Symbolisch

$$\boldsymbol{L}\,f(z) = f^*(z).$$

b) $\boldsymbol{L}$ sei linear, d. h. wenn $f(z)$ und $g(z)$ beliebige Polynome, c eine beliebige Konstante bedeuten, gelte:

$$\boldsymbol{L}\,[\,f(z) + g(z)\,] = \boldsymbol{L}\,f(z) + \boldsymbol{L}\,g(z),$$

$$\boldsymbol{L}\,c \cdot f(z) = c \cdot \boldsymbol{L} f(z).$$

c) $\boldsymbol{L}$ sei verschiebungstreu, d. h. wenn

$$\boldsymbol{L}\,f(z) = f^*(z),$$

so soll bei beliebiger Wahl der Konstanten c

$$\boldsymbol{L}\,f(z+c) = f^*(z+c)$$

gelten.

Man erkennt ohne weiteres, daß z. B. die Derivation D diesen Forderungen genügt.

Für Polynome liefert der Taylorsche Satz eine einfache Identität, so daß wir die dritte Bedingung in der Form

$$\boldsymbol{L}\left(f(z) + \frac{c}{1!}f'(z) + \frac{c^2}{2!}f''(z) + \cdots\right) = f^*(z) + \frac{c}{1!}\left(f^*(z)\right)' + \frac{c^2}{2!}\left(f^*(z)\right)'' + \cdots$$

schreiben können, oder zufolge der Linearität von $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L} f(z) + \frac{c}{1!}\boldsymbol{L} f'(z) + \frac{c^2}{2!}\boldsymbol{L}\,f''(z) + \cdots = f^*(z) + \frac{c}{1!}\left(f^*(z)\right)' + \frac{c^2}{2!}\left(f^*(z)\right)'' + \cdots.$$

Die Koeffizientenvergleichung dieser in c identischen Polynome läßt erkennen, daß

$$\boldsymbol{L}\,D = D\,\boldsymbol{L}$$

gilt, d. h. die gesuchte Funktionaloperation ist vertauschbar mit der Derivation.

Da die Konstanten dem Operationsfeld angehören, folgt aus dem Gesetz der Linearität

$$\boldsymbol{L}\,(f\,(z) + 0) = \boldsymbol{L}\,f\,(z) + \boldsymbol{L}\,0 \qquad \text{und somit}$$

$$\boldsymbol{L}\,0 = 0;$$

d. h. die Transformierte von Null ist Null.

Diejenige von z^n werde bezeichnet mit

$$\boldsymbol{L}\,z^n = \xi_n\,(z).$$

Sie ist nach Voraussetzung a) ein Polynom in z. Wegen der Vertauschbarkeit mit der Derivation gilt

$$\boldsymbol{L}\,n z^{n-1} = n\,\boldsymbol{L} z^{n-1} = \xi_n'\,(z) = n\,\xi_{n-1}\,(z);$$

ξ_n geht also aus ξ_{n-1} hervor durch Integration. Zufolge dieser Bemerkung ergibt sich als Transformierte von 1 wegen

$$\boldsymbol{L}\,D\,1 = \boldsymbol{L}\,0 = \xi_0'\,(z) = 0:$$

$$\boldsymbol{L}\,1 = \xi_0\,(z) = \text{constans},$$

womit feststeht, daß die Transformierte von z^n ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ sein muß. Durch sukzessives Integrieren findet man, daß die Polynome $\xi_n\,(z)$ ein System von sogenannten Appellschen Polynomen bilden, so daß

$$\xi_n(z) = \boldsymbol{L} z^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} l_\nu\, z^{n-\nu}.$$

Unter Verwendung des Symbols D für die Derivation ist diese Darstellung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\boldsymbol{L} z^n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{l_\nu}{\nu!} D^\nu z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} D^\nu z^n \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Da aber alle Polynome lineare Kombinationen von speziellen Polynomen von der Form z^n sind, bleibt die letztere Darstellung auf Grund der Forderung der Linearität von $\boldsymbol{L}$ für beliebige Polynome gültig, so daß wir zu folgendem Ergebnis gelangen:

Die allgemeinste Funktionaloperation L, welche den Forderungen a), b) und c) genügt, ist eindeutig bestimmt durch eine unendliche Folge von Konstanten $l_0, l_1, l_2, \cdots$, vermöge welcher ein beliebiges Polynom $f(z)$ transformiert wird in

$$Lf(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} D^\nu f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(z).$$

Führen wir noch die (nicht notwendig konvergierende) Reihe

$$L(x) = l_0 + \frac{l_1}{1!} x + \frac{l_2}{2!} x^2 + \cdots$$

ein, so kann auch geschrieben werden

$$L f(z) = L(D) f(z),$$

wo wieder D als Symbol für die Derivation dient[16]).

2. Wir wollen jetzt die allgemeinste Funktionaloperation L bestimmen, die einen vorgegebenen, konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ erhält, in dem Sinne, daß, wenn alle Nullstellen eines sonst beliebigen Polynoms $f(z)$ in $\mathfrak{K}$ liegen, auch sämtliche Nullstellen der Transformierten $L f(z)$ in $\mathfrak{K}$ liegen[17]). Eine derartige Transformation möge *bezüglich* $\mathfrak{K}$ *gerichtet* heißen. Um Trivialitäten zu vermeiden, setzen wir voraus, daß nicht alle Koeffizienten von $L(x)$ verschwinden und daß $\mathfrak{K}$ nicht die ganze Ebene umfaßt.

Wenn der Bereich $\mathfrak{K}$ endlich ist, lautet die Lösung:

Satz 3. *Die Funktionaloperation L ist dann und nur dann in bezug auf einen endlichen konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ gerichtet, wenn sämtliche Koeffizienten der Reihe*

$$L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu$$

verschwinden, mit Ausnahme eines einzigen.

Der Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung verläuft indirekt: Es sei l_r $(r \geqslant 0)$ der erste, l_{r+k} $(k \geqslant 1)$ der zweite von Null verschiedene Koeffizient von $L(x)$. Wir nehmen vorläufig an, $\mathfrak{K}$ bestehe aus einem einzigen Punkt c. Das Polynom

[16]) L ist sogar die allgemeinste eindeutige, lineare Funktionaloperation, welche mit der Derivation vertauschbar ist; vgl. (auch für die andern Ausführungen dieses Abschnitts,) *S. Pincherle* und *U. Amaldi*, Le operazioni distributive, S. 122 (Zanichelli, Bologna 1901).

[17]) Problem und Lösung stammen von Herrn Pólya; vgl. a. a. O. 4), S. 413—414.

$$f(z) = (z - c)^{r+k}$$

genügt den Voraussetzungen; seine Transformierte

$$L(z - c)^{r+k} = \binom{r+k}{r} l_r (z - c)^k + l_{r+k}$$

aber hat offenbar Nullstellen, die sämtlich auf der Kreisperipherie

$$|z - c| = \left| \frac{l_{r+k}}{\binom{r+k}{r} l_r} \right|^{\frac{1}{k}},$$

also nicht in $\mathfrak{K}$, liegen.

Nun existiert sicherlich eine Gerade g durch den Punkt c, die keine dieser Nullstellen enthält, so daß mindestens eine der beiden, durch g bestimmten, abgeschlossenen Halbebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, z. B. $\mathfrak{E}_1$, eine solche Nullstelle im Innern aufweist.

Bedeutet nun $\mathfrak{K}$ einen beliebigen, aber endlichen, konvexen Bereich, so darf die erwähnte Größe c als passend gewählter Randpunkt von $\mathfrak{K}$ vorausgesetzt werden, derart, daß $\mathfrak{K}$ ganz in $\mathfrak{E}_2$ enthalten ist (passende Parallelverschiebung von g). $L(z - c)^{r+k}$ besitzt dann mindestens eine Nullstelle außerhalb $\mathfrak{K}$; die Voraussetzung, daß $L(x)$ mehr als einen von Null verschiedenen Koeffizienten aufweise, ist somit nicht haltbar.

Daß aber die angegebene Bedingung hinreicht, folgt ohne weiteres aus dem Satz von Gauß (Hilfssatz 1).

Falls $\mathfrak{K}$ unendlich ist, darf ohne Verlust an Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß der Nullpunkt O in $\mathfrak{K}$ enthalten ist; andernfalls wäre ja auf Grund der Verschiebungstreue von L erlaubt, diese Bedingung durch eine passende Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ zu realisieren. Mit $\mathfrak{S}$ werde wieder der Strahlinhalt von $\mathfrak{K}$ bezeichnet (vgl. Hilfssatz 3). Wir beweisen

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktionaloperation L in bezug auf einen unendlichen, konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ gerichtet ist, besteht darin, daß die Reihe*

$$L(x) = \sum_{(\nu)} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu$$

beständig konvergiert und eine bezüglich $\overline{\mathfrak{S}}$ gerichtete Funktion darstellt.

Beweis: Aus den beiden Hauptsätzen des ersten Kapitels geht hervor, daß die für $L(x)$ angegebene Bedingung äquivalent ist damit, daß sämtliche Nullstellen der Polynome

$$\varphi_n(x) = l_0 + \binom{n}{1} l_1 x + \binom{n}{2} l_2 x^2 + \cdots$$

für jedes n in $\overline{\mathfrak{S}}$ liegen, oder, was dasselbe bedeutet, daß alle durch die Transformation $x = \frac{1}{z}$ daraus hervorgehenden Polynome

$$z^n \varphi_n\left(\frac{1}{z}\right) = l_0 z^n + \binom{n}{1} l_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} l_2 z^{n-2} + \cdots$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nur Nullstellen in $\mathfrak{S}$ besitzen.

Daß alle Nullstellen von $L\,z^n$ für jedes n in $\mathfrak{K}$ liegen müssen, ist evident. Es existiere nun für $n = n_0 > 0$ eine solche Nullstelle z_0, die nicht in $\mathfrak{S}$ liegt; dann trifft die Halbgerade $O\,z_0$ den Rand von $\mathfrak{K}$ in einem Punkte c (denn nach der eben gemachten Bemerkung soll angenommen werden $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{S}$). Das Polynom

$$f(z) = (z - c)^{n_0}$$

genügt offenbar den zu machenden Voraussetzungen, das transformierte

$$L\,f(z) = L\,(z - c)^{n_0} = l_0\,(z - c)^{n_0} + \binom{n_0}{1} l_1 (z - c)^{n_0 - 1} + \cdots$$

jedoch hat sicher u. a. die Nullstelle

$$\xi = z_0 + c,$$

welche außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt. Die Reihe $L(x)$ muß daher notwendig von der bezeichneten Art sein.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend, denn auf Grund der beiden Hauptsätze des ersten Kapitels existiert zu jeder solchen Reihe $L(x)$ eine Polynomfolge

$$L_n(x) = l_{n0} + \frac{l_{n1}}{1!} x + \frac{l_{n2}}{2!} x^2 + \cdots \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

die in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $L(x)$ konvergiert und deren sämtliche Nullstellen in $\overline{\mathfrak{S}}$ liegen.

Ist $f(z)$ ein beliebiges Polynom, etwa vom Grade m, das nur Nullstellen in $\mathfrak{K}$ besitzt, so finden wir in Anwendung von Hilfssatz 3, daß auch das Polynom

$$L_n(D)f(z) = l_{n0}f(z) + \frac{l_{n1}}{1!}f'(z) + \cdots$$

für jedes n alle seine Nullstellen in $\mathfrak{K}$ hat. Da aber die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} l_{n\nu} = l_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

erfüllt ist, zeigt der Grenzübergang $n \to \infty$, daß diese Eigenschaft zufolge des Satzes von Hurwitz auch auf das Polynom

$$\lim_{n\to\infty} L_n(D)f(z) = L(D)f(z) = l_0 f(z) + \frac{l_1}{1!}f'(z) + \cdots$$

zutrifft, womit der Beweis vollständig erbracht ist.

3. Die abgeschlossene Halbebene $\Re z \geqslant 0$ werde kurz als rechte, $\Re z \leqslant 0$ als linke Halbebene bezeichnet. Eine ganze Funktion, die bezüglich der rechten oder der linken Halbebene gerichtet ist, heiße *rechts* bezw. *links gerichtet.* Die Funktionaloperation $\boldsymbol{L}$ sei *rechtsschiebend* genannt, wenn das Minimum der Realteile der Nullstellen für jedes Polynom $f(z)$ nicht größer ist als der entsprechende Zahlenwert für die Transformierte.

Als einfache Folgerung aus Satz 4 gewinnen wir nun:

Satz 5. *Die Transformation* $\boldsymbol{L}$ *ist dann und nur dann rechtsschiebend, wenn die Reihe*

$$L(x) = \sum_{(\nu)} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu$$

eine rechts gerichtete Funktion darstellt.

Der Beweis für die Notwendigkeit ergibt sich leicht aus der Betrachtung der Transformierten der Polynome

$$f(z) = z^n.$$

Diese Polynome

$$\boldsymbol{L} z^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} l_\nu z^\nu$$

haben nach Voraussetzung für jedes n sämtliche Nullstellen in der rechten Halbebene. Daraus folgt nach Satz 2, dass $L(x)$ eine rechts gerichtete Funktion darstellen muss.

Die zweite Hälfte des Beweises gelingt auf Grund der Verschiebungstreue von $\boldsymbol{L}$. Sei $L(x)$ eine rechts gerichtete Funktion, $f(z)$ ein beliebiges

Polynom. Eine seiner Nullstellen mit minimalem Realteil sei z_0. Dann liegen die Nullstellen von $f(z+z_0)$ sämtlich in der rechten Halbebene und zufolge Satz 4 auch sämtliche Nullstellen von

$$L(D)f(z+z_0) = f^*(z+z_0).$$

Wegen

$$L(D)f(z) = f^*(z)$$

folgt ersichtlich, dass $f^*(z)$ keine Nullstelle links der Geraden

$$\Re z = \Re z_0$$

haben kann.

Die Funktionaloperation L soll *rechtsstreuend* heißen, wenn das Maximum der Realteile der Nullstellen der Transformierten nie kleiner ist als der entsprechende Wert für das ursprüngliche Polynom, wie auch dasselbe gewählt werde. Es gilt:

Satz 6. *Die Funktionaloperation ist dann und nur dann rechtsstreuend, wenn* $l_0 \neq 0$ *und die Reihe*

$$L(x) = \sum_{(\nu)} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu$$

die Reziproke einer ganzen, links gerichteten Funktion darstellt.

Beweis: Wir zeigen vorerst auf indirektem Wege, dass $l_0 \neq 0$ sein muß. Ist nämlich $l_0 = 0$ und l_r $(r > 0)$ der erste, nicht verschwindende Koeffizient, so setze man

$$f(z) = z^r(z - a) = z^{r+1} - az^r,$$

wo a eine positive Konstante bedeutet.

Die Transformierte

$$L(D)f(z) = l_r \cdot [(r+1)z - a] + l_{r+1}$$

hat die einzige Wurzel

$$\alpha = \frac{a - \frac{l_{r+1}}{l_r}}{r+1}.$$

Nun ist

$$\Re\alpha < a,$$

sobald

$$-\frac{1}{r}\Re\frac{l_{r+1}}{l_r} < a,$$

und dies ist durch passende Wahl von a stets zu erreichen. Also kann $\boldsymbol{L}$ nicht rechtsstreuend sein, wenn $l_0 = 0$.

Hat aber $\boldsymbol{L}$ diese Eigenschaft, so lassen sich jetzt, zufolge $l_0 \neq 0$, unendlich viele Zahlen $a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ mit Hilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmen:

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 l_0 , \\
0 &= \frac{a_1}{1!} l_0 + a_0 \frac{l_1}{1!} , \\
0 &= \frac{a_2}{2!} l_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot \frac{l_1}{1!} + a_0 \frac{l_2}{2!} , \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wir behaupten, daß alle Nullstellen sämtlicher Polynome

$$P_n(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

in der linken Halbebene liegen. Dies folgt nämlich sofort aus der Tatsache, daß

$$
\begin{aligned}
L(D) P_n(z) &= l_0 P_n(z) + \frac{l_1}{1!} P_n'(z) + \cdots \frac{l_n}{n!} P_n^{(n)}(z) \\
&= (l_0 + \frac{l_1}{1!} D + \frac{l_2}{2!} D^2 + \cdots)(a_0 + \frac{a_1}{1!} D + \frac{a_2}{2!} D^2 + \cdots) z^n \\
&= z^n .
\end{aligned}
$$

Nach Satz 1 konvergiert somit die Reihe

$$G(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots$$

beständig und stellt eine links gerichtete Funktion dar.

Jetzt sei umgekehrt $G(x)$ eine derartige Funktion, die für $x = 0$ nicht verschwindet. Um zu zeigen, daß die lineare Funktionaloperation $L(D) \equiv G^{-1}(D)$ rechtsstreuend ist, betrachten wir die Polynome

$$g(z) = G^{-1}(D) f(z) = L(D) f(z).$$

Wegen der Verschiebungstreue der betrachteten Transformationen dürfen wir annehmen, daß das Maximum der Realteile der Nullstellen von $g(z)$ gleich Null sei. Dieses Maximum kann aber bei der Transformation

$$G(D) g(z) = f(z),$$

wie in Satz 4 gezeigt wurde, nicht zunehmen, und damit ist alles bewiesen.

4. Wir beschließen dieses Kapitel mit dem Hinweis, daß das dem Satz 4 zugrunde liegende Operationsfeld einer gewissen Erweiterung fähig ist. Wir beweisen nämlich noch den folgenden

Satz 4*. *Die ganze Funktion* $G(z) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_\mu}{\mu!} z^\mu$ *sei bezüglich* $\mathfrak{A}$, *die ganze Funktion* $L(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu$ *bezüglich* $\mathfrak{A}$ *gerichtet. Dann stellt die Reihe*

$$L(D)G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} G^{(\nu)}(z) \tag{1}$$

eine ganze, bezüglich $\mathfrak{A}$ *gerichtete Funktion dar.*

Wir erbringen vorerst den Nachweis, daß die Reihe (1) für jedes z konvergiert. Bedeutet l_r den ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der Potenzreihe $L(x)$, so genügen auf Grund der Voraussetzung die nachfolgenden Koeffizienten der Ungleichung (7) des ersten Kapitels:

$$\left| l_\nu \right| \leqslant \binom{\nu}{r} \left| l_r \right| \cdot \left| \frac{l_{r+1}}{l_r \, (r+1) \cos \frac{\omega}{2}} \right|^{\nu - r} \qquad (\nu = r, r+1, \cdots) .$$

Speziell gilt, wenn $r = 0$ ist,

$$\left| l_\nu \right| \leqslant \left| l_0 \right| \cdot \left| \frac{l_1}{l_0 \cdot \cos \frac{\omega}{2}} \right|^{\nu} .$$

Nun gehören nach § 9 desselben Kapitels sämtliche Ableitungen $L^{(\mu)}(x)$ zum gleichen Typus wie $L(x)$, so daß sich im Falle $r > 0$ ohne Schwierigkeit die Ungleichung

$$\left| l_\nu \right| \leqslant \left| l_r \right| \cdot \left| \frac{l_{r+1}}{l_r \cdot \cos \frac{\omega}{2}} \right|^{\nu - r} = k_1 \cdot k_2^\nu \quad (k_1 > 0,\ k_2 > 0) \tag{2}$$

gewinnen läßt. Zieht man jetzt in Betracht, daß mit $G(z)$ auch die Potenzreihe

$$M(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{|a_\mu|}{\mu!} z^\mu \tag{3}$$

in der ganzen Ebene konvergiert, so gelangt man zum Ergebnis, daß die Reihe (1) von der stets konvergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_1 \cdot \frac{k_2^\nu}{\nu!} M^{(\nu)}(z) = k_1 \cdot M(z + k_2)$$

majorisiert wird.

Zum Beweis, daß die ganze Funktion $L(D)G(z)$ bezüglich $\mathfrak{A}$ gerichtet ist, ordnen wir kraft des Weierstraßschen Doppelreihensatzes nach Potenzen von z und erhalten

$$L(D)G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} G^{(\nu)}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu!} z^\mu. \tag{4}$$

Für die Koeffizienten c_μ ergeben sich bei dieser Umordnung die Reihen

$$c_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu \cdot a_{\mu+\nu}}{\nu!}, \tag{5}$$

deren Konvergenz absolut ist, was die Ungleichungen (2) in Verbindung mit der ganzen Funktion (3) ohne weiteres erkennen lassen.

Die Wurzeln der Polynome

$$G_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu \left(\frac{z}{n}\right)^\nu$$

liegen nach Satz 1, diejenigen der Polynome

$$L(D)G_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} G_n^{(\nu)}(z) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{c_{n\mu}}{\mu!} z^\mu$$

nach Satz 4 sämtlich in $\mathfrak{A}$. Für die Koeffizienten $c_{n\mu}$ findet man die Darstellung

$$c_{n\mu} = \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu+\nu-1}{n}\right) \cdot \frac{l_\nu\, a_{\mu+\nu}}{\nu!} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

(Für $\mu + \nu = 0$ ist das Differenzenprodukt durch 1 zu ersetzen.)

Die absolute Konvergenz der Reihen (5) läßt nun den Schluß zu, daß für jedes μ die Grenzwertgleichung

$$\lim_{n\to\infty} c_{n\mu} = c_\mu \tag{6}$$

erfüllt ist und nach Satz 1 ist damit die Behauptung in vollem Umfang bewiesen.

Anmerkung. Der eben durchgeführte Beweis läßt ohne weiteres die Richtigkeit der folgenden Behauptung erkennen:

a) Die ganze Funktion $G(z)$ sei bezüglich eines Bereiches $\mathfrak{B}$, die ganze Funktion $L(x)$ bezüglich eines Teilbereiches $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ gerichtet. Dann stellt die Reihe (1) eine ganze, bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtete Funktion dar.

Ferner läßt sich zeigen:

b) Ist die ganze Funktion $G(z)$ bezüglich $\mathfrak{A}$, die ganze Funktion $L(x)$ bezüglich eines Bereiches $\overline{\mathfrak{B}}$ gerichtet, der $\overline{\mathfrak{A}}$ enthält, so stellt die Reihe (1) eine ganze, bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtete Funktion dar.

Wir begnügen uns mit dem Konvergenzbeweis für die Reihe (1). Mit $G(z)$ und $L(x)$ sind auch

$$M_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{|a_\mu|}{\mu!} z^\mu \text{ und } M_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|l_\nu|}{\nu!} x^\nu$$

ganze Funktionen. Zufolge der Voraussetzung genügen sämtliche Koeffizienten von $G(z)$ der Ungleichung (2)

$$|a_\mu| \leqslant k_1 \cdot k_2^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo k_1 und k_2 positive, von μ unabhängige Konstanten bedeuten. Somit werden die Potenzreihen $G(z)$ und $G^{(\nu)}(z)$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ auch durch

$$M(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} k_1 \frac{k_2^\mu}{\mu!} z^\mu = k_1 e^{k_2 z} \quad \text{bzw.}$$

$$M^{(\nu)}(z) = k_1 \cdot k_2^\nu e^{k_2 z}$$

majorisiert. Mit

$$M_2(D) M(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|l_\nu|}{\nu!} M^{(\nu)}(z) = k_1 e^{k_2 z} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|l_\nu| k_2^\nu}{\nu!}$$

$$= k_1 M_2(k_2) e^{k_2 z}$$

konvergiert demnach auch

$$(1) \qquad L(D) G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} G^{(\nu)}(z)$$

in der ganzen Ebene.

c) Sind die ganzen Funktionen $G(z)$ und $L(x)$ bezüglich $\mathfrak{B}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ gerichtet, so braucht die Reihe (1) nicht notwendig zu konvergieren. In einer bereits zitierten Abhandlung*), die den hier berührten Fragenkomplex für reell gerichtete Funktionen erledigt, hat Herr Pólya das Funktionenpaar

$$G(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad L(x) = e^{-\frac{cx^2}{2}} \qquad (c > 0)$$

*) Vgl. a. a. O. 3), S. 238—244.

angegeben von der Eigenschaft, daß die daraus gebildete Reihe

$$L(D)G(z)=e^{-\frac{cD^2}{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

für $c \geqslant 1$ in keiner Umgebung von $z=0$ konvergiert.

Es läßt sich aber beweisen, daß die Reihe (1) eine ganze, bezüglich $\mathfrak{B}$ gerichtete Funktion darstellt, sofern sie in einem noch so kleinen Kreise $|z|<\varrho$ ($\varrho>0$) konvergiert. Diese Tatsache läßt sich für die durch formale Umordnung erhaltene Potenzreihe (4) schon zeigen, wenn man nur die Konvergenz sämtlicher Reihen (5) voraussetzt.

III. Kapitel

Über lineare, verschiebungstreue Funktionaloperationen und die Nullstellen von Exponentialsummen[18]

1. Übt man die — symbolisch durch die Reihe $L(x)=\sum\limits_{(\nu)}\frac{l_\nu}{\nu!}x^\nu$ gegebene — Funktionaloperation L auf die Exponentialfunktion

$$f(z)=ae^{\lambda z}$$

aus, so erhält man rein formal als Transformierte

$$L(D)f(z)=aL(\lambda)e^{\lambda z},$$

ein Ergebnis, das sinnvoll ist, wenn die Reihe $L(x)$ für $x=\lambda$ konvergiert. Linearität und Verschiebungstreue der Transformation bleiben auch für Exponentialsummen bestehen, wenn $L(x)$ für die in den Exponenten auftretenden Faktoren konvergiert.

Das Operationsfeld bestehe in diesem Kapitel aus den Exponentialsummen von der Form:

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu e^{\lambda_\nu z}; \tag{1}$$

n bedeutet eine natürliche Zahl, $a_0, a_1, \cdots a_n$ sind reelle Koeffizienten, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n$ reelle Zahlen, die einem vorgegebenen Intervall J angehören.

[18]) Vgl. a. a. O. 4), S. 467—468.

Die lineare Funktionaloperation L sei bestimmt durch eine im Intervall J analytische, reellwertige Funktion $L(x)$ und transformiere die Exponentialsumme (1) in

$$Lf(z) = L(D)\,f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, L(\lambda_\nu)\, e^{\lambda_\nu z}. \tag{2}$$

Wir schließen die trivialen Fälle, in welchen J sich auf einen Punkt reduziert, oder $L(x)$ in J identisch verschwindet, aus und beweisen

Satz 7. *Die Transformierte* (2) *besitzt dann und nur dann nicht weniger reelle Nullstellen als* (1), *gleichgültig wie* (1) *innerhalb des Operationsfeldes gewählt werde, wenn $L(x)$ eine reell gerichtete Funktion ist, die im Intervall J nirgends verschwindet.*

Beweis: Da $L(x)$ in J analytisch vorausgesetzt ist, müßten die Nullstellen, die daselbst etwa vorhanden wären, isoliert sein. Dies möge zutreffen für den Wert $x = \alpha$; dann ist jedenfalls eine reelle Zahl δ bestimmbar, derart, daß $\alpha + \delta$ in J liegt und $L(\alpha + \delta) \neq 0$ ist. Die Transformierte der Exponentialsumme

$$f(z) = a_0 e^{(\alpha+\delta)z} - a_1 e^{\alpha z} \quad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$$

lautet

$$L(D) f(z) = a_0 L(\alpha + \delta)\, e^{(\alpha+\delta)z}$$

und hat offenbar weniger reelle Nullstellen als $f(z)$, was im Widerspruch steht zu der an L gestellten Forderung. Somit darf $L(x)$ in J nirgends verschwinden.

Um zu zeigen, daß $L(x)$ eine reell gerichtete ganze Funktion sein muß, betrachten wir Exponentialsummen von der Gestalt:

$$f(z) = e^{\alpha z}(e^{\delta z} - 1)^n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{(\alpha + (n-\nu)\delta)z}\,; \tag{3}$$

n ist eine natürliche Zahl, α gehört dem Intervall J an, $\alpha + n\delta$ ebenfalls (ein solches δ ist sicherlich zu jedem Zahlenpaar n, α bestimmbar). Diese Exponentialsummen (3) besitzen die maximale Anzahl reeller Nullstellen (Descartessche Zeichenregel), die außerdem alle in einem Punkt zusammenfallen, und charakterisieren auf Grund der Forderung, daß L alle diese Nullstellen nur auf die reelle Axe streuen darf, weitgehend die Funktion $L(x)$.

Die Transformierte der Funktion (3),

$$L(D) f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} L(\alpha + (n - \nu)\delta)\, e^{[\alpha + (n-\nu)\delta]z}, \tag{4}$$

stellt nun gerade die n-te Differenz der Funktion $L(x)e^{xz}$ bezüglich x an der Stelle $x = a$ dar, wobei $\Delta x = \delta$ gesetzt ist, und da $L(x)$ in J analytisch vorausgesetzt wird, ergibt iterierte Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\text{(5)} \qquad L(D)f(z) = \delta^n \left[\frac{d^n}{d x^n} L(x)\, e^{xz}\right]_{x=a+k\delta} \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

$$= \delta^n \left[e^{xz}\left(L(x)\, z^n + \binom{n}{1} L'(x)\, z^{n-1} + \cdots + \overset{(n)}{L}(x)\right)\right]_{x = a + k\delta}$$

$$= \delta^n\, e^{(a+k\delta)z}\, P_n(z, \delta)\,.$$

Wenn die Transformation L die Nullstellen erhalten soll, muß das Polynom $P_n(z, \delta)$, das wegen Nichtverschwindens des Koeffizienten von z^n vom genauen Grad n ist, n, d. h. lauter reelle Wurzeln besitzen. Läßt man nun in (5), nach Division durch δ^n, die Zahl δ monoton gegen 0 streben, so folgt auf Grund des Grenzwertsatzes von Hurwitz, daß auch das Polynom

$$\text{(6)} \qquad P_n(z) = L(a)\, z^n + \binom{n}{1} L'(a)\, z^{n-1} + \cdots + L^{(n)}(a)\,,$$

das wegen $L(a) \neq 0$ nicht identisch verschwinden kann, lauter reelle Nullstellen hat. Dasselbe gilt dann auch für das Polynom

$$\text{(7)} \qquad h_n(x) = L(a) + \binom{n}{1} L'(a)\, x + \binom{n}{2} L''(a)\, x^2 + \cdots + \overset{(n)}{L}(a)\, x^n.$$

Weil aber diese Tatsache für jede natürliche Zahl n zutrifft, muß die Reihe

$$L(a) + \frac{L'(a)}{1!}\, x + \frac{L''(a)}{2!}\, x^2 + \cdots = L(a + x)$$

nach Satz 2 beständig konvergieren und eine ganze, reell gerichtete Funktion darstellen; mit $L(a + x)$ ist aber ersichtlich auch $L(x)$ zu diesem Typus gehörend.

Daß die für $L(x)$ angegebene Bedingung auch hinreichend ist, wird zunächst für einen Linearfaktor

$$L_1(x) = x - \lambda$$

aus einer zweckdienlichen Fassung des Satzes von Rolle gefolgert[19]). Die Exponentialsummen

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\lambda_\nu z} \qquad \text{und}$$

(8) $$e^{-\lambda z} f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{(\lambda_\nu - \lambda) z} = F(z)$$

weisen dieselbe Anzahl reeller Nullstellen auf. Liegt nun λ, wie wir voraussetzen, außerhalb des Intervalls J, so tritt für $F(z)$ eine der beiden Alternativen

$$\lim_{z \to +\infty} F(z) = 0\,, \qquad \lim_{z \to -\infty} F(z) = 0$$

ein, so daß die Anzahl der reellen Nullstellen von

$$F'(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (\lambda_\nu - \lambda) e^{(\lambda_\nu - \lambda) z} = e^{-\lambda z} L_1(D) f(z)\,,$$

und damit von $L_1(D) f(z)$, nicht kleiner ist als diejenige von $F(z)$, also auch von $f(z)$. Durch Iteration erschließt man die Gültigkeit dieser Aussage, wenn $L(x)$ ein Polynom mit lauter reellen Nullstellen außerhalb J bedeutet, und da jede reell gerichtete, ganze Funktion ohne Nullstellen in J gleichmäßig durch Polynome der besagten Art approximiert werden kann (Satz 2), gelangt man durch den oft ausgeführten Grenzübergang zum gewünschten Ergebnis.

Das Problem, die allgemeinste Transformation L zu bestimmen, welche die Eigenschaft hat, die Anzahl der reellen Nullstellen in keinem Fall zu vermehren, wird gelöst durch

Satz 8. *Die Transformierte $L(D) f(z)$ besitzt dann und nur dann nicht mehr reelle Nullstellen als $f(z)$, wo $f(z)$ jede beliebige Funktion des Operationsfeldes sein kann, wenn $L(x)$ die Reziproke einer reell gerichteten, in J nirgends verschwindenden ganzen Funktion $H(x)$ darstellt.*

Wir beweisen vorerst, daß $L(x)$ in J keine Nullstellen haben darf. Zufolge der Voraussetzung der Analytizität von $L(x)$ müßten derartige Nullstellen isoliert sein. Ist $x = a$ eine solche, dann läßt sich eine reelle Zahl $\delta \neq 0$ bestimmen, derart, daß $a + 2\delta$ in J liegt und das abgeschlossene Teilintervall $[\,a, a + 2\delta\,]$ keine weitere Nullstelle von $L(x)$ enthält, so daß dieselbe daselbst von konstantem Vorzeichen ist. Nun hat

[19]) Vgl. a. a. O. 7), Bd. II, V 16.

$$f(z) = e^{\alpha z}(e^{2\delta z} - e^{\delta z} + 1)$$

keine reelle Nullstelle, während die Transformierte

$$L(D)f(z) = L(a + 2\delta)e^{(\alpha+2\delta)z} - L(a + \delta)e^{(\alpha+\delta)z}$$

wegen $$sg\,L(a + 2\delta) = sg\,L(a + \delta)$$

offenbar genau eine reelle Nullstelle aufweist, im Widerspruch zu der gestellten Forderung.

Nun sei (1) $$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\lambda_\nu z}$$

eine beliebige Exponentialsumme (1). Die Anzahl ihrer reellen Nullstellen möge mit w bezeichnet werden. Die Funktionaloperation L besitze die in Satz 8 ausgesprochene Eigenschaft, die Funktion $L(x)$ sei also regulär in J und (wie eben bewiesen) daselbst ohne Nullstellen. Auch ihre Reziproke

$$H(x) \equiv \frac{1}{L(x)}$$

ist dann im Intervall J regulär und nicht verschwindend. Bedeutet r die Anzahl der reellen Nullstellen von

$$g(z) = H(D)f(z) = \frac{1}{L(D)} f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{L(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z},$$

so muß wegen

$$L(D)g(z) = f(z)$$

die Ungleichung $w \leqslant r$ statthaben. Da dies aber für jede beliebige Exponentialsumme $f(z)$ des Operationsfeldes zutrifft, folgt aus Satz 7, daß $H(x)$ eine reell gerichtete ganze Funktion sein muß, die in J nirgends verschwindet.

Bezeichnet man umgekehrt mit $H(x)$ eine beliebige derartige Funktion, so ist

$$L(x) \equiv \frac{1}{H(x)}$$

in J ebenfalls regulär und nicht verschwindend. Ist $f(z)$ irgend eine Exponentialsumme (1), und bedeutet w die Anzahl der reellen Nullstellen von

$$g(z) = L(D)f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{H(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z},$$

so folgt auf Grund von Satz 7, daß die Anzahl r der reellen Nullstellen von

$$H(D)g(z) = f(z)$$

der Bedingung

$$r \geqslant w$$

genügt, womit auch die zweite Hälfte von Satz 8 bewiesen ist.

Laguerre ist zu einem Ergebnis gelangt, das in passender Formulierung besagt, daß die Euler'sche Funktion $\Gamma(x+1)$ die in Satz 8 von $L(x)$ geforderten Eigenschaften besitzt, wenn mit J das offene Intervall $0 < x < \infty$ bezeichnet wird[20]. Vermöge der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ trifft das ersichtlich auch zu für $\Gamma(x)$. Satz 8 läßt nun den Schluß zu, daß diese Funktion die Reziproke einer negativ gerichteten, ganzen Funktion darstellt, ein Resultat, das bestbekannt ist.

2. In diesem Abschnitt bestehe das Operationsfeld aus den Exponentialsummen vom Typus

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu e^{\lambda_\nu z} + \bar{a}_\nu e^{-\lambda_\nu z}), \quad a_\nu \cdot \bar{a}_\nu = | a_\nu |^2, \tag{9}$$

wo die Koeffizienten a_ν reell oder komplex sein können und das reelle Intervall J, dem die λ_ν angehören, den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat. Die Funktion $L(x)$ sei analytisch in J.

Der in Kapitel I und II angewandten Ausdrucksweise entsprechend, heiße eine ganze Funktion $H(x)$ *imaginär gerichtet*, wenn $H(ix)$ reell gerichtet ist, die Funktionaloperation L dagegen führe diese Bezeichnung, wenn sie jede imaginär gerichtete Exponentialsumme (9) in eine solche vom selben Typus transformiert.

Wir fügen hier die Bemerkung an, daß die ganzen Funktionen

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu e^{\lambda_\nu z} + \bar{a}_\nu e^{-\lambda_\nu z}) \\ &= 2 \sum_{\nu=0}^{n} \left(\Re a_\nu \cdot \cos(i\lambda_\nu z) + \Im a_\nu \cdot \sin(i\lambda_\nu z)\right) \end{aligned} \tag{9}$$

von Ordnung und Geschlecht 1 sind und auf der imaginären Axe überall

[20]) Vgl. a. a. O. 1), S. 30.

reelle Werte annehmen. Falls sie außerhalb derselben keine Nullstellen besitzen, sind sie also imaginär gerichtet.

Wir beweisen jetzt

Satz 9. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformation **L** imaginär gerichtet ist, lautet:*

Es muß $L(x)$ eine imaginär gerichtete ganze Funktion sein).*

Die maßgebenden Funktionen zur Führung des Notwendigkeitsbeweises,

$$f(z) = \bigl(-2\sin(i\delta z)\bigr)^n = (-i)^n (e^{\delta z} - e^{-\delta z})^n \tag{10}$$

$$= (-i)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{(n-2\nu)\delta z},$$

genügen bei passender Wahl von $\delta > 0$ offenbar den gestellten Bedingungen, besitzen sie doch nur die n-fachen Nullstellen

$$z_k = i\frac{k\pi}{\delta} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

welche alle auf der imaginären Axe liegen. Die Nullstellen der Transformierten

$$L(D) f(z) = (-i)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} L\bigl((n-2\nu)\delta\bigr) e^{(n-2\nu)\delta z} \tag{11}$$

müssen also nach Voraussetzung ebenfalls sämtlich auf dieser Geraden angeordnet sein. Läßt man jetzt in (11), nach Division durch $(-2i\delta)^n$, δ gegen Null streben (die Bedingungen für die Zulässigkeit dieses Grenzübergangs sind ersichtlich erfüllt), so findet man in analoger Weise wie im Beweis von Satz 6, daß die Polynome

$$L_n(z) = L(0) + \binom{n}{1} L'(0) z + \binom{n}{2} L''(0) z^2 + \cdots + \overset{(n)}{L}(0) z^n$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

*) Vgl. hierzu *G. Pólya*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 158, S. 6—18.

nur reinimaginäre Nullstellen haben können. Satz 2 erlaubt aus dieser Tatsache den Schluß, daß die Reihe

$$L(x) = L(0) + \frac{L'(0)}{1!} x + \frac{L''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

beständig konvergiert und eine imaginär gerichtete ganze Funktion darstellt.

Für die zweite Hälfte des Beweises sei angenommen, daß die ganze Funktion (9) imaginär gerichtet sei. Dasselbe gilt dann auch für die ganze Funktion

$$F(z) = e^{-i\alpha z} f(z),$$

wo a eine beliebige reelle Zahl bedeutet. In Kapitel I, 9 wurde aber bewiesen, daß diese Eigenschaft auch auf die Derivierte

$$F'(z) = [f'(z) - i a f(z)] \cdot e^{-i\alpha z}$$

übergeht. Nun ist

$$\begin{aligned} e^{i\alpha z} F'(z) &= f'(z) - i a f(z) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ a_\nu (\lambda_\nu - i a) e^{\lambda_\nu z} + \bar{a}_\nu (-\lambda_\nu - i a) e^{-\lambda_\nu z} \right\} \end{aligned}$$

nichts anderes als die Transformierte $L(D) f(z)$ von (9), wenn

$$L(x) = x - ia$$

gesetzt ist. Völlig analog zum Beweis von Satz 7 findet man durch Iteration und Grenzübergang die Bestätigung der Behauptung, wenn $L(x)$ eine beliebige ganze, imaginär gerichtete Funktion bedeutet.

3. Operationsfeld, Intervall J und Funktion $L(x)$ sollen im folgenden wieder dieselben Voraussetzungen erfüllen wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels. Bevor wir dazu übergehen, die allgemeinsten Transformationen L zu bestimmen, welche die Exponentialsummen (1) konstanten Vorzeichens erhalten, bzw. die größte reelle Nullstelle ungerader Ordnung nicht nach rechts streuen, sollen die Hilfssätze zusammengestellt werden, die wir für diese Untersuchungen benötigen.

Wir betrachten Potenzreihen

$$L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} x^\nu \tag{12}$$

mit lauter reellen Koeffizienten. Die aus den letztern gebildeten Hankelschen Determinanten seien bezeichnet mit

$$H_k^{(r)} = \begin{vmatrix} l_k & l_{k+1} & l_{k+2} \cdots l_{k+r-1} \\ l_{k+1} & l_{k+2} & l_{k+3} \cdots l_{k+r} \\ l_{k+2} & \cdots & \cdots \cdots l_{k+r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ l_{k+r-1} & l_{k+r} & \cdots \cdots l_{k+2r-2} \end{vmatrix}.$$

Es gilt dann

Hilfssatz 4. *Die Determinanten $H_0^{(r)}$ mögen den Bedingungen*

1.) $H_0^{(r)} > 0$ für $r = 1, 2, 3, \cdots n$,

2.) $H_0^{(r)} = 0$ für $r > n$

genügen. Dann stellt die Potenzreihe (12) *eine Exponentialsumme der Form*

$$L(x) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu e^{\xi_\mu x} \tag{13}$$

dar, deren Koeffizienten A_μ sämtlich positiv und deren Exponenten ξ_μ sämtlich reell sind.

Beweis: Zufolge der gemachten Voraussetzungen stellt bekanntlich die Reihe

$$l(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{x^{\nu+1}} \tag{14}$$

eine echt gebrochene rationale Funktion von x dar, mit reell-koeffizientigen Polynomen $(n-1)$-ten und n-ten Grades als Zähler bzw. Nenner[21]). Ihre Pole sind sämtlich reell und einfach, die zugehörigen Residuen positiv[22]), so daß ihre Partialbruchzerlegung die Gestalt aufweist:

$$l(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{x - \xi_\mu}, \quad \text{wo} \begin{matrix} A_\mu > 0 \\ \xi_\mu \text{ reell} \end{matrix} \text{ für } \mu = 1, 2, \cdots n. \tag{15}$$

Auf Grund dieses Ergebnisses gewinnt man aber für die Reihe (12) mit Hilfe von (14) die folgende Integraldarstellung:

[21]) Vgl. a. a. O. 7), Bd. II, VII Aufg. 17—29.

[22]) Vgl. *J. Grommer*, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Journal f. reine u. angew. Math. Bd. 144, S. 114–166, insbes. S. 124, Satz 1.

$$(16) \qquad L(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint l(u)\, e^{xu}\, du,$$

wobei das Integral längs eines Kreises $|u| = R$ zu nehmen ist, der einen so großen Radius besitzt, daß sämtliche Pole von (14) im Innern der abgeschlossenen Kreisfläche liegen. Denn unter diesen Bedingungen ist die Reihe (14) längs des Integrationsweges offenbar absolut und gleichmäßig konvergent, so daß die elementaren Vertauschungsregeln der Analysis angewendet werden dürfen. Man erhält

$$\frac{1}{2\pi i} \oint l(u)\, e^{xu}\, du = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\mu}{u^{\mu+1}} \cdot \frac{x^\nu u^\nu}{\nu!}\, du =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{l_\mu}{2\pi i} \oint u^{\nu-\mu-1}\, du = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!}\, x^\nu = L(x).$$

Setzt man nun in (16) für $l(u)$ nach (15) die Summe $\sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{u - \xi_\mu}$ ein, so ergibt sich wie behauptet

$$L(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{u - \xi_\mu} \right) e^{xu}\, du = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu\, e^{\xi_\mu x}.$$

Hilfssatz 5. *Die in* (13) *auftretenden Exponenten* ξ_μ *sind sämtlich nichtnegativ, wenn außer den Voraussetzungen von Hilfssatz 4 die zusätzlichen Bedingungen*

$$H_1^{(r)} > 0 \text{ für } r = 1, 2, \cdots n-1,$$

$$H_1^{(n)} \geqslant 0,$$

$$H_1^{(r)} = 0 \text{ für } r > n$$

erfüllt sind.

Zur Begründung genügt der Hinweis, daß unter den so erweiterten Voraussetzungen die Pole der rationalen Funktion nicht negativ sein können, wie folgende Überlegung zeigt:

$$\frac{l_0}{x} + \frac{l_1}{x^2} + \frac{l_2}{x^3} + \cdots = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{x - \xi_\mu},$$

$$\frac{l_1}{x} + \frac{l_2}{x^2} + \frac{l_3}{x^3} + \cdots = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu x}{x - \xi_\mu} - l_0 = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu \xi_\mu}{x - \xi_\mu},$$

wo $A_\mu \xi_\mu \geqslant 0$ d. h. $\xi_\mu \geqslant 0$.

Wir wollen jetzt die Exponenten ξ_μ nach ihrer Größe geordnet voraussetzen, so daß

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n ,$$

und definieren die reelle, nirgends abnehmende Funktion $\Psi(u)$ in folgender Weise:

$$\begin{array}{lll} \Psi(u) = 0 & \text{für} & u < \xi_1 , \\ \Psi(u) = A_1 & \text{für} & \xi_1 \leqq u < \xi_2 , \\ \Psi(u) = A_1 + A_2 & \text{für} & \xi_2 \leqq u < \xi_3 , \\ \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \Psi(u) = \sum_{\mu=1}^{n-1} A_\mu & \text{für} & \xi_{n-1} \leqq u < \xi_n , \\ \Psi(u) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu & \text{für} & \xi_n \leqq u . \end{array}$$

Dann läßt sich die Exponentialsumme (13) als Stieltjessches Integral in der Form

$$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu} d\Psi(u) \tag{17}$$

darstellen, wenn unter demselben mit Stieltjes der (in unserm Fall offensichtlich existierende) Grenzwert der Summe

$$\sum_{p=0}^{m} e^{xu'_p} (\Psi(u_p) - \Psi(u_{p-1}))$$

verstanden wird, wobei die Länge jedes Teilintervalles mit wachsender Anzahl m gegen Null strebt.

Bedeutet a irgend eine reelle Zahl und genügen die Koeffizienten der Potenzreihe

$$L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} (x - a)^\nu \tag{12*}$$

den Voraussetzungen des vierten Hilfssatzes, so folgt aus diesem für $L(x)$ die Darstellung

$$L(x) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu e^{\xi_\mu (x-\alpha)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x-\alpha)u} d\Psi(u) .$$

Führt man jetzt die nirgends abnehmende Funktion $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-\alpha v} d\Psi(v)$ ein, so wird

(18) $$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}\, d\Phi(u) \; .$$

Erfüllt die Potenzreihe (12*) die Voraussetzungen von Hilfssatz 5, so tritt für die Funktion $\Phi(u)$ der Integraldarstellung (18) wegen $\xi_1 \geqq 0$ die zusätzliche Einschränkung

$$\Phi(u) = 0 \text{ für } u < 0 \qquad \text{auf.}$$

In engstem Zusammenhang mit den gewonnenen Ergebnissen stehen die beiden nachfolgenden Grenzwertsätze.

Die Funktion $L(x)$ sei regulär und reellwertig im Innern eines auf der reellen Axe gelegenen Intervalls J : $a < x < b$. Es sei $x = a$ ein innerer Punkt dieses Intervalls und

(12*) $$L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!} (x - a)^\nu$$

die Potenzreihenentwicklung von $L(x)$ an der Stelle $x = a$.

Hilfssatz 6. *Sind die aus den Koeffizienten l_ν der Potenzreihe* (12*) *gebildeten Hankelschen Determinanten $H_0^{(r)}$ sämtlich positiv, so ist $L(x)$ Grenzwert von Exponentialsummen* (13) *mit lauter positiven Koeffizienten, d. h. es folgt die Existenz einer für $-\infty < u < +\infty$ definierten reellen, nirgends abnehmenden Funktion $\Phi(u)$, derart, daß $L(x)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von J durch das dort absolut und gleichmäßig konvergente Stieltjessche Integral*

(18) $$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}\, d\Phi(u)$$

dargestellt wird.

Hilfssatz 7. *Sind außer den Determinanten $H_0^{(r)}$ auch die Determinanten $H_1^{(r)}$ positiv für jedes r, so ist die Funktion $L(x)$ Grenzwert von Exponentialsummen mit positiven Koeffizienten und positiven Exponenten, d. h. sie läßt eine Integraldarstellung von der Gestalt* (18) *zu, wobei $\Phi(u)$ der Zusatzbedingung*

$$\Phi(u) = \text{const. für } u \leqq 0$$

genügt[23]).

[23]) Betreffend die Hilfssätze 6 und 7 vgl. *H. Hamburger*, Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya. Math. Zeitschrift, Bd. 7, 1920 (Berlin, Springer), S. 302—322, insbes. S. 310.

4. Nachdem so die nötigen Vorbereitungen getroffen worden sind, beweisen wir

Satz 10. *Die allgemeinste Transformation* L, *die die Exponentialsummen* (1) *von konstantem Vorzeichen erhält, in dem Sinn, daß mit* $f(z)$ *auch* $L(D)f(z)$ *keine reellen Nullstellen von ungerader Ordnung besitzt, läßt sich im Intervall J als daselbst gleichmäßig konvergentes Stieltjessches Integral in der Gestalt*

$$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}\, d\Phi(u) \tag{18}$$

darstellen, wo $\Phi(u)$ *eine reelle, monotone Funktion bedeutet, die streckenweise konstant sein kann.*

Der triviale Fall $L(x) \equiv 0$ sei natürlich wieder ausgeschlossen. Dann existiert a im Innern von J, derart, daß $L(a) \neq 0$, und zwar dürfen wir unbeschadet der Allgemeinheit $L(a) > 0$ annehmen, da wir andernfalls $[-L(x)]$ an Stelle von $L(x)$ betrachten würden. Zufolge der Analytizität von $L(x)$ läßt sich sodann eine Umgebung U von a angeben, die ganz in J enthalten ist, von der Eigenschaft, daß $L(x) > 0$ gilt in U.

Um nun die Notwendigkeit der Darstellbarkeit von $L(x)$ als Integral (18) darzutun, betrachten wir folgende, in unserem Operationsfeld enthaltenen Quadrate, die offenbar den Voraussetzungen des Satzes genügen:

$$f(z) = e^{az}(e^{\delta z} - 1)^{2m} \left(\sum_{\varrho=0}^{r-1} c_\varrho\, e^{\varrho \delta z} \right)^2 \tag{19}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m} (-1)^{2m-\varkappa} \binom{2m}{\varkappa} exp\left([a + (\nu + \mu + \varkappa)\delta] z\right),$$

wo m und r beliebige natürliche Zahlen bedeuten und δ — was immer möglich ist — so bestimmt sei, daß $a + 2(m + r - 1)\delta$ in U liegt.

Wenn auch die Transformierte

$$L(D)f(z) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m} (-1)^{2m-\varkappa} \binom{2m}{\varkappa} L(a + (\nu+\mu+\varkappa)\delta)\, exp([a + (\nu+\mu+\varkappa)\delta] z) \tag{20}$$

von konstantem Vorzeichen sein soll, gilt im Falle des Nichtverschwindens, wie man für absolut genügend groß gewählte, reelle Werte von z feststellt:

$$sg\, L(D)f(z) = sg\, L(a) = +1 .$$

Setzt man insbesondere in (20) $z = 0$, so muß demnach die quadratische Form

$$\{L(D)f(z)\}_{z=0} = \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m} (-1)^{2m-\varkappa} \binom{2m}{\varkappa} L\big(a + (\nu + \mu + \varkappa)\,\delta\big)$$

positiv sein. Die als Koeffizient von $c_\nu\, c_\mu$ auftretende Summe ist aber gerade die Differenz $\Delta^{2m} L\big(a + (\nu + \mu)\,\delta\big)$, gebildet für den Zuwachs δ, so daß wir schreiben können

$$\{L(D)f(z)\}_{z=0} = \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \Delta^{2m} L\big(a + (\nu + \mu)\,\delta\big)\ . \tag{21}$$

Die Determinante von (21),

$$\Theta_{2m}^{(r)} = \left| \Delta^{2m} L\big(a + (\nu + \mu)\,\delta\big) \right|_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1}\ ,$$

ist nach dem Vorausgegangenen nicht negativ und geht — wenn immer ν den Zeilen-, μ den Kolonnenindex bezeichnet — bei passender linearer Kombination der Zeilen unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\Delta^p \Delta^q L(a) = \Delta^{p+q} L(a) = \sum_{t=0}^{p} (-1)^t \binom{p}{t} L\big(a + (p - t)\,\delta\big)$$

über in

$$\Theta_{2m}^{(r)} = \left| \Delta^{2m+\nu} L(a + \mu\,\delta) \right|_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1}$$

und durch analoge Kombination der Kolonnen in

$$\Theta_{2m}^{(r)} = \left| \Delta^{2m+\nu+\mu} L(a) \right|_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1}\ .$$

Zufolge der Regularitätsvoraussetzung über $L(x)$ ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung samt beliebig häufiger Iteration anwendbar, so daß wir die Determinanten schließlich in der Gestalt

$$\Theta_{2m}^{(r)} = \left| \delta^{2m+\nu+\mu} L^{(2m+\nu+\mu)}(a_{\nu+\mu}) \right| = \delta^{r(2m+r-1)} \left| L^{(2m+\nu+\mu)}(a_{\nu+\mu}) \right|$$

schreiben können, wobei für $a_{\nu+\mu}$ folgende Alternative besteht:

$$a < a_{\nu+\mu} < a + (2m + \nu + \mu)\,\delta,$$
(22)
$$a > a_{\nu+\mu} > a + (2m + \nu + \mu)\,\delta.$$

Nach Division durch den positiven Faktor $\delta^{r(2m+r-1)}$ und Grenzübergang $\delta \to 0$ erhalten wir unter Berücksichtigung von (22)

$$\lim_{\delta\to 0} \Theta^{(r)}_{2m}\, \delta^{-r(2m+r-1)} = \left| L^{(2m+\nu+\mu)}(a) \right| = \left| l_{2m+\nu+\mu} \right| = H^{(r)}_{2m},$$

wobei mit l_k die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $L(x)$ an der Stelle $x = a$ bezeichnet sind.

Weil aber die quadratische Form (21) für jedes genügend kleine $|\delta|$ positiv sein soll, folgt

$$H^{(r)}_{2m} \geqq 0 \text{ für } \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \cdots \\ r\; = 1, 2, 3, \cdots, \end{array}$$

das heißt: Sämtliche Hauptdeterminanten der unendlichen Matrix:

(23)
$$\begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 \cdots & \cdots & \cdots \\ l_2 & l_3 & l_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_3 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

sind nichtnegativ. Unter Zuhilfenahme der Identität[24])

(24)
$$H^{(r)}_{n} \cdot H^{(r)}_{n+2} - H^{(r+1)}_{n} \cdot H^{(r-1)}_{n+2} = \left(H^{(r)}_{n+1}\right)^2$$

gelangt man jetzt leicht zum Ergebnis, daß die Determinanten $H^{(r)}_0$ entweder die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 oder dann von Hilfssatz 6 erfüllen müssen, woraus die Existenz der Integraldarstellung (18) für $L(x)$ hervorgeht.

Für die zweite Hälfte des Beweises sei diese Eigenschaft von $L(x)$ vorausgesetzt und

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, e^{\lambda_\nu z}$$

dem Operationsfeld angehörend und von konstanten Vorzeichen, sonst

---

[24]) Vgl. *Kowalewski*, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, 1909, S. 90, 109.

beliebig. Auch die Transformierte kann dann für reelles z das Vorzeichen nicht wechseln, wie ihre Integraldarstellung

$$L(D)f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{\lambda_\nu z} a_\nu L(\lambda_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\lambda_\nu z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_\nu u} d\Phi(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\lambda_\nu (z+u)} \right) d\Phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+u)\, d\Phi(u)$$

ohne weiteres erkennen läßt.

Satz 11. *Die allgemeinste Transformation L von der Eigenschaft, daß die größte reelle Nullstelle ungerader Ordnung von $L(D)f(z)$ die entsprechende Nullstelle von $f(z)$ nicht übertrifft, läßt im Intervall J eine Integraldarstellung* (18) *zu, mit der Zusatzbedingung $\Phi(u) = const.$ für $u < 0$.*

Beweis: Es sei β eine beliebig vorgegebene positive Zahl, $f(z)$ die Exponentialsumme (19), dann ist immer eine reelle Zahl $\varepsilon \neq 0$ bestimmbar, daß auch sämtliche Koeffizienten von z in den Exponenten von

$$g(z) = (e^{\varepsilon^2 z+\beta} - 1) f(z) = e^{\varepsilon^2 z+\beta} f(z) - f(z) \tag{25}$$

der Umgebung U von a angehören. Die einzige reelle Nullstelle ungerader Ordnung von $g(z)$ ist einfach und negativ. Für $z > -\dfrac{\beta}{\varepsilon^2}$ gilt $g(z) > 0$. Die Transformierte von (25),

$$L(D)g(z) = e^\beta \cdot \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m} (-1)^{2m-\varkappa} \binom{2m}{\varkappa} L(a+\varepsilon^2+(\nu+\mu+\varkappa)\delta)\, exp([a+\varepsilon^2+(\nu+\mu+\varkappa)\delta]z)$$

$$- \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m} (-1)^{2m-\varkappa} \binom{2m}{\varkappa} L(a+(\nu+\mu+\varkappa)\delta)\, exp([a+(\nu+\mu+\varkappa)\delta]z)\ ,$$

erweist sich als positiv für hinreichend großes z; die quadratische Form, die man für $z = 0$ erhält, darf somit nicht negativ sein, d. h.

$$\{L(D)g(z)\}_{z=0} = \left[e^\beta \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \Delta^{2m} L(a+\varepsilon^2+(\nu+\mu)\delta) - \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \Delta^{2m} L(a+(\nu+\mu)\delta) \right] \geqq 0.$$

Da diese Ungleichung für jedes hinreichend kleine $|\varepsilon|$ gültig ist, bleibt sie beim Grenzübergang $|\varepsilon| \to 0$ bestehen; es wird also

$$(e^\beta - 1) \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \Delta^{2m} L(a + (\nu+\mu)\delta) \geqq 0.$$

Der erste Faktor auf der linken Seite ist aber wegen $\beta > 0$ positiv, so daß, wie im Beweis zu Satz 10, geschlossen werden kann, daß sämtliche Hauptdeterminanten der Matrix (23) nichtnegativ sind.

Die Funktion

$$h(z) = \delta e^{\alpha z}(e^{\delta z} - 1)^{2m+1}\left(\sum_{\rho=0}^{r-1} c_\rho e^{\varrho\,\delta z}\right)^2 \tag{26}$$

$$= \delta \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m+1} (-1)^{2m+1-\varkappa}\binom{2m+1}{\varkappa} e^{[\alpha+(\nu+\mu+\varkappa)\delta]z},$$

bei der α und δ in gleicher Weise bestimmt seien wie in (19), hat die einzige reelle Nullstelle ungerader Ordnung $z = 0$ und ist nicht negativ für $z \geqslant 0$. Die Transformierte

$$L(D)h(z) = \delta \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \sum_{\varkappa=0}^{2m+1} (-1)^{2m+1-\varkappa}\binom{2m+1}{\varkappa} L(\alpha + [\lambda+\mu+\varkappa]\delta)\, exp\,([\alpha+(\nu+\mu+\varkappa)\delta]z)$$

ist ersichtlich positiv für genügend großes z, darf also auch nicht negativ werden für $z \geqslant 0$. Insbesondere muß für $z = 0$

$$\{L(D)\,h(z)\}_{z=0} = \delta \sum_{\nu,\mu}^{0\ldots r-1} c_\nu c_\mu \Delta^{2m+1} L(\alpha + [\nu+\mu]\delta) \geqslant 0$$

gelten. Völlig gleichartig wie im Beweis zu Satz 10 wird daraus gefolgert, daß sämtliche Hauptdeterminanten der unendlichen Matrix

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5\cdots & \cdots & \cdots \\ l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_3 & l_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_4\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{27}$$

nichtnegativ sein müssen.

Die Bedingungen für die Matrices (23) und (27) führen nun in Verbindung mit der Determinantenrelation (24) ohne Schwierigkeit zum Ergebnis, daß die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $L(x)$ an der Stelle $x = \alpha$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 oder 7 genügen müssen, womit der Notwendigkeitsbeweis erbracht ist.

Gilt aber für $L(x)$ eine Darstellung

$$L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu} d\Phi(u)$$

mit $\Phi(u) = \text{const.}$ für $u < 0$, und ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\lambda_\nu z}$$

eine Funktion des Operationsfeldes, so ist die größte Wechselstelle z_0 von $f(z)$ nicht kleiner als die entsprechende der Transformierten, wie deren Gestalt

$$L(D) f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+u) d\Phi(u)$$

zur Evidenz zeigt; ist doch

$$sg f(z_0 + \varepsilon + u) = sg f(z_0 + \varepsilon) \text{ für } u \geqq 0 \, ,$$

wenn $\varepsilon > 0$, sonst beliebig klein ist.

(Eingegangen den 28. Dezember 1934.)