Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen ...u = 0 und ....u = 0 mit vier reellen Variablen.

Autor(en): **Fueter, Rud.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **7 (1934-1935)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515599

Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen

Von RUD. FUETER, Zürich

Einleitung

Die folgenden Untersuchungen beruhen auf der wohl noch nicht bekannten Tatsache, daß die Komponenten bestimmter leicht zu bildender Funktionen der Quaternionenvariablen z, wie z. B. diejenigen von $w = \Delta z^n$, n eine ganze rationale Zahl, einem System von homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen (Art. 2). w selbst befriedigt die Gleichung $\Delta w = 0$. z^n z. B. genügt daher der Gleichung $\Delta\Delta z^n = 0$, wobei die Δ-Ableitung für jede Komponente von z^n jeweils zu berechnen ist (Art. 3). Es liegt nahe, alle Funktionen von z zu betrachten, die jenem System von Differentialgleichungen genügen, um so mehr, als jede reelle Lösung u von $\Delta u = 0$ als Realteil einer solchen Quaternionenfunktion aufgefaßt werden kann (Art. 2). Es zeigt sich, daß diese Funktionen, die ich regulär nenne, das Analogon zum Liouville'schen Satze (Art. 3), zu den beiden Cauchy'schen Sätzen (Art. 2 und 4), sowie zur Laurent'schen Reihenentwicklung (Art. 6) besitzen, daß man also eine Funktionentheorie entwickeln kann, die sogar in sich die Theorie der gewöhnlichen analytischen Funktionen als Spezialfall (in vier Dimensionen) enthält. Zum Beispiel läßt sich die analytische Fortsetzung für sie durchführen (Art. 7).

Ich begnüge mich bei der Betrachtung der Singularitäten dieser Funktionen mit dem Falle, daß dieselben isolierte, insbesondere Pole sind (Art. 8). Es muß einer spätern Untersuchung vorbehalten bleiben, die mannigfaltigen Singularitäten zu charakterisieren, die hier auftreten können, ebenso wie auch die geometrische Eigenschaft der regulären Funktionen aufzudecken, die der konformen Abbildung in der gewöhnlichen Funktionentheorie entspricht.

Die seit Hamilton gemachten zahlreichen Anwendungen[1]) der Quaternionen auf Funktionentheorie zielen meines Wissens nach einer ganz

[1]) Siehe die Literatur bei: *A. Macfarlane:* Bibliography of Quaternions and allied systems of Mathematics. Dublin, 1904, und *J. A. Schouten:* Grundlagen der Vector- und Affinoranalysis, Berlin und Leipzig, 1914.

andern Richtung, wie die vorliegende Untersuchung. Auch mit den bisherigen Ansätzen zur Aufstellung von Differentialgleichungen[2]) hat das Folgende nichts zu tun, wenn auch bei Tait Ansätze von Integralen zu finden sind; denn letztere beziehen sich nur auf drei Variable.

1. *Hilfsformeln.*

Es seien $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3$ die Quaternioneneinheiten und

$$a = \sum_{(k)} a_k i_k$$

ein Quaternion, $\bar{a}$ sein konjugiertes. Unter dem absoluten Betrage $|a|$ versteht man die positive Wurzel $\overset{+}{\sqrt{\sum_k a_k^2}}$. Dann gilt die Formel:

$$|a+b| \leqq |a| + |b| \tag{1}$$

Beweis: Es ist:

$$a\bar{b} = \sum_{(k)} a_k b_k + \sum_{k=1}^{3} A_k i_k, \quad A_k \text{ reell,}$$

daher:

$$n(a)\,n(b) \geqq (\sum_{(k)} a_k b_k)^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a}) = \sum_{(k)} a_k b_k \leqq |a|\;|b|,$$

und:

$$n(a+b) = n(a) + (a\bar{b} + b\bar{a}) + n(b) \leqq |a|^2 + 2\,|a|\;|b| + |b|^2,$$
$$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Ferner gelten die beiden Gleichungen:

$$\sum_{(k)} i_k a i_k = -2\bar{a} \tag{2}$$

$$\sum_{(k)} i_k a \bar{i}_k = 2(a + \bar{a}) \tag{3}$$

Es seien im folgenden stets u_k, $k = 0, 1, 2, 3$ vier in einem Hyperraume H reelle, stetige, endliche und zweimal stetig differentierbare Funktionen der vier reellen Variablen x_k, $k = 0, 1, 2, 3$.

Man setze:

$$z = \sum_{(k)} x_k i_k, \quad w = \sum_{(k)} u_k i_k = f(z).$$

---

[2]) Siehe z. B. *P. G. Tait:* Scientific Papers, Cambridge, 1898, Vol. 1, S. 151, 153, 159.

w heiße eine Funktion der Quaternionenvariablen z. Unter $w^{(h)}$ verstehen wir die Funktion der Differentialquotienten der u_k nach x_h:

$$w^{(h)} = \sum_{(k)} u_k{}^{(h)} i_k = \sum_{(k)} \frac{\partial u_k}{\partial x_h} i_k .$$

Für die Differentiation nach x_h gelten die folgenden sofort erkennbaren Regeln:

$$(w + w^*)^{(h)} = w^{(h)} + w^{*(h)} \tag{4}$$

$$(awb)^{(h)} = aw^{(h)} b, \qquad a, b \text{ konstante Quaternionen,} \tag{5}$$

$$(w^{-1})^{(h)} = -w^{-1} w^{(h)} w^{-1} \tag{6}$$

$$(ww^*)^{(h)} = w^{(h)} w^* + ww^{*(h)} \tag{7}$$

Es sei R der Oberflächenraum des Hyperraumes H und ξ_k, $k = 0, 1, 2, 3$, die Richtungskosinusse der nach dem Innern von H gerichteten Normalen in einem Punkte von R. Man setze dann:

$$dZ = (\sum_{(k)} \xi_k i_k)\, dr,$$

wo dr das Raumelement von R ist. Dann kann man den Gauß'schen Integralsatz für vier Dimensionen so schreiben:

$$\int_{(H)} \sum_{(k)} w^{(k)} i_k \, dh = -\int_{(R)} w dZ \tag{8}$$

Sind w und v zwei Funktionen von z, so folgt aus demselben Satze:

$$\int_{(H)} \sum_{(k)} (w i_k v)^{(k)}\, dh = -\int_{(R)} w dZ v$$

Nun ist aber nach (5) und (7):

$$\sum_{(k)} (w i_k v)^{(k)} = (\sum_{(k)} w^{(k)} i_k)\, v + w (\sum_{(k)} i_k v^{(k)}).$$

Somit wird:

$$\int_{(H)} (\sum_{(k)} w^{(k)} i_k)\, v dh + \int_{(H)} w\, (\sum_{(k)} i_k v^{(k)})\, dh = -\int_{(R)} w dZ v. \tag{9}$$

Dabei ist in verständlicher Weise:

$$\sum_{(k)} \int_{(o)} u_k i_k do = \sum_{(k)} i_k \int_{(o)} u_k do$$

gesetzt, wo o irgend ein geometrisches Gebilde ist. Somit gelten auch die Sätze, daß das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale ist, und daß ein Links- oder Rechtsfaktor des Integranden, der konstant ist, nach links oder rechts vor das Integral genommen werden kann.

Aus (1) folgt für die Abschätzung der Integrale die wichtige Formel:

$$\left| \int_{(R)} w dZ v \right| \leqq \int_{(R)} | w dZ v | \tag{10}$$

2. *Reguläre Funktionen.*

1. Definition: *Eine Funktion $w = f(z)$ heißt in H rechts, resp. linksregulär, wenn die u_k in H reelle, stetige, endliche und zweimal stetig differentierbare Funktionen der x_k sind, und wenn die Bedingung erfüllt ist:*

$$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0, \text{ resp. } \sum_{(k)} i_k w^{(k)} = 0. \qquad \text{I.}$$

Die Gleichungen I lauten, im Reellen ausgeschrieben so:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \text{I a. Rechtsregulär.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0.\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \text{I b. Linksregulär.}$$

Nimmt man $u_3 = 0$, $u_2 = 0$ und u_0 und u_1 nur von x_0 und x_1, nicht aber von x_2 und x_3 abhängig an, so reduzieren sich die Gleichungen auf die Riemann-Cauchy'schen. Ist $u_3 = 0$ und sind die übrigen u nur Funktionen von drei Variablen x_k, $k = 0, 1, 2$, so lauten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_0}{\partial x_0}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\\&\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_0}=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0.\\&\frac{\partial u_0}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_0}=0,\end{aligned}\right\}\ \text{I. c.}$$

Ist w sowohl rechts- wie linksregulär, so muß:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_0}{\partial x_0}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\\&\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_0}=0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\\&\frac{\partial u_0}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_0}=0,\qquad -\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\\&\frac{\partial u_0}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_0}=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0.\end{aligned}\right\}\ \text{I. d.}$$

Im Falle der Gleichungen Ic ist die Funktionaldeterminante

$$\Delta = |\, u_k^{(l)} \,|$$

höchstens vom Range 3, im Falle der Riemann-Cauchy'schen Gleichungen vom Range 2. Man spricht daher in diesen beiden Fällen von *regulären Funktionen vom Range 3 oder 2.* Im allgemeinen darf man annehmen, daß es Punkte gibt, für die $\Delta \neq 0$ ist (Rang 4).

1. Satz: *Ist w in H rechts- oder linksregulär, so genügen die u_k der Differentialgleichung:*

$$\sum_{(h)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2_h} = \Delta u_k = 0, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Beweis: Differentiert man I nach x_h, multipliziert mit $\bar{i}_h$ von rechts (links) und summiert über alle h, so folgt:

$$\sum_{(k,h)} w^{(kh)} i_k \bar{i}_h = 0, \text{ resp. } \sum_{(k,h)} \bar{i}_h i_k w^{(kh)} = 0.$$

Da die Reihenfolge der Differentiation beliebig ist und für $h \neq k$ stets $i_k \bar{i}_h + i_h \bar{i}_k = 0$ ist, so folgt wegen $i_k \bar{i}_k = 1$:

$$\sum_{(k)} w^{(kk)} = \Delta w = 0, \text{ also } \Delta u_k = 0, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

2. Satz: *Sind w und w^* in H zwei rechts- (links-) reguläre Funktionen, so ist auch $w + w^*$ rechts- (links-) regulär.*

Denn nach (4) ist:

$$\sum_{(k)} (w + w^*)^{(k)} i_k = \sum_{(k)} w^{(k)} i_k + \sum_{(k)} w^{*(k)} i_k = 0.$$

3. Satz: *Ist w in H rechtsregulär, so ist es auch aw; ist w linksregulär, so ist es auch wa, wo a ein konstantes Quaternion ist.*

Der Beweis folgt aus (5):

$$\sum_{(k)} (aw)^{(k)} i_k = a \sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0, \quad \sum_{(k)} i_k (wa)^{(k)} = \sum_{(k)} i_k w^{(k)} a = 0.$$

I. Hauptsatz: *Ist w rechtsregulär in H, so ist:*

$$\int_{(R)} w\,dZ = 0,$$

wo R irgend ein Oberflächenraum ist, der ganz in H liegt.

Ist w rechtsregulär in H, v linksregulär in H, so ist:

$$\int_{(R)} w\,dZ\,v = 0,$$

für jeden in H gelegenen Oberflächenraum R.

Der Beweis ergibt sich aus Formel (8) und (9). Für linksreguläre Funktionen w gilt entsprechend:

$$\int_{(R)} dZ\,w = 0.$$

Wir werden uns im folgenden auf den Fall der rechtsregulären Funktionen beschränken, doch gilt alles entsprechend auch für linksreguläre Funktionen.

Es fragt sich nun, ob durch die Gleichungen Ia die Lösungen der Gleichung $\Delta u = 0$ eingeschränkt werden. Dies ist nicht der Fall, wie der folgende Satz besagt:

4. Satz: *Ist u_0 irgend eine reelle, in H stetige und zweimal stetig differentierbare Funktion der 4 reellen Variablen x_k, die der Differentialgleichung $\Delta u_0 = 0$ genügt, so gibt es drei in jedem einfach zusammenhängenden H stetige, reelle und zweimal stetig differentierbare Funktionen u_k, $k = 1, 2, 3$ der x_k, so daß*

$$w = \sum_{(k)} u_k i_k$$

in H rechts- und linksregulär ist.

Mit anderen Worten: Jede Funktion u, für die $\Delta u = 0$, kann als Realteil eines rechts- oder linksregulären w gewählt werden.

Beweis: Man setze in Id:

$$u_k = -\int_{a_0}^{x_0} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} dx_0 + v_k, \qquad k = 1, 2, 3,$$

wo $a = \sum_{(k)} a_k i_k$ ein fester Punkt in H ist. Dann lauten die Gleichungen Id in den v:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)_{x_0 = a_0} \\ &\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Dabei setzen wir voraus, die v_k seien von x_0 unabhängig, was wir nach diesen Gleichungen, in denen x_0 nicht mehr vorkommt, dürfen. Differentiert man die erste Gleichung nach x_1 und berücksichtigt die übrigen, so folgt für v_1:

$$\Delta v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial x_1}\right)_{x_0 = a_0}.$$

Man wählt für v_1 als Funktion der x_k, $k = 1, 2, 3$ ein beliebiges, in H stetig und zweimal stetig differentierbares partikuläres Integral dieser Differentialgleichung und setzt:

$$v_k = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} dx_1 + t_k, \quad k = 2, 3.$$

Dann wird:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial t_2}{\partial x_3} = \frac{\partial t_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + \frac{\partial t_3}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)_{\substack{x_0 = a_0 \\ x_1 = a_1}} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{x_1 = a_1},$$

wobei wir die t_k als nur von x_k, $k = 2, 3$ abhängig voraussetzen. Nun folgt wieder:

$$\Delta t_2 = \frac{\partial^2 t_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 t_2}{\partial x_3^2} = \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial x_2}\right)_{\substack{x_0 = a_0 \\ x_1 = a_1}} - \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{x_1 = a_1},$$

und t_2 sei ein in H stetiges und zweimal differentierbares partikuläres Integral dieser Differentialgleichung. Man setzt:

$$t_3 = \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial t_2}{\partial x_3} d x_2 + \int_{a_3}^{x_3} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)_{\substack{x_0 = a_0 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2}} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2}} - \left(\frac{\partial t_2}{\partial x_2}\right)_{x_2 = a_2} \right\} d x_3$$

t_k genügen dann für $k = 2, 3$ den Gleichungen (b), v_k, $k = 1, 2, 3$ den Gleichungen (a), und die u_k, $k = 0, 1, 2, 3$ den Gleichungen Id.

3. *Erzeugung regulärer Funktionen.*

Die Quaternionenfunktionen sind ein hervorragendes Mittel, um Lösungen der Gleichung $\Delta w = 0$ zu erzeugen. In einer frühern Arbeit[3]) habe ich gezeigt, wie man aus den gewöhnlichen analytischen Funktionen wie e^z, z^n solche Funktionen erzeugen kann. Alle diese Funktionen genügen der Gleichung $\Delta \Delta W = 0$.

Es sei $\xi + i\eta$ eine beliebige analytische Funktion von $x_0 + iy$ in o, für die also:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0. \qquad \text{(d)}$$

Man setze $y = +\sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}$. Dann ist:

$$W = \xi(x_0, y) + \frac{1}{y} \eta(x_0, y)\,(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) = F(z)$$

eine Funktion von $z = \sum_{(k)} x_k i_k$ in einem bestimmten Bereiche H. Ist n eine ganze rationale Zahl und $(x_0 + iy)^n$ die analytische Funktion, so ist $W = z^n$. Für alle diese Funktionen gilt nun der merkwürdige Satz:

5. Satz: *Alle aus einer analytischen Funktion erzeugten Funktionen W sind so beschaffen, daß in H ΔW eine sowohl rechts-, wie linksreguläre Funktion ist.*

Es genügt also z. B. Δz^n den Gleichungen Id, $n = 0, +1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Insbesondere ist wegen des 1. Satzes:

$$\Delta \Delta z^n = 0.$$

---

[3]) *Rud. Fueter:* Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen. Diese Zeitschrift Bd. 4, S. 13.

Beweis: Es ist wegen (d):

$$W^{(00)} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3),$$

$$k \neq 0: W^{(k)} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{x_k}{y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{x_k}{y^2} - \eta\frac{x_k}{y^3}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) + \frac{\eta}{y} i_k,$$

$$W^{(kk)} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{x_k^2}{y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{1}{y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{x_k^2}{y^3} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{x_k^2}{y^3} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{1}{y^2} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{3x_k^2}{y^4} - \eta\frac{1}{y^3} + \eta\frac{3x_k^2}{y^5}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3)$$

$$+ \left(2\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{x_k}{y^2} - 2\eta\frac{x_k}{y^3}\right) i_k .$$

Somit

$$\Delta W = 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{1}{y} + 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{1}{y^2} - \frac{\eta}{y^3}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3), \qquad (11)$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta W^{(0)} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0 \partial y}\frac{1}{y} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0 \partial y}\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}\frac{\partial \eta}{\partial x_0}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3),$$

$$k \neq 0: \tfrac{1}{2}\Delta W^{(k)} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{x_k}{y^2} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{x_k}{y^3} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{x_k}{y^3} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{3x_k}{y^4} + \eta\frac{3x_k}{y^5}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{1}{y^2} - \frac{\eta}{y^3}\right) i_k .$$

Bedenken wir jetzt, daß $(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3)^2 = - y^2$, so wird wegen (d):

$$\tfrac{1}{2}\sum_{(k)} \Delta W^{(k)} i_k = \tfrac{1}{2}\sum_{(k)} i_k \Delta W^{(k)} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0 \partial y}\frac{1}{y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{1}{y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{3}{y^2} -$$

$$- \eta\frac{3}{y^3} - 3\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{1}{y^2} + 3\eta\frac{1}{y^3} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{1}{y^2} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{1}{y^3} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0 \partial y}\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}\frac{\partial \eta}{\partial x_0}\right)(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) = 0.$$

Wegen (5) ist auch $\Delta(aW)$ rechtsregulär, aber im allgemeinen nicht mehr linksregulär, wo a ein konstantes Quaternion ist. Jede konvergente Reihe:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hat daher die Eigenschaft, daß ΔW rechtsregulär ist (nach (4)). Man sieht welche große Zahl rechtsregulärer Funktionen dadurch erzeugt wird.

6. Satz: *Ist W eine linear gebrochene Funktion von z:*

$$W = (\alpha z + \beta)\,(\gamma z + \delta)^{-1},\ \gamma \neq 0,$$

so ist $\Delta(W\gamma)$ eine rechtsreguläre Funktion, also $\Delta\Delta W = 0$. Der Bereich von W ist jeder Hyperraum H, der $-\gamma^{-1}\delta$ nicht enthält.

Beweis: Man darf schreiben:

$$W = (\alpha\gamma^{-1} + \Gamma(\gamma z + \delta)^{-1}),\ \Gamma = \beta - \alpha\gamma^{-1}\delta.$$

Nach (4), (5), (6) wird:

$$\begin{aligned} W^{(k)} &= -\Gamma(\gamma z + \delta)^{-1}\gamma i_k(\gamma z + \delta)^{-1} \\ W^{(kk)} &= 2\,\Gamma(\gamma z + \delta)^{-1}\gamma i_k(\gamma z + \delta)^{-1}\gamma i_k(\gamma z + \delta)^{-1}, \end{aligned}$$

daher wegen (2):

$$\Delta W = -4\,\Gamma n(\gamma)\,n(\gamma z + \delta)^{-1}(\gamma z + \delta)^{-1},$$

und weiter:

$$(\Delta W)^{(k)} = 4\Gamma n(\gamma)\,n(\gamma z + \delta)^{-1}\left(2(\gamma z + \delta)^{-1}\gamma i_k(\gamma z + \delta)^{-1} + \bar{i}_k\bar{\gamma} n(\gamma z + \delta)^{-1}\right),$$

somit:

$$\begin{aligned} \sum_{(k)}(\Delta W)^{(k)}\gamma i_k = 4\,\Gamma n(\gamma)\,n(\gamma z + \delta)^{-1}\,(&-4\,n(\gamma z + \delta)^{-1}\,n(\gamma) + \\ &+ 4\,n(\gamma)\,n(\gamma z + \delta)^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

In jedem Falle genügt daher W der Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta W = 0.$$

Die andere lineargebrochene Funktion:

$$W = (z\gamma + \delta)^{-1}\,(z\alpha + \beta)$$

ist so beschaffen, daß $\Delta(\gamma W)$ linksregulär ist, jedenfalls aber wieder $\Delta\Delta W = 0$ sein muß.

Man kann nach (11) ΔW für $W = z^n$ ausrechnen. Man findet für *positives n:*

$$\begin{aligned} \Delta(z^n) &= -4\,\left((n-1)z^{n-2} + (n-2)z^{n-3}\,\bar{z} + (n-3)z^{n-4}\bar{z}^2 + \cdots\right); \\ \Delta(z^{-n}) &= -4\,\left(nz^{-n-1}\bar{z}^{-1} + (n-1)z^{-n}\bar{z}^{-2} + (n-2)\,z^{-n+1}\bar{z}^{-3} + \cdots + z^{-2}\bar{z}^{-n}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Man darf die lineargebrochenen Funktionen und die aus analytischen Funktionen erzeugten Funktionen kombinieren. Wir wollen dies auf später verschieben, und nur den wichtigen Fall behandeln, daß man in $W = F(z)$ an Stelle von z die Größe $z - \zeta$ setzt, wo ζ ein beliebiges von z unabhängiges Quaternion ist. Man sieht sofort die Richtigkeit des Satzes ein:

7. Satz: *Ist $W = F(z)$ eine nach dem 5. Satze erzeugte Funktion, so ist auch $\Delta_z F(z - \zeta)$ eine rechts- und linksreguläre Funktion von z.*

Dabei bedeutet Δ_z, daß die Differentialquotienten in bezug auf die Komponenten von z zu nehmen sind. Wir werden von nun an stets so schreiben, wenn Zweideutigkeit möglich ist.

Für den Fall $W = (z - \zeta)^{-1}$ wollen wir den Satz direkt durch Rechnung kontrollieren:

$$W^{(k)} = -(z-\zeta)^{-1} i_k (z-\zeta)^{-1},\quad W^{(kk)} = 2(z-\zeta)^{-1} i_k (z-\zeta)^{-1} i_k (z-\zeta)^{-1},$$

$$\Delta_z W = \Delta_z \left((z-\zeta)^{-1}\right) = -4n(z-\zeta)^{-1}(z-\zeta)^{-1} \tag{13}$$

$$(\Delta_z W)^{(k)} = 4n(z-\zeta)^{-1}\left(2(z-\zeta)^{-1} i_k (z-\zeta)^{-1} + \bar{i}_k n (z-\zeta)^{-1}\right)$$

$$\sum_{(k)} \Delta_z (W)^{(k)} i_k = \sum_{(k)} i_k \Delta_z (W)^{(k)} = 4n(z-\zeta)^{-1}\left(-4n(z-\zeta)^{-1} + 4n(z-\zeta)^{-1}\right) = 0.$$

8. Satz: *Ist K eine beliebige Hyperkugel um O und n eine ganze rationale Zahl, so ist:*

$$\int_{(K)} \Delta \zeta^n dZ = \begin{matrix} 0, & n \neq -1, \\ 8\pi^2, & n = -1. \end{matrix}$$

Beweis. Für $n > 0$ ist nach Hauptsatz I und Satz 5 nichts zu beweisen. Ist n die negative Zahl $-\nu$, und setzt man $\zeta = r\zeta'$, wo r der Radius der Kugel ist, so wird nach (12):

$$\Delta \zeta^{-\nu} = r^{-\nu-2} \Delta_{\zeta'} (\zeta'^{-\nu}),$$

also wenn K_1 die Einheitskugel um O ist:

$$\int_{(K)} \Delta_\zeta \zeta^{-\nu} dZ = r^{-\nu+1} \int_{(K_1)} \Delta_{\zeta'} (\zeta'^{-\nu})\, dZ', \quad r^3 dZ' = dZ,$$

Da der Wert des Integrals aber von r unabhängig sein muß nach Hauptsatz I, ist der Wert 0, falls $\nu \neq 1$. Für $\nu = 1$ ist der Wert $8\pi^2$ (siehe die Berechnung auf den folgenden Seiten).

4. *Folgerungen.*

Mit Hilfe der Ausführungen 3 können die in H regulären Funktionen durch ihre Randwerte dargestellt werden.

II. Hauptsatz: *Ist w in H rechtsregulär und R ein in H liegender Oberflächenraum, der den Punkt z im Innern enthält, so ist:*

$$w = f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}),$$

wobei das Integral über ζ zu nehmen ist.

Beweis: Man lege um z eine so kleine Hyperkugel K mit dem Radius r, daß K ganz in R liegt. H' sei der Hyperraum zwischen K und R. Wir nehmen jetzt in der zweiten Formel von Hauptsatz I für R den Oberflächenraum von H', für w unsere Funktion und für v:

$$v = \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = -4\, n\, (\zeta - z)^{-1}\, (\zeta - z)^{-1}.$$

Nach Satz 7 ist v linksregulär, somit sind alle Bedingungen erfüllt, und Hauptsatz I ergibt:

$$\int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) - \int_{(K)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = 0.$$

Im zweiten Integral ist die Normale von K nach z gerichtet vorausgesetzt. *Dieses Integral ist von r unabhängig.* Wir berechnen es, indem wir setzen:

$$\zeta - z = r\,(\cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta\, i_1 + \sin\psi \cos\vartheta\, i_2 + \sin\vartheta\, i_3).$$

Dann ist $n(\zeta - z) = r^2$ und nach Definition:

$$dZ = -(\zeta - z)\, r^{-1}\, do = -(\zeta - z)\, r^2 \cos\psi \cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\psi\, d\vartheta.$$

Ferner kann man für kleine r setzen:

$$f(\zeta) = f(z) + r f'(\zeta),$$

wo $\lim\limits_{r \to 0} f'(\zeta)$ existiert und endlich ist. Daher wird:

$$\int_{(K)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = 4 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(z) + r f'(\zeta)) \cos\psi \cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\psi\, d\vartheta.$$

Da r beliebig klein sein darf, und das Integral von r unabhängig ist, wird der Wert rechts $= 8\,\pi^2 f(z)$. Setzt man dies oben ein, so folgt die Formel des II. Hauptsatzes.

Aus dem II. Hauptsatze folgt sofort, daß *die Komponenten einer regulären Funktion in H beliebig oft nach den x_k differentierbar sind.*

Nun ist:

$$\Delta_\zeta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right).$$

Man darf daher im Hauptsatz II auch Δ_z statt Δ_ζ schreiben. Ist R ein fester Oberflächenraum in H, der z im Innern enthält, der aber von z unabhängig ist (also z. B. keine Hyperkugel um z), und setzt man:

$$W = F(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta - z)^{-1},$$

so wird:

$$w = f(z) = \Delta W = \Delta_z F(z).$$

W hat somit die Eigenschaft, daß ΔW rechtsregulär ist.

2. Definition: *Eine Funktion $W = F(z)$ heiße in H rechts- resp. linksholomorph, wenn ihre Komponenten U_k in H reelle, stetige, endliche und zweimal stetig differentierbare Funktionen der x_k sind, und wenn $\Delta_z W$ in H eine rechts-, resp. linksreguläre Funktion ist.*

Somit gilt der

9. Satz: *Ist w in H rechtsregulär, so ist w die Deltaableitung einer in H rechtsholomorphen Funktion.*

Ist umgekehrt W in H rechtsholomorph, so setze man $w = \Delta_z W = f(z)$. w ist in H rechtsregulär, also nach Satz 9 $w = \Delta W'$, wo:

$$W' = \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta - z)^{-1},$$

und R irgend ein fester, von z unabhängiger Oberflächenraum in H ist, der z im Innern enthält. Daher ist $\Delta(W - W') = 0$, und W läßt sich in der Form darstellen:

$$W = v(z) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} \Delta_\zeta F(\zeta)\,dZ\,(\zeta - z)^{-1}, \text{ wo } \Delta_z v(z) = 0 \text{ ist.}$$

10. Satz: *Ist $W = F(z)$ in H rechtsholomorph, und R ein fester, von z unabhängiger Oberflächenraum in H, der z im Innern enthält, so ist:*

$$W = v(z) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} \Delta_\zeta F(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1},$$

wo $v(z)$ eine bestimmte Lösung von $\Delta_z v(z) = 0$ ist.

Ändert man in dieser Darstellung R so, daß die Bedingungen über R erhalten bleiben, so ändert sich nur $v(z)$.

11. Satz: *Ändert man in*

$$W = \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} \Delta_\zeta F(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1}$$

R unabhängig von z so ab, daß z im Innern bleibt, so ändert sich der Wert des Integrales nur um eine additive Funktion $v(z)$, die der Gleichung genügt $\Delta_z v(z) = 0$.

5. *Der Punkt Unendlich.*

Wir fassen in der Funktionentheorie der regulären Funktionen das Unendliche als punktförmig auf. Dazu dient der

12. Satz: *Ist $w = f(z)$ in H eine rechtsreguläre Funktion, und ist t ein reeller Parameter, so ist $w^* = f(tz)$ rechtsregulär in $H^* = tH$.*

Der Beweis folgt sofort aus Ia.

3. Definition: *Die Funktion $w = f(z)$ heißt im Punkte ∞ rechtsregulär, wenn es*

1. *ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle Werte des reellen Parameters r, für den $0 < r < \varepsilon$, $f\left(\frac{z}{r}\right)$ eine rechtsreguläre Funktion von z ist für alle z, deren absoluten Beträge zwischen beliebigen festen, endlichen positiven Grenzen (> 0) liegen, und wenn:*

2. *der Grenzwert*

   $\lim\limits_{r \to 0} f\left(\frac{z}{r}\right) = f(\infty)$ *existiert und von z unabhängig ist.*

Nach dieser Definition ist z. B. $\Delta z^{-1} = -4\,n(z)^{-1} z^{-1}$ in ∞ rechtsregulär und hat den Wert null.

III. Hauptsatz: *Ist $w = f(z)$ im ganzen Hyperraume R_4 mit Einschluß des Punktes ∞ rechtsregulär, so ist w ein konstantes Quaternion.*

Beweis: Es sei z ein beliebiger endlicher Punkt. Wir wählen ε positiv so klein, daß $|z| < \frac{1}{\varepsilon}$, und legen um O eine Hyperkugel K mit einem Radius $\frac{1}{r}$, für den $0 < r < \varepsilon$ ist. Dann muß nach Hauptsatz II:

$$w = f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_z((\zeta - z)^{-1})$$

sein, und das Integral ist von der Wahl von r innerhalb der Grenzen unabhängig. Falls daher der Grenzwert $r \to 0$ des Integrales existiert, so ist:

$$w = f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_z((\zeta - z)^{-1}).$$

Letzteres ist aber der Fall. Wir setzen $\zeta = \frac{1}{r}\zeta'$. Dann ist ζ' irgend ein Punkt der Hypereinheitskugel K_1: $n(\zeta') = 1$, und dZ wird: $dZ = \frac{1}{r^3} dZ'$, wo dZ' das entsprechende Element von K_1 ist. Wir führen ferner wie unter 4. Kugelkoordinaten ein:

$\zeta' = \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta\, i_1 + \sin\psi \cos\vartheta\, i_2 + \sin\vartheta\, i_3.$

Dann ist $dZ' = -\zeta'\, do$ und es wird:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K)} f(\zeta)\, dZ \Delta_z((\zeta - z)^{-1}) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(K_1)} f\left(\frac{\zeta'}{r}\right) \zeta' n(\zeta' - rz)^{-1} (\zeta' - rz)^{-1} \cos\psi \cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\psi\, d\vartheta.$$

Nun aber ist nach Annahme:

$$\lim_{r \to 0} f\left(\frac{\zeta'}{r}\right) = f(\infty) \text{ und von } \zeta' \text{ unabhängig,}$$

$$\lim_{r \to 0} \zeta' n(\zeta' - rz)^{-1} (\zeta' - rz)^{-1} = 1, \text{ da } n(\zeta') = 1 \text{ ist,}$$

somit ist:

$$w = f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K)} f(\zeta) dZ \Delta_z((\zeta - z)^{-1}) = \frac{1}{2\pi^2} f(\infty) \int\limits_{(K_1)} \cos\psi \cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\psi\, d\vartheta$$
$$= f(\infty).$$

Da $f(z)$ an jeder Stelle den Wert $f(\infty)$ hat, ist es ein konstantes Quaternion.

Auch für die rechtsholomorphen Funktionen definieren wir die Rechtsholomorphie in ∞ genau wie oben, es ist unter 2. nur rechtsregulär durch rechtsholomorph zu ersetzen. Dann gilt:

Zusatz zu Hauptsatz III: *Ist $W = F(z)$ im ganzen Hyperraume R_4 mit Einschluß des Punktes ∞ rechtsholomorph, so ist W ein konstantes Quaternion.*

Beweis: Wir setzen $\Delta W = w = f(z)$. Dann ist nach Annahme w im ganzen endlichen Hyperraume R_4 rechtsregulär. Ferner ist:

$$\lim_{r \to 0} f\left(\frac{z}{r}\right) = \lim_{r \to 0} r^2 \sum_{(k)} \frac{\partial^2 F\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial x_k^2} = 0.$$

Somit ist w auch in ∞ rechtsregulär und $= 0$; nach Hauptsatz III ist somit $w = 0$, d. h. $\Delta W = 0$. Man sieht jetzt leicht, daß man jede Komponente von W als Realteil einer rechtsregulären Funktion annehmen darf (Satz 4), die im ganzen Hyperraume inklusive ∞ rechtsregulär ist, also konstant sein muß.

6. *Reihenentwicklungen.*

Nach Satz 9 ist jede in H rechtsreguläre Funktion durch eine rechtsholomorphe Funktion erzeugt. Es wird einfacher, wenn wir die Entwicklungen daher für die rechtsholomorphen Funktionen durchführen. Dazu dient folgende, der Zahlentheorie entnommene Rechnungsart. Wir schreiben:

$$W \equiv 0 \pmod{\Delta}, \text{ falls } \Delta W = 0,$$
$$W_1 \equiv W_2 \pmod{\Delta}, \text{ falls } \Delta(W_1 - W_2) = 0$$

ist. Da $\Delta v = 0$ eine lineare, homogene Differentialgleichung ist, folgt daraus sofort: Ist

$$W_1 \equiv W_2,\ W_1' \equiv W_2' \pmod{\Delta},$$

so folgt:

$$cW_1 + c'W_1' \equiv cW_2 + c'W_2' \pmod{\Delta},$$

für beliebige konstante Quaternionen c, c'. Aus:

$$W_1 \equiv W_2 \pmod{\Delta}, \text{ folgt: } W_1^{(k)} \equiv W_2^{(k)} \pmod{\Delta},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Ist $\Delta W = w = f(z)$, so ist nach Satz 10:

$$W \equiv \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1} \pmod{\Delta},$$

für jede in H rechtsholomorphe Funktion W und jeden von z unabhängigen Oberflächenraum R in H, der z im Innern enthält. Das Integral ist daher (mod. Δ) von R unabhängig. Wir sagen, die rechtsholomorphe Funktion ist durch die rechtsreguläre Funktion $f(z)$ *erzeugt*. Es fragt sich, ob verschiedene rechtsreguläre Funktionen dieselbe rechtsholomorphe Funktion W erzeugen können. Dann müßte:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1} \equiv 0 \text{ (mod. } \Delta)$$

möglich sein, ohne daß $f(z) = 0$ wäre, wobei $f(z)$ nach Satz 2 wieder rechtsregulär wäre. Daraus folgt aber:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_z\big((\zeta - z)^{-1}\big) = f(z) = 0,$$

gegen Annahme. Es besteht zwischen einer rechtsholomorphen Funktion W und der sie erzeugenden rechtsregulären Funktion w ein sich (mod. Δ) gegenseitig eindeutiges Bedingen.

13. Satz: *Ist $W = F(z)$ eine rechtsholomorphe Funktion in H und*

$$W \equiv \frac{1}{8\pi^2}\int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1} \text{ (mod. } \Delta),$$

wo $w = f(z)$ in H rechtsregulär ist, so muß $\Delta W = w$ sein.

Es sei jetzt $z = c$ ein endlicher Punkt von H, und $W = F(z)$ in H rechtsholomorph. K_r sei eine Hyperkugel mit dem festen Radius r um c, die ganz in H liege. Dann ist für jedes z in K_r:

$$W \equiv \frac{1}{8\pi^2}\int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1} \text{ (mod. } \Delta),\ \Delta W = w = f(z).$$

Nach Annahme ist $|z - c| < |\zeta - c| = r$. Somit konvergieren die absoluten Beträge der Reihe:

$$(z - \zeta)^{-1} = (\zeta - c)^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} \big((z - c)(\zeta - c)^{-1}\big)^h,$$

also auch die Komponenten selbst gleichmäßig und absolut in jedem in K_r liegenden Bereiche. Es folgt:

$$W \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \big((z - c)(\zeta - c)^{-1}\big)^h \text{ (mod. } \Delta), \tag{14}$$

$$w = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z\Big(\big((z - c)(\zeta - c)^{-1}\big)^h\Big) \tag{14a}$$

Ist ϱ der Abstand desjenigen Punktes, der nicht mehr H angehört und c am nächsten liegt, so muß $r < \varrho$ sein. ϱ heißt der *Konvergenzradius* und (14) konvergiert für alle z, für die $|z - c| < r < \varrho$, gleichmäßig und absolut. Für (14a) sieht man die Konvergenz ein, wenn man bedenkt, daß wegen (12):

$$|\Delta_z\,(((z-c)\,(\zeta-c)^{-1})^h))\,| \leqq n(\zeta-c)^{-1}\,2h\,(h-1)\,|\,(z-c)\,(\zeta-c)^{-1}\,|^{h-2}$$

sein muß. Nun sind aber die Integrale von r unabhängig; denn man sieht aus obiger Reihenentwicklung, daß:

$$(\zeta-c)^{-1}\Delta_z\,(((z-c)\,(\zeta-c)^{-1})^h) = \Delta_\zeta\,((\zeta-c)^{-1}\,((z-c)\,(\zeta-c)^{-1})^{h-2}), h \geqq 2,$$
$$= 0,\quad h = 0,\,1,$$

ist, und rechts- und linksregulär sein muß als Funktion von ζ. Somit darf Hauptsatz I angewendet werden. Die Wahl von $r < \varrho$ ist somit beliebig.

14. Satz: *Ist $W = F(z)$ in $z = c$ rechtsholomorph, so läßt sich W in die Reihe* (14), *$w = f(z) = \Delta W$ in die Reihe* (14a) *entwickeln, die für jedes z, $|z - c| < \varrho$ absolut konvergiert, wo ϱ der Minimalabstand von c der Punkte ist, die nicht zum Bereiche von w gehören.*

Die Integrale der Reihe (14) kann man berechnen. Differentiert man $(\zeta - z)^{-1}$ h-mal nach $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots x_{k_h}$, so wird nach (6):

$$((\zeta-z)^{-1})^{(k_1 k_2 \ldots k_h)} = \sum_{(r_n)} (\zeta-z)^{-1} i_{k_{r_1}} (\zeta-z)^{-1} i_{k_{r_2}} \cdots i_{k_{r_h}} (\zeta-z)^{-1},$$

wo die Summe über die h! Permutationen der Indizes r_n von 1 bis h zu erstrecken ist. Somit wird:

$$W^{(k_1 k_2 \ldots k_h)} \equiv \sum_{(r_n)} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta-z)^{-1} i_{k_{r_1}} (\zeta-z)^{-1} i_{k_{r_2}} \cdots i_{k_{r_h}} (\zeta-z)^{-1} \pmod{\Delta}.$$

Man sieht daraus, daß auch die Komponenten von W unbeschränkt differentierbar sind. Wir setzen in der erhaltenen Formel $z = c = \Sigma c_k i_k$, wo c die vorige Bedeutung hat, multiplizieren sie mit $(x_{k_1} - c_{k_1})\,(x_{k_2} - c_{k_2}) \cdots (x_{k_h} - c_{k_h})$ und addieren über alle k_r von 0 bis 3, bei festgehaltenem h; es wird:

$$\sum_{(k_r)} F(c)^{(k_1 k_2 \ldots k_h)}\,(x_{k_1}-c_{k_1})\,(x_{k_2}-c_{k_2}) \cdots (x_{k_h}-c_{k_h}) \equiv$$
$$\equiv \frac{h\,!}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta-c)^{-1}\,((z-c)\,(\zeta-c)^{-1})^h \pmod{\Delta},$$

womit die Integrale berechnet sind. Setzt man dies in (14) ein, so erhält man die Taylor'sche Entwicklung:

$$W \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{(k_r)} W^{(k_1 k_2 \dots k_h)}(c)\,(x_{k_1} - c_{k_1})\,(x_{k_2} - c_{k_2}) \cdots (x_{k_h} - c_{k_h}) \pmod{\varDelta}, \tag{15}$$

die für alle $|z - c| < r$ konvergiert. Allein die Koeffizienten dürfen nicht willkürlich gewählt werden, sondern sie müssen den Gleichungen der rechtsholomorphen Funktionen genügen. Dies sind die Gleichungen I und alle aus ihnen durch Differentiation nach den x_k abzuleitenden, falls man $w = \varDelta W$ nimmt. Umgekehrt sieht man, daß wenn die Koeffizienten diesen Bedingungsgleichungen genügen und (15) in einer Hyperkugel um c konvergiert, die Reihe in derselben auch eine rechtsholomorphe Funktion darstellt.

Mit denselben Mitteln kann man das Analogon zum Laurent'schen Satze erhalten. Es sei c ein beliebiger endlicher Punkt, um den es zwei Hyperkugeln K_r und K_R gebe, $r < R$, so daß $W = F(z)$ im Hyperraume auf und zwischen K_r und K_R rechtsholomorph ist. Setzt man $w = f(z) = \varDelta W$ und

$$J_1 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1}, \quad J_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - z)^{-1},$$

wo beidemal die Normalrichtung gegen c gewählt wird, so folgt aus Satz 10 für jedes z: $r < |z - c| < R$:

$$W = F(z) \equiv J_1 - J_2 \pmod{\varDelta}, \quad r < |z - c| < R.$$

Wie vorhin wird (14):

$$J_1 \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \left((z - c)\,(\zeta - c)^{-1} \right)^h \pmod{\varDelta},$$

und die Reihe konvergiert für jedes z, für das $|z - c| < R$ ist.

In J_2 setzen wir:

$$(\zeta - z)^{-1} = -(\zeta - c)^{-1} \sum_{h=1}^{\infty} \left((\zeta - c)\,(z - c)^{-1} \right)^h,$$

eine Reihe, die für alle $|z - c| > r$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Somit wird:

$$J_2 \equiv -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \left((\zeta - c)\,(z - c)^{-1} \right)^h \pmod{\varDelta}.$$

Schreibt man für h: — h und setzt J_1 und J_2 oben ein, so wird:

$$W \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \left((z-c)\,(\zeta - c)^{-1}\right)^h +$$

$$+ \sum_{h=-1}^{-\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \left((z-c)\,(\zeta - c)^{-1}\right)^h \pmod{\Delta}. \qquad (16)$$

Wählt man eine Hyperkugel K_ϱ, wo $r \leqq \varrho \leqq R$ ist, und ersetzt man in (16) K_r und K_R durch K_ϱ, so ändern sich die Integrale (mod. Δ) nach Hauptsatz I nicht. Allein die Konvergenz kann jetzt aufhören. Bildet man jedoch $w = \Delta W$, so bleiben die Integrale gleich und man erhält:

$$w = f(z) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_\varrho)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z \left(\left((z-c)\,(\zeta - c)^{-1}\right)^h \right) \qquad (16\,a)$$

15. Satz: *Ist $W = F(z)$ für alle z, für die $r \leqq |z - c| \leqq R$ ist, rechtsholomorph und $w = f(z) = \Delta W$ somit rechtsregulär, so lassen sich W und w in die absolut konvergenten Reihen (16) und (16a) entwickeln, wo K_ϱ eine Hyperkugel um c ist, für die $r \leqq \varrho \leqq R$ ist. Umgekehrt stellt jede Reihe (16) resp. (16a) in dem Bereiche, in dem sie konvergiert, eine rechtsholomorphe, resp. rechtsreguläre Funktion dar.*

Diese Entwicklung läßt die Reihenentwicklung um ∞ erkennen, falls w in ∞ regulär ist. Nach Definition 3 kann man R so klein wählen, daß w zwischen den Hyperkugeln $K_{R^{-1}}$ und $K_{r^{-1}}$ um $c = 0$ mit den Radien R^{-1} und r^{-1}, wo r beliebig, aber $< R$ sein muß, rechtsregulär ist. Daher folgt aus (16) für jedes z, für das $R^{-1} < |z| < r^{-1}$,

$$w = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_{r^{-1}})} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z \left((z\zeta^{-1})^h \right) + \sum_{h=-1}^{-\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_{R^{-1}})} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z \left((z\zeta^{-1})^h \right).$$

Man setze in jedem Integral der ersten Summe $\zeta = r^{-1}\zeta'$:

$$\int_{(K_{r^{-1}})} f(\zeta) dZ \zeta^{-1} \Delta_z \left((z\zeta^{-1})^h \right) = \int_{(K_1)} f\left(\frac{\zeta'}{r}\right) dZ'\, \zeta'^{-1} \Delta_z \left((z\zeta'^{-1})^h \right) r^{h-2},$$

wo das Integral jetzt über die Einheitskugel K_1 um O zu nehmen ist, und $dZ' = r^3 dZ$ ist. Jedes Integral ist aber von r unabhängig; wir können r beliebig klein wählen. Da aber $\lim\limits_{r \to 0} f\left(\frac{\zeta'}{r}\right)$ existiert und von ζ' unabhängig ist, so muß:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_{r^{-1}})} f(\zeta)\,dZ\,\zeta^{-1}\Delta_z\left((z\zeta^{-1})^h\right) = 0,\ h > 2,$$

sein. Für $h = 0, 1$ ist aber $\Delta_z\left((z\zeta^{-1})^h\right) = 0$, und für $h = 2$ wird das Integral $= f(\infty) = c_0$. Somit muß:

$$w = c_0 + \sum_{h=-1}^{-\infty} \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_{R^{-1}})} f(\zeta)\,dZ\,\zeta^{-1}\Delta_z\left((z\zeta^{-1})^h\right) \tag{16b}$$

sein.

16. Satz: *Ist $w = f(z)$ im Punkt ∞ rechtsregulär, so läßt sich w für $|z| > R^{-1}$ in die absolut konvergente Reihe (16b) entwickeln, wo R so klein ist, daß w für alle $|z| > R^{-1}$ rechtsregulär ist; umgekehrt stellt jede solche Reihe im Bereiche, in dem sie konvergiert, eine in ∞ rechtsreguläre Funktion dar.*

7. *Analytische Fortsetzung.*

Der entscheidende Gedanke ist, die analytische Fortsetzung nicht für die rechtsreguläre Funktion w, sondern für die ihr zugeordnete rechtsholomorphe Funktion W durchzuführen.

Es sei w eine rechtsreguläre Funktion in H, c ein Punkt im Inneren von H, ϱ der Konvergenzradius von w in c. Man wähle als Hyperkugel K_r eine solche, deren Radius $r < \varrho$, aber beliebig nahe bei ϱ liegt und setze:

$$W = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_r)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta - z)^{-1}, \text{ wo } w = \Delta W \text{ ist.}$$

Es sei c_1 ein weiterer Punkt in K_r, um den man eine Hyperkugel K_{r_1} lege, wo $r_1 = r - |c - c_1|$ ist. Ist z im Innern von K_{r_1}, so muß für jedes z von K_{r_1}

$$|z - c_1| < |\zeta - c_1|,\quad |z - c_1| < r_1,$$

sein. Also konvergiert die Reihe (absolut und gleichmäßig):

$$(\zeta - z)^{-1} = (\zeta - c_1)^{-1}\sum_{h=0}^{\infty}\left((z - c_1)(\zeta - c_1)^{-1}\right)^h,$$

und es ist:

$$W = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_r)} f(\zeta)\,dZ\,(\zeta - c_1)\left((z - c_1)(\zeta - c_1)^{-1}\right)^h.$$

Ersetzt man hier K_r durch K_{r_1}, so bleibt die Reihe konvergent und die Summe ändert sich nicht (mod. Δ). Daher ist:

$$W \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_{r_1})} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c_1)^{-1} \left((z-c_1)\, (\zeta - c_1)^{-1} \right)^h \; (\mathrm{mod.}\,\Delta), \; |z - c_1| < r_1.$$

Bildet man hier die Deltaableitung, so erhält man die Reihenentwicklung von w um c_1. Ist ϱ_1 der zu c_1 gehörige Konvergenzradius, so wird diese Reihe in der Hyperkugel K_{ϱ_1} konvergieren. In dem gemeinsamen Teil von K_ϱ und K_{ϱ_1} stimmen die Funktionen überein. So kann man fortfahren und erhält alle Reihenentwicklungen von w. Kennt man w nur in K_ϱ, so kann man dadurch H selbst durch dieses Verfahren der analytischen Fortsetzung bestimmen. Wie man sieht, besteht das Verfahren darin, daß man die Taylor-Entwicklung von W um c umstellt auf diejenige um c_1.

8. *Pole.*

Im folgenden sollen die *eindeutigen* rechtsregulären Funktionen und ihre punktförmigen Singularitäten studiert werden.

4. Definition: *Man sagt, $w = f(z)$ hat an der nicht zu seinem Regularitätsbereiche gehörenden Stelle $z = c \neq \infty$ einen Pol n-ter Ordnung ($n \geqq 0$), wenn es um $z = c$ zwei Hyperkugeln K_R und K_r mit den Radien R und $r < R$ gibt, so daß w im Hyperraume zwischen K_R und K_r rechtsregulär ist, wie klein auch r gewählt wird, und wenn der Grenzwert:*

$$\lim_{z \to c} \left| (z-c)^n f(z) \right|$$

existiert und nicht null ist. w hat an der nicht zum Regularitätsbereich gehörenden Stelle $z = \infty$ einen Pol n-ter Ordnung, wenn es zwei Hyperkugeln $K_{R^{-1}}$ und $K_{r^{-1}}$ mit den Radien R^{-1} und $r^{-1} > R^{-1}$ gibt, so daß, wie klein auch r gewählt werde, w im Hyperraume zwischen den beiden Hyperkugeln regulär ist, und wenn der Grenzwert:

$$\lim_{r \to 0} \left| r^n f\left(\frac{z}{r}\right) \right|$$

existiert, nicht null und von z unabhängig ist.

Hat w in $z = c \neq \infty$ einen Pol n-ter Ordnung, so dürfen wir Formel (16a) anwenden. Wir integrieren bei positiven h über K_R, bei negativen h über K_r:

$$w = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z \left(\left((z-c)\, (\zeta - c)^{-1} \right)^h \right) +$$

$$\sum_{h=-1}^{-\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z \left(\left((z-c)\, (\zeta - c)^{-1} \right)^h \right).$$

Wir setzen in den Integralen der zweiten Summe $\zeta - c = r\zeta'$, $dZ = r^3 dZ'$ und integrieren über die Einheitskugel K_1 um c:

$$J_h = \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z \left(\left((z - c)\, (\zeta - c)^{-1} \right)^h \right) =$$
$$= \int_{(K_1)} f(c + r\zeta')\, dZ'\, \zeta'^{-1} \Delta_z \left(\left((z - c)\, \zeta'^{-1} \right)^h \right) r^{-h+2}.$$

Man kann jetzt r so klein wählen, daß für alle ζ' auf K_1:

$$| r^l f(c + r\zeta') | < \varepsilon, \text{ falls } l > n \text{ ist,}$$

wo ε beliebig klein angenommen werden kann. Nach (10) wird:

$$| J_h | < \varepsilon \int_{(K_1)} | \Delta_z \left(((z - c)\, \zeta'^{-1})^h \right) |\, do, \text{ falls } -h > n - 2, \; | dZ' | = do \text{ ist.}$$

Das Integral rechts ist von r unabhängig, somit ist

$$J_h = 0, \; h = -(n-1), \; -n, \; -(n+1), \cdots,$$

und w hat um c die Entwicklung:

$$w = \sum_{h=-n+2}^{+\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} \Delta_z \left(\left((z - c)\, (\zeta - c)^{-1} \right)^h \right). \tag{17}$$

Für $c = \infty$ führt dieselbe Überlegung zu der Entwicklung:

$$w = \sum_{h=n+2}^{-\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z \left((z\zeta^{-1})^h \right). \tag{17a}$$

17. Satz: *Hat w in $z = c$ einen Pol n-ter Ordnung, so läßt sich w um $z = c$ in die Reihe (17), resp. (17a) entwickeln. Umgekehrt stellt jede solche Reihe im Bereiche, in dem sie konvergiert, eine rechtsreguläre Funktion mit einem Pol in $z = c$ dar. Es gibt im Endlichen keine Pole 0., 1., 2. Ordnung, im Unendlichen kein Pol 0. Ordnung.*

Es war notwendig, auch Pole *0.* Ordnung als möglich anzunehmen, da w sich hätte verhalten können wie zaz^{-1}, a ein konstantes Quaternion, in $z = 0$ (was allerdings keine rechtsreguläre Funktion ist).

Aus Satz 17 folgt sofort wegen Hauptsatz I, daß die einzigen Funktionen, die in dem ganzen Hyperraume rechtsregulär sind, und in ∞ einen Pol n-ter Ordnung besitzen, durch:

$$w = \sum_{h=0}^{n+2} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_R)} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z \left((z \zeta^{-1})^h \right) \tag{18}$$

gegeben sind, also bestimmte ganze rationale Funktionen der x_k sind. Alle Funktionen w, die im ganzen Hyperraume rechtsregulär sind, mit Ausnahme von (endlich vielen) Punkten, wo sie Pole haben, lassen sich entsprechend mit Hilfe von Hauptsatz III allgemein darstellen. Es sind bestimmte rationale Funktionen der x_k

$$w = C + \sum_{(l)} \sum_{h=-n_l+2}^{-1} \int_{(K_l)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c_l)^{-1} \Delta_z \left(\left((z - c_l)(\zeta - c_l)^{-1} \right)^h \right), \tag{18a}$$

wo über alle endlichen Pole c_l zu summieren ist. Tritt auch ∞ als Pol auf, so ist noch eine Summe (18) hinzuzufügen. Die Kugeln K_l sind um die Pole c_l mit so kleinem Radius gelegt, daß im Innern oder auf dem Oberflächenraume kein anderer Pol liegt. C ist ein konstantes Quaternion.

Man kann die Theorie der Pole auch auf die holomorphen Funktionen übertragen. Man erhält Pole von allen Ordnungen > 0.

9. *Ein Differentialoperator.*

Ist w irgend eine Quaternionenfunktion, die in H der Gleichung $\Delta w = 0$ genügt, so ist:

$$Dw = \sum_{(k)} \frac{\partial w}{\partial x_k} \bar{i}_k$$

in H rechtsregulär. Denn es ist:

$$\sum_{(h)} (Dw)^{(h)} i_h = \sum_{(h,k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_h} \bar{i}_k i_h = \Delta w = 0,$$

da für $h \neq k$ stets $\bar{i}_h i_k + \bar{i}_k i_h = 0$ ist.

Ist z. B. $w = n(z)^{-1}$, also $\Delta w = 0$, so ist $Dw = -2\, n(z)^{-1} z^{-1} = \frac{1}{2} \Delta(z^{-1})$. Genügt W in H der Gleichung $\Delta \Delta W = 0$, so ist somit DW rechtsholomorph in H. Für $W = \frac{1}{2} \lg n(z)$, das der Bedingung genügt, ist $DW = z^{-1}$. Für den Realteil W jeder nach Satz 5 erhaltenen Funktion ist DW rechtsholomorph und gleich der Ableitung der erzeugenden analytischen Funktion. Darin liegt eine Berechtigung, den Operator mit D zu bezeichnen.

(Eingegangen den 10. April 1935.)