Elementare Theorie der konvexen Polyeder.

Elementare Theorie der konvexen Polyeder

Von H. Weyl, Princeton, New Jersey

§ 1. Hauptsatz über konvexe Pyramiden

Ist S eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge im $(n - 1)$-dimensionalen affinen Raum mit den Koordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, so können die Punkte der *konvexen Hülle* von S in doppelter Weise gekennzeichnet werden: 1. sie sind *Schwerpunkte* von Punkten aus S; 2. sie gehören allen „*Stützen*" von S an. Eine Stütze von S ist ein Halbraum

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a \geqq 0,$$

in dem alle Punkte von S liegen. Der Hauptsatz über konvexe Hüllen sagt aus, daß beide Definitionen identisch sind. Dabei läßt sich 1. dahin verschärfen, daß nur Schwerpunkte aus höchstens n Punkten von S zugelassen werden, 2. dahin, daß lediglich die „extremen" Stützen herangezogen werden. Der Beweis dieses Satzes wird naturgemäß mit mengentheoretischen Hilfsmitteln erbracht; die einfachste Anordnung findet man wohl in der Einleitung der Arbeit von Carathéodory „Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen", Rend. Circ. Mat. Palermo **32**, 1911, S. 198—201.

Besteht S nur aus *endlich vielen Punkten*, so ist die Hülle ein *konvexes Polyeder*. Für diesen Fall müssen sich die Hauptsätze auf *finite* Art herleiten lassen; die übliche Beweisanordnung leistet dies nicht, weil sie die Anwendung der mengentheoretischen Schlußweise auf die nach 1. definierte konvexe Hülle mit sich bringt. Es scheint hier eine Lücke in der Literatur vorzuliegen, die einmal ausgefüllt werden sollte; darum veröffentliche ich diese kleine Skizze, zu deren Niederschrift ich durch mein letztes Seminar in Göttingen im Sommer 1933 veranlaßt wurde, das die konvexen Körper zum Gegenstand hatte. Was wir im Auge haben, kann auch als eine *elementare Theorie endlicher Systeme linearer Ungleichungen* bezeichnet werden. Man geht zweckmäßig von der *homogenen* Formulierung aus.

Ein *Punkt* a in R_n ist eine Reihe von n reellen Zahlen $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Zwei von 0 verschiedene Punkte a und b liegen auf demselben *Strahl*, wenn die b_i aus den a_i durch Multiplikation mit einem gemeinsamen *positiven* Proportionalitätsfaktor hervorgehen; solche Punkte brauchen im folgenden nicht unterschieden zu werden. Alle Punkte x, welche einer Ungleichung

$$(1) \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geqq 0$$

genügen, bilden einen Halbraum, der gekennzeichnet ist durch den „Punkt" $a = (a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ im dualen Raum P_n. Wiederum ändert sich nichts, wenn alle a_i mit einem gemeinsamen positiven Faktor multipliziert werden.

Gegeben sei ein endliches System S von Punkten a. Es soll nicht-ausgeartet sein; d. h. die Punkte a sollen nicht alle in einer und derselben Ebene liegen oder nicht alle einer linearen Gleichung

$$(2) \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \qquad [(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)]$$

genügen. (1) ist *Stütze* an S, wenn alle Punkte x des Systems S jene Ungleichung erfüllen. Es ist eine *extreme Stütze*, wenn für $n - 1$ linear unabhängige Punkte x von S darin das Gleichheitszeichen gilt. *Es existieren nur endlich viele extreme Stützen an S*; man findet sie, indem man unter den Punkten a von S auf alle Weisen $n - 1$ unabhängige auswählt, durch sie die eindeutig bestimmte Ebene (2) legt und die beiden zugehörigen Halbräume

$$\pm (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) \geqq 0$$

daraufhin prüft, ob sie Stützen sind.

Satz 1 (*Hauptsatz*). *Gegeben ein endliches nicht-ausgeartetes Punktsystem S. Ein Punkt x, für welchen alle extremen Stützungsgleichungen zu S erfüllt sind, läßt sich linear-positiv aus den Punkten $a, b, \cdots$ des Systems S kombinieren:*

$$(3) \qquad x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \cdots \qquad [\lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \cdots].$$

Die sämtlichen Punkte x, welche den extremen Stützen gemeinsam angehören, bilden eine Figur, die *konvexe Pyramide* heißen möge. Ein Punkt x, der aus den Punkten $a, b, \cdots$ des Systems S durch positive Kombination (3) gewonnen werden kann, heiße kurz „darstellbar durch S". Im inhomogenen Raum existiert wenigstens *eine* extreme Stütze: dies ist ein nicht-triviales Teilresultat des Hauptsatzes. In dem jetzt in Frage stehenden homogenen Raum aber kann es selbstverständlich vorkommen, daß S überhaupt keine extreme Stütze besitzt; dann sagt der Hauptsatz aus, daß *jeder* Punkt durch S darstellbar ist. Im Beweise muß dieser Fall besonders behandelt werden.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

a) *Erster Fall: es sind extreme Stützen vorhanden.*

$\alpha, \beta, \cdots$ seien die extremen Stützen. Für das „Zentrum"

$$e = a + b + \cdots$$

von S gelten dann die Ungleichungen

$$(\alpha e) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n > 0, \qquad (\beta e) > 0, \cdots.$$

$x = p$ sei der allen extremen Stützen angehörige Punkt, für welchen die Darstellbarkeit bewiesen werden soll:

$$(\alpha p) \geqq 0, \qquad (\beta p) \geqq 0, \cdots.$$

Wir bilden $q = p - \lambda e$. Die extremen Stützungleichungen bleiben für q erfüllt, solange

$$(\alpha p) - \lambda(\alpha e) \geqq 0, \quad (\beta p) - \lambda(\beta e) \geqq 0, \cdots$$

ist. Wir wählen also für λ die *kleinste* unter den Zahlen

$$(\alpha p) \,/\, (\alpha e), \qquad (\beta p) \,/\, (\beta e), \cdots \tag{4}$$

Es sei z. B. $\lambda = (\alpha p) / (\alpha e)$. Wenn q, *das auf einer extremen Stützebene liegt:* $(\alpha q) = 0$, darstellbar ist, so auch p.

Für spätere Zwecke ist es gut, diesen ersten Beweisschritt ein wenig zu modifizieren. Man nehme nämlich für e nicht das Zentrum von S, sondern einen geeigneten der Punkte $a, b, \cdots$ selbst. β sei eine der extremen Stützen. Nicht alle Punkte $x = a, b, \cdots$ des Systems S erfüllen die Gleichung $(\beta x) = 0$, es sei etwa $(\beta a) > 0$. Ich wähle dann $e = a$. Die extremen Stützen zerfallen in zwei Klassen: für diejenigen der ersten Klasse α gilt $(\alpha e) > 0$, für die der zweiten Klasse α_0 aber die Gleichung $(\alpha_0 e) = 0$. Die erste Klasse ist nicht leer, weil das β, von dem wir ausgingen, dazu gehört. λ werde als das Minimum unter den Zahlen (4) bestimmt, in denen $\alpha, \beta, \cdots$ die sämtlichen Stützen *der ersten Klasse* bedeuten. Wiederum bilden wir $q = p - \lambda e$. Das Wesentliche ist, daß q allen extremen Stützungsgleichungen genügt, aber wenigstens einer Stütz*gleichung:* $(\alpha q) = 0$.

Man kann annehmen, daß die Gleichung $(a\,x) = 0$ die Gestalt hat:

$$x_n = 0 \qquad (a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0,\ a_n = 1).$$

q liegt in der durch diese Gleichung gekennzeichneten Stützebene R_{n-1} mit den Koordinaten $(x_1, \cdots, x_{n-1})$. Der Beweis des Hauptsatzes soll durch Schluß von $n - 1$ auf n erbracht werden, indem man annimmt, daß er bereits für den eben eingeführten R_{n-1} gilt. Alle Punkte x von S genügen der Ungleichung $x_n \geqq 0$. In S_0 vereinigen wir diejenigen unter diesen Punkten, für welche $x_n = 0$ ist, in S' die übrigen. Wir wissen, daß S_0 $n - 1$ linear unabhängige Punkte enthält, da ja $x_n \geqq 0$ eine *extreme* Stütze war. Wir argumentieren nunmehr im Raume R_{n-1} für das nicht-ausgeartete Punktsystem S_0. Es sei

$$\beta_1\, x_1 + \cdots + \beta_{n-1}\, x_{n-1} \geqq 0 \tag{5}$$

irgend eine extreme Stütze an dasselbe. *Ich behaupte, daß q diese Ungleichung erfüllt.* Um das einzusehen, bilde ich die Ungleichung

$$\beta_1\, x_1 + \cdots + \beta_{n-1}\, x_{n-1} - \mu\, x_n \geqq 0. \tag{6}$$

Ist sie für alle Punkte von S' erfüllt, so gilt sie für alle Punkte von S. Ich nehme also für μ das Minimum von

$$(\beta_1\, x_1 + \cdots + \beta_{n-1}\, x_{n-1}) \,/\, x_n,$$

wo x die endlich vielen Punkte von S' durchläuft; das Minimum werde angenommen für $x = a$. Die Ungleichung (6) ist dann eine Stütze an S; und zwar *eine extreme Stütze.* Denn es gilt das Gleichheitszeichen für $n - 2$ unabhängige Punkte von S_0 und für den (nicht in R_{n-1} gelegenen) Punkt a von S'. Also genügt q in der Tat der Ungleichung (6) und damit (5). Folglich ist q nach dem Hauptsatz in R_{n-1} darstellbar durch S_0, mithin p darstellbar durch S. — Es ist bei diesem Gedankengang gleichgültig, ob das $(n - 1)$-dimensionale Punktsystem S_0 extreme Stützen besitzt oder nicht.

b) *Zweiter Fall: es sind keine extremen Stützen vorhanden.*

Wir gehen aus von irgend einem Halbraum λ:

$$(\lambda\, x) \geqq 0, \tag{7}$$

dessen Ebene $(\lambda\, x) = 0$ durch $n - 1$ linear unabhängige Punkte von S hindurchgeht. Nach Voraussetzung gibt es wenigstens einen Punkt

$x = e$ von S auf der abgewandten Seite: $(\lambda e) < 0$. Wir geben eine Konstruktion an, welche den Halbraum λ durch einen andern ersetzt, der mindestens einen Punkt von S mehr enthält. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens landen wir dann wiederum beim Fall a).

Man nehme das Koordinatensystem so an, daß $(\lambda x) = x_n$ ist und e die Koordinaten $(0, 0, \cdots, 0, -1)$ hat. Diejenigen Punkte von S, deren letzte Koordinate $x_n \geqq 0$ ist, bilden ein Teilsystem S^+ von S. Wir projizieren die Punkte von S^+ von e aus auf die Trennungsebene $(\lambda x) = 0$; dadurch entsteht aus S^+ ein gewisses Punktsystem S_0 in dem $R_{n-1} : x_n = 0$. Und zwar geht durch die Projektion

$$a = (a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) \text{ mit } a_n \geqq 0$$

über in

$$\bar{a} = (a_1, \cdots, a_{n-1}) \text{ in } R_{n-1}.$$

$\bar{a}$ ist darstellbar durch S, genauer durch (S^+, e): $\bar{a} = a + a_n \cdot e$. Ist

$$(\alpha x) \equiv \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \geqq 0 \tag{8}$$

eine extreme Stütze an S_0, so genügen dieser Ungleichung alle Punkte von S^+ und außerdem e. Die Ebene $(\alpha x) = 0$ geht durch $n - 1$ unabhängige Punkte von S hindurch, nämlich durch $n - 2$ solche Punkte, deren Projektionen $\bar{a}$ unabhängig sind in R_{n-1} und den nicht in R_{n-1} liegenden Punkt e. Der Halbraum (8) enthält also wirklich wenigstens einen Punkt von S mehr als der Halbraum (7), von welchem wir ausgingen.

Das Verfahren versagt jedoch, wenn S_0 keine extreme Stütze besitzt. In diesem Fall ist aber nach dem für $n - 1$ Dimensionen als gültig vorausgesetzten Hauptsatz *jeder* Punkt in der Ebene R_{n-1} darstellbar durch S_0, folglich auch durch (S^+, e). Indem man ein nicht-negatives Multiplum von e addiert, erkennt man, daß in der gleichen Weise alle Punkte des abgewandten Halbraums $(\lambda x) \leqq 0$ darstellbar sind. Wenn es überhaupt einen Punkt e' in S mit der Koordinate $x_n > 0$ gibt, so erhält man durch Addition positiver Multipla von e' alle Punkte des Halbraums $(\lambda x) \geqq 0$ dargestellt durch (S^+, e, e'). Ein solches e' muß existieren; denn sonst würden alle Punkte von S der Ungleichung $x_n \leqq 0$ genügen, und alsdann wäre $-x_n = -(\lambda x)$ eine extreme Stütze entgegen der Annahme b).

Zusatz. Der Fall b), in welchem keine extremen Stützen vorhanden sind, kann dadurch gekennzeichnet werden, daß die Null darstellbar ist:

$0 = \lambda a + \mu b + \cdots$ *mit Koeffizienten* $\lambda, \mu, \cdots$, *die alle wirklich positiv (nicht Null) sind.* Im Falle b) ist nämlich jeder Punkt darstellbar; indem man zum Zentrum $e = a + b + \cdots$ eine Darstellung von $-e$ addiert, erhält man eine Darstellung der 0 mit lauter Koeffizienten $\geqq 1$. Das Umgekehrte ist trivial.

Satz 2 (Verschärfung des Hauptsatzes). Ein allen extremen Stützen angehöriger Punkt läßt sich aus höchstens n Punkten von S positiv-linear kombinieren.

Beim *Beweise* dieser Verschärfung muß man *im Falle a*) so vorgehen, daß man für e nicht den Schwerpunkt, sondern einen geeigneten der Punkte von S selbst wählt. Setzt man die Gültigkeit von Satz 2 für $n - 1$ Dimensionen voraus, so kann man alsdann q durch höchstens $n - 1$ in R_{n-1} gelegene Punkte von S darstellen, p also durch höchstens n Punkte von S.

Im Falle b) erkennt man durch den gleichen Induktionsschluß, daß die Punkte in $(\lambda x) \leqq 0$ durch höchstens n Punkte von S darstellbar sind, nämlich durch $n - 1$ Punkte von S^+ und e. Für die Punkte von $(\lambda x) \geqq 0$ benötigt man aber außerdem e', so daß sich hier zunächst nur die Darstellbarkeit durch höchstens $n + 1$ Punkte ergibt, nämlich durch $n - 1$ Punkte von S^+, e und e'.

Wir betrachten jetzt dieses aus $n + 1$ Punkten bestehende Punktsystem S' und wenden die Überlegung von Fall b) auf S' statt auf S an. Alle Punkte von S' außer e haben die letzte Koordinate $x_n \geqq 0$; durch ihre Projektion von e aus auf die Ebene $x_n = 0$ entsteht das n-gliedrige Punktsystem S_0'. Alle Punkte von S' außer e' haben die letzte Koordinate $x_n \leqq 0$. Besitzt S_0' eine extreme Stütze, so erhält man nach dem ersten Teile des Falles b) sogleich eine extreme Stütze an ganz S', und dann weiß man nach Fall a), daß jeder Punkt, der durch die $n + 1$ Punkte S' darstellbar ist, auch durch n unter ihnen darstellbar ist. Besitzt aber S_0' keine extreme Stütze, so kann man jeden Punkt mit $x_n \leqq 0$ durch n Punkte von S' darstellen; ein Punkt p mit $x_n \geqq 0$ aber läßt sich positiv-linear kombinieren aus $n - 1$ Punkten b_i von S_0' und e'. Soweit die Wiederholung. Jetzt kommt das Neue: entweder gehören alle b_i zu S'; dann ist p dargestellt durch n Punkte von S'. Oder von den Punkten b_i gehören nur die ersten $n - 2$ zu S', während der letzte die in $x_n = 0$ liegende positiv-lineare Kombination von e' und e ist; dann aber ist p dargestellt durch $(b_1, \cdots, b_{n-2}, e', e)$.

[Diesen krummen Umweg über S' im Falle b) habe ich nicht ausschalten können.]

§ 3. Folgerungen aus dem Hauptsatz; Systeme linearer homogener Ungleichungen

Den Punkten $a, b, \cdots$ des Systems S ordnen wir zu das System S linearer Ungleichungen:

$$(9) \qquad S: \begin{cases} (a\,\xi) = a_1\,\xi_1 + \cdots + a_n\,\xi_n \geqq 0\,, \\ (b\,\xi) = b_1\,\xi_1 + \cdots + b_n\,\xi_n \geqq 0\,, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\,. \end{cases}$$

ξ ist dann und nur dann eine Stütze an das Punktsystem S, wenn ξ den Ungleichungen S genügt, oder, wie wir sagen wollen: wenn ξ zu (S) gehört. Hier figuriert (S) als Bezeichnung für den durch die Ungleichungen definierten Teil des dualen Raumes P_n. Wir nannten S nicht-ausgeartet, falls es kein ξ außer $\xi = 0$ gibt, für welches in allen Ungleichungen S das Gleichheitszeichen eintritt. Wir teilen den Hauptsatz in zwei Teile: erstens behaupten wir, daß jeder Punkt p, der allen Stützen angehört, durch S darstellbar ist. Diese Bedingung ist trivialerweise nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig; denn ein durch S darstellbarer Punkt gehört offenbar allen Stützen von S an. Im Hinblick hierauf kann dann zweitens hinzugefügt werden, daß ein Punkt notwendig *allen* Stützen angehört, wenn er den *extremen* Stützen angehört. Für das System S linearer Ungleichungen ergeben sich so die folgenden Aussagen:

Satz 3. Durch endlich viele Ungleichungen S, (9), *sei das Gebiet (S) des dualen Raumes abgegrenzt. Ist $(p\,\xi) \geqq 0$ in ganz (S), so läßt sich die Form $(p\,\xi)$ der Variablen ξ positiv-linear kombinieren aus den Formen $(a\xi)$, $(b\,\xi), \cdots$ des Systems S.*

Satz 4. ξ heißt eine extreme Lösung des Systems S, wenn in $n - 1$ linear unabhängigen unter diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen eintritt. Ist S nicht-ausgeartet, so gilt $(p\,\xi) \geqq 0$ für alle ξ in (S), falls es für die extremen ξ gilt.

Der Hauptsatz war bewiesen unter der Voraussetzung, daß S nicht-ausgeartet ist. Aber die Teilaussage Satz 3 ist davon unabhängig; man operiere nämlich in dem linearen Unterraum R_m von niederster Dimensionszahl m, der alle Punkte $a, b, \cdots$ des Systems S enthält. In der Teilaussage Satz 4 aber kommt die Dimensionszahl n explizite vor; darum ist hier die Voraussetzung des Nicht-entartet-seins wesentlich.

Herstellung der Dualität.

I. Es gibt nur eine endliche Anzahl extremer Lösungen ξ der Ungleichungen S — wenn wir, was natürlich ist,

$$(\varrho\,\xi_1, \cdots, \varrho\,\xi_n) \qquad (\varrho > 0)$$

als die gleiche Lösung wie $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ betrachten. Wie früher mögen diese extremen Lösungen mit $\alpha, \beta, \cdots$ bezeichnet werden. Daß der Punkt x den extremen Stützen angehört, drückt sich in dem zu S „dualen" System von Ungleichungen aus:

$$(10) \qquad \Sigma: \begin{cases} (\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geqq 0\,, \\ (\beta x) = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \geqq 0\,, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\,. \end{cases}$$

Man merke sich, daß die Ungleichungen bestehen

$$\begin{array}{ll} (\alpha a) \geqq 0, & (\alpha b) \geqq 0, \cdots, \\ (\beta a) \geqq 0, & (\beta b) \geqq 0, \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\,. \end{array}$$

Darum können wir Satz 4 so aussprechen:

Satz 5. Liegt p in (Σ) und π in (S), so ist $(p\pi) \geqq 0$.

Und genauer:

Satz 6. p gehört zu (Σ) dann und nur dann, wenn $(p\xi) \geqq 0$ ist für alle ξ in (S).

Daraus folgt der „duale"

Satz 7. π gehört zu (S) dann und nur dann, wenn $(x\pi) \geqq 0$ für alle x in (Σ).

Denn die Ungleichung $(x\,\pi) \geqq 0$ für ein π in (S) und ein x in (Σ) ist durch Satz 5 gewährleistet. Erfüllt umgekehrt ein festes π die Ungleichung $(x\pi) \geqq 0$ für alle x in (Σ), so gilt insbesondere $(a\pi) \geqq 0$, $(b\pi) \geqq 0, \cdots$, d. h. π gehört zu (S).

Es war nicht ganz zutreffend, wenn wir die Sätze 6 und 7 als zueinander dual bezeichneten. Denn wohl sind $\alpha, \beta, \cdots$ die extremen Lösungen des Ungleichungssystemes S, aber es sind nicht $a, b, \cdots$ die extremen Lösungen des Systems Σ. Um die volle Dualität herzustellen, müssen wir beweisen, daß die extremen Lösungen des Systems Σ unter den Punkten $a, b, \cdots$ enthalten sind. Dafür bedürfen wir

II. *der Kennzeichnung der extremen Punkte* $\alpha, \beta, \cdots$ *innerhalb* (S):

Satz 8. π *ist in* (S) *extrem dann und nur dann, wenn die einzige Zerlegung von* π *in zu* (S) *gehörige Summanden* $\xi' + \xi'' + \cdots$ *die triviale ist, bei welcher* $\xi', \xi'', \cdots$ *auf demselben Strahl wie* π *liegen:*

$$\xi_i' = \varrho' \pi_i, \quad \xi_i'' = \varrho'' \pi_i, \cdots \qquad (\varrho' \geqq 0, \varrho'' \geqq 0, \cdots; \ \varrho' + \varrho'' + \cdots = 1).$$

Beweis. a) π sei eine der extremen Lösungen $\alpha, \beta, \cdots$. Es gibt $n - 1$ unabhängige Punkte $a, b, \cdots$ in S, für welche die Gleichungen gelten:

$$(a\pi) = 0, \qquad (b\pi) = 0, \cdots$$

In

$$(a\pi) = (a\xi') + (a\xi'') + \cdots$$

sind aber die einzelnen Summanden $\geqq 0$; darum folgt aus $(a\pi) = 0$:

$$(a\xi') = 0, \qquad (a\xi'') = 0, \cdots;$$

ebenso

$$(b\xi') = 0, \qquad (b\xi'') = 0, \cdots;$$

usw. Die $n - 1$ linearen unabhängigen Gleichungen

$$(a\xi') = 0, \qquad (b\xi') = 0, \cdots$$

haben bis auf einen Proportionalitätsfaktor nur die eine Lösung π; mithin gilt

$$\xi_i' = \varrho' \pi_i, \qquad \xi_i'' = \varrho'' \pi_i, \cdots.$$

Für wenigstens einen Punkt c des Systems S besteht die Ungleichung $(\pi c) > 0$. Da $(\xi' c) \geqq 0, \cdots$, ergeben sich die Faktoren $\varrho', \varrho'', \cdots$ als nicht-negativ.

b) Erlaubt π in (S) nur die triviale Zerlegung, so ist π eine der extremen Lösungen $\alpha, \beta, \cdots$. Man wende nämlich Satz 3 nicht an auf das System der Ungleichungen S, sondern auf Σ; so erkennt man, daß eine Darstellung möglich ist:

$$\pi_i = l\alpha_i + m\beta_i + \cdots; \qquad l \geqq 0, \ m \geqq 0, \cdots.$$

In unserem Falle müssen nach Voraussetzung Gleichungen gelten

$$l a_i = \varrho \pi_i, \quad m \beta_i = \sigma \pi_i, \cdots \quad (\varrho \geqq 0, \sigma \geqq 0, \cdots; \quad \varrho + \sigma + \cdots = 1).$$

Einer der Faktoren $\varrho, \sigma, \cdots$ ist von 0 verschieden, z. B. ϱ, und dann haben wir, wie behauptet, $\pi_i = \frac{l}{\varrho} \cdot a_i$.

III. Um das System Σ von Ungleichungen dual zu dem System S behandeln zu können, müssen wir wissen, daß jenes wie dieses nicht-ausgeartet ist. Wir führen zu diesem Zweck die *zusätzliche Voraussetzung* ein, daß (S) einen *inneren* Punkt enthält, d. i. einen Punkt ξ^0, der den Ungleichungen

$$(a \xi^0) > 0, \qquad (b \xi^0) > 0, \cdots$$

genügt.

Satz 9. Ist S nicht-ausgeartet und enthält (S) einen inneren Punkt, so ist auch Σ nicht-ausgeartet.

Es gelte nämlich für $x = p$ in den sämtlichen Ungleichungen Σ das Gleichheitszeichen:

$$(11) \qquad (\alpha p) = 0, \qquad (\beta p) = 0, \cdots.$$

Alsdann gehört p sowohl wie $-p$ zu (Σ), es bestehen die beiden Ungleichungen

$$(p \xi) \geqq 0 \quad \text{und} \quad -(p \xi) \geqq 0$$

und damit die Gleichung $(p \xi) = 0$ für alle ξ in (S). Insbesondere ist $(p \xi^0) = 0$. p ist darstellbar durch S:

$$p_i = \lambda a_i + \mu b_i + \cdots; \quad \lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \cdots.$$

Darum liefert die Gleichung $(p \xi^0) = 0$:

$$\lambda (a \xi^0) + \mu (b \xi^0) + \cdots = 0\,.$$

Da nach Voraussetzung die einzelnen Faktoren $(a \xi^0)$, $(b \xi^0)$, $\cdots$ positiv sind, müssen die nicht-negativen Koeffizienten $\lambda, \mu, \cdots$ sämtlich verschwinden. Das liefert $p = 0$: die Gleichungen (11) haben also keine Lösung außer $p = 0$.

Wir fügen hinzu, daß unter den Voraussetzungen von Satz 9, die für den Rest dieses Paragraphen beibehalten werden, auch (Σ) innere Punkte enthält: das Zentrum $a + b + \cdots$ von S ist z. B. ein solcher innerer Punkt.

IV. Die extremen Lösungen von Σ seien $a', b', \cdots$.

Satz 10. Der durch die zu Σ dualen Ungleichungen

$$S' : (a' \xi) \geqq 0, \quad (b' \xi) \geqq 0, \cdots$$

definierte Bereich (S') ist mit (S) identisch. Die Punkte $a', b', \cdots$ sind eine Auswahl unter den Punkten $a, b, \cdots$ von S.

Der erste Teil der Aussage: $(S) = (S')$ folgt, wenn man Satz 6 auf Σ statt auf S anwendet und mit Satz 7 vergleicht. Weil a' zu (Σ) gehört, besteht eine Darstellung

$$a_i' = \lambda a_i + \mu b_i + \cdots; \qquad \lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \cdots.$$

Weil aber a' extrem in (Σ) ist, folgt daraus mit Hilfe der Kennzeichnung II. wie im Beweise des Teiles b) von II., daß a' (bis auf einen positiven Proportionalitätsfaktor) mit einem der Punkte $a, b, \cdots$ identisch sein muß.

Σ war gebildet mit den extremen Lösungen $\alpha, \beta, \cdots$ von S; umgekehrt S' mittels der extremen Lösungen $a', b', \cdots$ von Σ. Nun müßte man wiederum die extremen Lösungen von S' betrachten: $\alpha', \beta', \cdots$. Diese sind aber nicht bloß eine Auswahl unter den $\alpha, \beta, \cdots$, sondern die extremen Lösungen von S' sind mit den extremen Lösungen von S identisch:

Satz 11. Die Systeme von Ungleichungen S' und Σ sind wechselseitig zueinander dual.

Denn in II. sind die extremen ξ gekennzeichnet auf Grund des Bereiches (S) aller ξ; die Bereiche (S) und (S') sind aber identisch. Das Resultat mag man für die konvexen Pyramiden so aussprechen:

Satz 12. Durch eine extreme Kante gehen $n - 1$ unabhängige Stützebenen, in einer extremen Stützebene liegen $n - 1$ unabhängige extreme Kanten.

Es ist danach gleichgültig, ob man bei der Definition einer konvexen Pyramide von endlichvielen Punkten $a, b, \cdots$ ausgeht, wie oben geschah, oder von endlichvielen Stützen $\alpha, \beta, \cdots$.

V. Eine Konsequenz der vollständigen Dualisierung ist der

Satz 13. *Der Durchschnitt zweier konvexen Pyramiden ist wiederum eine konvexe Pyramide.*

Man kennzeichne nämlich jede der beiden gegebenen Pyramiden durch ihre endlichvielen extremen Stützungleichungen und vereinige dann beide Systeme von Stützungleichungen in ein einziges: durch dieses System wird wiederum eine konvexe Pyramide erklärt. Wollen wir sie aus endlichvielen Punkten $a, b, \cdots$ entspringen lassen, so müssen wir für $a, b, \cdots$ die extremen Lösungen des vereinigten Systems von Stützungleichungen wählen. —

Nach dem Beweis des Hauptsatzes sind alle diese Folgerungen trivial. Der Dienst, den unsere ausführliche Darlegung leisten soll, ist lediglich die Aufzählung dieser Konsequenzen in der richtigen Reihenfolge, in der sie auseinander logisch hervorgehen.

§ 4. Konvexe Polyeder, inhomogene lineare Ungleichungen

I. *Konvexes Polyeder als Hülle eines endlichen Punktsystems.*

Aus dem homogenen R_n entsteht der inhomogene $(n - 1)$-dimensionale $\overline{R}_{n-1}$, indem man $x_n = -1$ setzt. Ist S ein nicht-ausgeartetes System von endlichvielen Punkten $a, b, \cdots$ in $\overline{R}_{n-1}$ $(a_n = b_n = \cdots = -1)$, so ist jetzt der Fall b) des Hauptsatzes unmöglich, in welchem jeder Punkt darstellbar ist. Denn für jeden darstellbaren Punkt x:

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \cdots \quad (\lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \cdots; \; i = 1, \cdots, n) \tag{12}$$

gilt nunmehr notwendig $- x_n \geqq 0$. *Darum ist stets eine extreme Stütze vorhanden.* Will man auch für die dargestellten Punkte die Normierung $x_n = -1$ einhalten, so müssen die nicht-negativen Parameter $\lambda, \mu, \cdots$ in der Darstellung (12) der Bedingung $\lambda + \mu + \cdots = 1$ unterworfen werden. Die durch S darstellbaren Punkte im $\overline{R}_{n-1}$ bilden die konvexe Hülle H von S, das aus S entspringende „*konvexe Polyeder*". Es kann durch die endlich vielen extremen Stützungleichungen gekennzeichnet werden.

Die zusätzliche Voraussetzung (siehe III. in § 3), daß auch das duale System nicht-ausgeartet sei, ist nach Satz 9 hier erfüllt, weil die sämtlichen Punkte $x = a, b, \cdots$ von S der Ungleichung genügen:

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_{n-1} - 1 \cdot x_n > 0.$$

Sind $a_1, \cdots, a_{n-1}$ beliebig vorgegebene Zahlen, so bilde man das

$$\min (a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}) = a_n,$$

worin $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ die endlichvielen Punkte von S durchläuft;

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} - a_n \geqq 0 \tag{13}$$

ist dann eine Stütze an S. Es gibt also Stützen an S zu beliebig vorgegebenen $a_1, \cdots, a_{n-1}$, und zwar solche, deren Ebene durch einen Punkt des Systems S hindurchgeht.

Für eine *extreme* Stütze (13) von S ist niemals $(a_1, \cdots, a_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$; denn ihre Ebene enthält wenigstens einen Punkt von S, so daß das Verschwinden von $a_1, \cdots, a_{n-1}$ auch das von a_n nach sich zöge.

Nennen wir die extremen Stützen von S Seitenflächen, die extremen Lösungen des dualen Systems Σ Ecken von H, so gilt der Satz: *Durch jede Ecke des konvexen Polyeders H gehen wenigstens $n - 1$ unabhängige Seitenflächen hindurch, in jeder Seitenfläche liegen mindestens $n - 1$ unabhängige Ecken.*

II. *Konvexes Polyeder als Durchschnitt endlichvieler Halbräume.*

Endlichviele Ungleichungen

$$(\alpha x) \equiv \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n \geqq 0, \quad (\beta x) \geqq 0, \cdots$$

definieren ein Teilgebiet H des Raumes $\overline{R}_{n-1}$. Wenn π: $(\pi x) \geqq 0$ eine Stütze an H ist, muß nach dem Hauptsatz π sich darstellen lassen durch die Punkte $\alpha, \beta, \cdots$ des Systems Σ. Nach dem Resultat von I. kann H ein konvexes Polyeder nur dann sein, wenn im homogenen R_{n-1} mittels der endlichvielen Punkte

$$\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}), \quad \beta' = (\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}), \cdots \tag{14}$$

jeder Punkt $\pi' = (\pi_1, \cdots, \pi_{n-1})$ darstellbar ist, wenn also im R_{n-1} das Punktsystem (14), Σ', keine extreme Stütze besitzt [Fall b) des Hauptsatzes]. Außerdem muß H einen inneren Punkt besitzen, d. h. es muß ein Punkt c im $\overline{R}_{n-1}$ existieren von der Art, daß

$$(\alpha c) > 0, \qquad (\beta c) > 0, \cdots \tag{15}$$

gilt. Dies ist aber auch hinreichend. Zum Beweise nehme man den Punkt c als Nullpunkt; dann hat man

$$\alpha_n < 0, \quad \beta_n < 0, \cdots.$$

Zunächst folgt jetzt, daß Σ nicht-ausgeartet ist, d. h. daß es keine Zahlen $(d_1, \cdots, d_{n-1}, d_n) \neq (0, \cdots, 0,0)$ geben kann, für welche die sämtlichen Gleichungen

$$\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_n d_n = 0, \quad \beta_1 d_1 + \cdots + \beta_n d_n = 0, \cdots$$

bestehen. Indem man 0 durch die Punkte (14) im R_{n-1} darstellt und den „Zusatz" zum Hauptsatz beachtet, würde daraus nämlich eine Gleichung folgen: $\pi_n d_n = 0$ mit *negativem* Koeffizienten π_n. Aber nachdem man in ihnen $d_n = 0$ gesetzt hat, widersprechen die angenommenen Gleichungen dem Umstand, daß durch Σ' alle Punkte $(\pi_1, \cdots, \pi_{n-1})$ darstellbar sind und nicht nur solche, welche der Gleichung

$$\pi_1 d_1 + \cdots + \pi_{n-1} d_{n-1} = 0$$

genügen. Das zu Σ duale System S ist nicht-ausgeartet, wie aus Satz 9 zufolge der Voraussetzung (15) hervorgeht. Wir müssen noch zeigen, daß S aus Punkten im $\overline{R}_{n-1}$ besteht.

Für eine Lösung x der Ungleichungen

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geqq 0, \quad \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \geqq 0, \cdots \tag{16}$$

ist notwendig $x_n \leqq 0$. Denn sie ergeben nach dem gleichen Schluß, der eben auf die entsprechenden Gleichungen angewendet wurde, $\pi_n x_n \geqq 0$. Ist die Lösung x extrem, so ist $x_n < 0$; denn im Falle $x_n = 0$ hätte man entgegen der Voraussetzung eine extreme Lösung der Ungleichungen

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \geqq 0, \quad \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1} \geqq 0, \cdots$$

im homogenen R_{n-1}. Mithin kann für eine extreme Lösung x die Koordinate $x_n = -1$ gewählt werden, so daß wir von den homogenen (16) auf die inhomogenen Ungleichungen (13) zurückfallen: ihre extremen Lösungen bilden ein endliches Punktsystem S im inhomogenen $\overline{R}_{n-1}$. Und jeder Punkt x, der den sämtlichen Ungleichungen (13) genügt, läßt sich durch S darstellen; oder H ist identisch mit der konvexen Hülle von S. Die Punkte von S sind die Eckpunkte dieses konvexen Polyeders.

III. *Normalenkegel.*

Der Punkt $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ im homogenen R_{n-1} heißt *Normale* zum Eckpunkt a eines gegebenen konvexen Polyeders, wenn

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} = \min (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1})$$

oder

$$\alpha_1 (x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_{n-1} (x_{n-1} - a_{n-1}) \geqq 0 \tag{17}$$

ist; hier durchläuft x die sämtlichen Eckpunkte $a, b, c, \cdots$ des Polyeders. Die extremen Lösungen des endlichen Systems von Ungleichungen (17) werden genau geliefert durch die extremen Stützebenen des Polyeders, welche durch den Eckpunkt a gehen. Da es $n - 1$ unabhängige solche Ebenen gibt, bilden die extremen Lösungen von (17) im R_{n-1} ein nicht-ausgeartetes Punktsystem. Durch sie läßt sich jede Normale mittels positiver linearer Kombination darstellen: der „Normalenkegel" ist eine nicht-ausgeartete konvexe Pyramide im R_{n-1}.

Jeder Punkt $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ gehört dem Normalenkegel wenigstens eines Eckpunktes an; denn wenn x die Ecken $a, b, c, \cdots$ durchläuft, so wird das Minimum von $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$ für einen dieser Punkte angenommen. Dabei sind die Normalenkegel der verschiedenen Ecken in ihren *inneren* Punkten durchweg verschieden. $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ ist nämlich ein innerer Punkt des Normalenkegels zu a, wenn in allen Ungleichungen (17) für $x = b, c, \cdots$ das Zeichen $>$ gilt, also z. B.

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_{n-1} b_{n-1} > \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Für einen dem Normalenkegel von b angehörigen Punkt gilt aber gerade umgekehrt

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_{n-1} b_{n-1} \leqq \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

IV. *Polyederscharen.*

Nach Minkowski kann man aus mehreren konvexen Polyedern $H_1, \cdots, H_h$ eine lineare Kombination $\lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_h H_h = H$ mit positiven Zahlkoeffizienten λ bilden; H ist wiederum ein konvexes Polyeder. Der Prozeß kann in zwei Schritten ausgeführt werden: 1. Multiplikation mit einem positiven Zahlfaktor λ, 2. Addition. Ein dritter Schritt ist, daß man bei fest gegebener Basis $H_1, \cdots, H_h$ die Zahlkoeffizienten λ_i im Bereich $\lambda_i > 0$ als variabel betrachtet: H durchläuft dann eine *Polyederschar.*

Multiplikation des konvexen Polyeders H mit einem positiven Zahlfaktor λ. H sei die konvexe Hülle des endlichen Punktsystems $S: a, b, c, \cdots$ (aus welchem man unbeschadet diejenigen Punkte weglassen kann, welche keine Ecken sind). Das schon oben benutzte Minimum

$$\min_{x=a,\,b,\,c,\,\ldots} (a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}) = h\,(a_1, \cdots, a_{n-1})$$

heißt nach Minkowski die *Stützfunktion.*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} - a_n \geqq 0$$

ist eine Stütze an S (oder H) dann und nur dann, wenn

$$a_n \leqq h(a_1, \cdots, a_{n-1}).$$

λH entsteht aus H, indem man jeden Punkt $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ von H durch $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n-1})$ ersetzt. λH ist die konvexe Hülle der Punkte $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \cdots$. Dem steht die duale Erklärung gegenüber: λH ist das Polyeder mit der Stützfunktion λh. Die Normalenkegel der verschiedenen Ecken $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \cdots$ von λH sind die gleichen wie die Normalenkegel der entsprechenden Ecken $a, b, c, \cdots$ von H.

Addition. H mit der Stützfunktion h sei die Hülle von $S: a, b, c, \cdots$, H' mit der Stützfunktion h' die Hülle von $S': a', b', c', \cdots$. In $H + H'$ werden alle Punkte von der Form $x + x'$ aufgenommen, wo x ein beliebiger Punkt von H, x' ein beliebiger Punkt von H' ist. Diese transfinite kann sofort durch die folgende finite Konstruktion ersetzt werden: aus jeder Kombination (a, a') eines Punktes a von S und eines Punktes a' von S' bilde man $a + a'$; so entsteht ein Punktsystem $S + S'$. Das Polyeder $H + H'$ ist die Hülle von $S + S'$. In der Tat, jede positive lineare Kombination

$$\Sigma\mu(a + a') = \Sigma\mu a + \Sigma\mu a' \quad (\mu \geqq 0,\ \Sigma\mu = 1)$$

ist, wie die rechte Seite zeigt, die Summe eines Punktes x von H und eines Punktes x' von H'. Gehört umgekehrt x zu $H: x = \Sigma\mu a$, und x' zu $H': x' = \Sigma\mu' a'$ $(\mu \geqq 0, \mu' \geqq 0; \Sigma\mu = 1, \Sigma\mu' = 1)$, so ist

$$x + x' = \Sigma\mu\mu'\,(a + a').$$

Wiederum steht dem die duale Auffassung gegenüber: $H + H'$ ist das konvexe Polyeder mit der Stützfunktion $h + h'$. In der Tat folgt aus

$$h(a) = \min_{x=a,\,b,\,c,\,\ldots} (a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}), \quad h'(a) = \min_{x'=a',\,b',\,c'\ldots} (a_1 x_1' + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}')$$

die Beziehung

$$h(a) + h'(a) = \min_{\substack{x\,=a,b,c,\ldots \\ x'=a',b',c',\ldots}} \{a_1(x_1 + x_1') + \cdots + a_{n-1}(x_{n-1} + x_{n-1}')\}.$$

Wie man daraus die endlichvielen extremen Stützungleichungen ausliest, welche zur Abgrenzung von $H + H'$ genügen, wissen wir aus der allgemeinen Theorie.

Aufschlußreicher ist aber der Durchgang durch die *Polarfigur*. Der homogene R_{n-1} ist einerseits in die Normalenkegel von H, anderseits in diejenigen von H' eingeteilt. Auf Grund des Satzes 13 ergibt die Überlagerung dieser beiden Einteilungen eine neue Einteilung von R_{n-1} in konvexe Pyramiden: das ist die Normalenfigur von $H + H'$. Die Kombination einer Ecke a von H und einer Ecke a' von H' gibt nämlich nur dann Anlaß zu einer Ecke $a + a'$ von $H + H'$, wenn die Normalenkegel von a in H und von a' in H' innere Punkte gemein haben, und der Durchschnitt ist alsdann der Normalenkegel von $a + a'$ in $H + H'$. Die extremen Punkte der Normalenkegel von $H + H'$ liefern die „Normalen" $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ der extremen Stützen an $H + H'$.

Auf Grund dieser Bemerkungen überblickt man die Verhältnisse in einer „*Schar*" konvexer Polyeder wie $\lambda H + \lambda' H'$, die man durchläuft, wenn λ und λ' im Bereiche $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$ frei variieren. Denn die Normalenfigur von H ändert sich durch Multiplikation mit λ nicht. Infolgedessen ergibt sich, daß die Normalenfigur eines Polyeders der Schar nicht variiert mit den Werten von λ und λ', daß insbesondere weder die Normalen der extremen Stützen von λ und λ' abhängen, noch diejenigen Kombinationen (a, a') einer Ecke a von H und einer Ecke a' von H', die zu einer Ecke $\lambda a + \lambda' a'$ von $\lambda H + \lambda' H'$ Anlaß geben. Das kombinatorische Schema der Ecken und extremen Stützebenen, das angibt, wie die einen sich auf die andern verteilen, ist innerhalb der Schar ebenfalls konstant.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, NEW JERSEY.

(Eingegangen den 2. März 1935.)