Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven sechster Ordnung vom Geschlecht 4.

Ueber eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven sechster Ordnung vom Geschlecht 4

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois (U. S. A.)

§ 1. Einleitung

Die Raumkurven sechster Ordnung vom Geschlecht vier, welche ich in den nachfolgenden Zeilen einfach mit C_6 bezeichnen werde, sind im allgemeinen wohl bekannt und wurden zuerst wohl als Schnittkurven allgemein gelegener Flächen zweiter und dritter Ordnung studiert. Dabei läßt sich leicht zeigen, daß bei nicht besonders gewählten Projektionen daraus ebene Kurven sechster Ordnung mit sechs Doppelpunkten hervorgehen. Darum das Geschlecht 4. Eine C_6 liegt auf einer einzigen Fläche zweiter und ∞^4 Flächen dritter Ordnung F_3. Daß C_6 nicht auf zwei Flächen zweiter Ordnung Q liegen kann, ist selbstverständlich. Die vierfache Mannigfaltigkeit der F_3 auf C_6 geht sofort aus der Form $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)\, Q + F_3 = 0$ hervor. Will man das ohne die Tatsache beweisen, daß C_6 Schnitt von Q und F_3 ist, so nimmt man die Theorie der linearen Punktreihen auf einer algebraischen Kurve zuhilfe. Das lineare System aller F_3 schneidet auf C_6 eine g_{18}^{19} aus. Da die Reihe komplett ist, so gilt für die Dimension $r = n - p$, wo n die Ordnung der Reihe und p das Geschlecht von C_6 ist. Somit ist $r = 18 - 4 = 14$. Wählt man also auf C_6 noch einen festen neunzehnten Punkt, durch welchen F_3 außer achtzehn noch gehen soll, so enthält F_3 die C_6 ganz. Dann hat man immer noch $19 - 1 - r = 4$ Konstanten für die F_3 zur Verfügung. Das ist also die Dimensionszahl der F_3 auf C_6. Die Dimensionszahl aller C_6 im Raume S_3 ist 24.

Unter dieser Mannigfaltigkeit von C_6 gibt es nun eine bemerkenswerte Klasse, die dadurch ausgezeichnet ist, daß ihre C_6 auf Kegeln dritter Ordnung, oder einfach auf kubischen Kegeln liegen. Daß es C_6 gibt, die auf solchen Kegeln liegen, ist selbstverständlich; man braucht ja nur den Schnitt eines kubischen Kegels mit einer quadratischen Fläche zu bilden. Ob es C_6 gibt, die auf mehr als einem kubischen Kegel liegen, soll jetzt untersucht werden.

§ 2. Ueber den Durchschnitt von kubischen Flächen F_3

1. Zwei allgemeine und allgemein gelegene F_3 schneiden sich in einer Raumkurve 9. Ordnung C_9, deren Geschlecht p sich wie folgt ergibt: Seien Φ_1 und Φ_2 zwei F_3, welche die C_9 erzeugen und Φ_3 eine von Φ_1 und Φ_2 verschiedene F_3, welche C_9 in einer Gruppe G_{27} von Punkten schneidet. Dann geht das Netz $\Phi_1 + \lambda \Phi_2 + \mu \Phi_3 = 0$ durch dieselbe Gruppe. Die lineare Reihe g_{27}^{19}, welche von dem linearen System aller F_3 von der Dimension 19 auf C_9 ausgeschnitten wird, reduziert sich deshalb auf eine komplette g_{27}^{17} und da für eine solche g_n^r, $r = n - p$ ist, so ergibt sich für das Geschlecht von C_9 $p = n - r = 27 - 17 = 10$. Wenn nun die zwei F_3, welche die C_9 erzeugen, eine gewisse zusammengesetzte oder einfache Kurve C_m, $m < 9$, gemein haben, so zerfällt die C_9 in C_m und eine Restkurve C_{9-m}. Uns interessiert der Fall, wo $m = 3$, also die Restkurve eine C_6 ist. Ist C_m eine nicht zerfallende Raumkurve dritter Ordnung, so ergibt sich bekanntlich eine C_6 vom Geschlecht drei. Besteht C_m aus drei windschiefen Geraden, so ist C_6 vom Geschlecht eins, also elliptisch. Der Fall $p = 4$ kommt nur dann vor, wenn C_m eine allgemeine oder zerfallende ebene Kurve 3. Ordnung ist. Sei C_3 diese Kurve, dann können die zwei F_3 die C_3 gemein haben in der Form (C_3 in der Ebene $x_4 = 0$)

$$\Phi_1 = C_3 + x_4 Q' \, (x_1 x_2 x_3 x_4),$$
$$\Phi_1 = C_3 + x_4 Q'' \, (x_1 x_2 x_3 x_4),$$

dargestellt werden, wobei Q' und Q'' allgemeine quadratische Flächen sind. Φ_1 und Φ_2 schneiden sich in C_3 und in einer Restkurve C_6. $\Phi_1 - \Phi_2 = x_4 (Q' - Q'') = 0$ ist eine kubische Fläche, welche durch den Schnitt $C_3 \cdot C_6$ von Φ_1 und Φ_2 geht, und da C_6 nicht auf $x_4 = 0$ liegt, so muß sie auf $Q' - Q'' = 0$, also auf einer quadratischen Fläche liegen. Somit ist diese C_6 vom Geschlecht vier.

2. Es soll jetzt angenommen werden, daß Φ_2 ein kubischer Kegel sei, dessen Spitze in A_4 (0001) gelegen sei, so daß $\Phi_2 = C_3 = K$ ist. Die C_6 liegt jetzt auf dem kubischen Kegel K und der quadratischen Fläche $Q = Q' - Q''$. Bezeichnet man mit q die Polarebene von A_4 in bezug auf Q, so ist Q, und somit auch C_6, in der Involution mit A_4 als Zentrum und q als Axialebene sich selbst entsprechend.

Daß für diese C_6 auch $p = 4$ ist, kann auch ohne Schwierigkeit auf synthetischem Wege ermittelt werden. Man projiziere die C_6 von einem beliebigen Punkte O aus auf eine Ebene e. OA_4 schneide e in S und die Projektion von C_6 sei C'_6. Von O gehen sechs Tangentiaebenen an K, deren Berührungserzeugende t_i, $i = 1, 2, .. 6$ seien. Jede t_i schneidet Q in zwei Punkten P_i' und P_i'', welche auf C_6 und Berührungspunkte der C_6 mit der Tangentialebene Ot_i sind. Somit wird t_i in eine Doppeltangente von C'_6 aus S projiziert. Mithin gehen von S sechs Doppeltangenten an C_6. Der Tangentialkegel von A_4 an Q schneidet K in 6 Erzeugenden, die selbstverständlich Q berühren und also Tangenten von A_4 in C_6 sind. Diese werden von O aus in 6 einfache Tangenten von S und C_6' projiziert. Somit gehen von S $2 \cdot 6 + 6 = 18$ Tangenten an C_6', welche also die Klasse 18 hat. Eine allgemeine C_6' hat $5 \cdot 6 = 30$ zur Klasse. Folglich werden von den Doppelpunkten 12 Tangenten in Abzug gebracht. Die C_6' hat deshalb 6 Doppelpunkte und ist also vom Geschlecht 4, w. z. b. w.

Liegt eine C_6 mit $p = 4$ auf einer F_3 und einem kubischen Kegel K, so ist, da C_6 auch auf einer quadratischen Fläche Q liegt,

$$F_3 = c.K + Q\ (a\,x)\,.$$

Der Restschnitt von F_3 mit K liegt nicht auf Q, somit auf $(a\,x) = 0$, einer Ebene.

Zusammenfassend hat man

Satz 1. *Ein kubischer Kegel der durch einen allgemeinen ebenen Schnitt einer kubischen Fläche geht, schneidet letztere in einer Restkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4. Umgekehrt, befindet sich eine solche C_6 auf einer kubischen Fläche und einem kubischen Kegel, so ist der Restschnitt der beiden Flächen eine ebene Kurve dritter Ordnung. Eine C_6 auf einem kubischen Kegel ist selbstentsprechend in der Involution mit der Spitze des Kegels als Zentrum und mit der Polarebene der Spitze in Bezug auf die quadratische Fläche, auf welcher C_6 liegt als Axialebene.*

Bezeichnet man diese Involution wie oben mit (A_4, q), so ist nach diesen Ergebnissen auch einleuchtend

Satz 2. *Entsprechen sich F_3 und F_3' in der Involution (A_4, q), so schneiden sich F_3 und F_3' außer der gemeinsamen C_3 in q in einer C_6 vom Geschlecht 4, die auf einem kubischen Kegel mit der Spitze A_4 gelegen ist. C_6 ist auch auf einer quadratischen Fläche Q, für welche q Polarebene von A_4 ist.*

Eine C_6 $(p = 4)$ kann nicht auf einem rationalen kubischen Kegel liegen. Eine C_6 auf einem solchen Kegel hat das Geschlecht 2 und ist folglich hyperelliptisch.

§ 3. C_6 auf zwei und drei elliptischen Kegeln dritter Ordnung

1. Ich nehme jetzt an, daß C_6 auf zwei kubischen Kegeln K_1 und K_2 gelegen sei, dann ergibt sich aus Satz 1 sofort, daß die Restkurve eine ebene C_3 ist. Daß dies möglich ist, folgt sofort aus der Umkehrung, nach welcher zwei Kegel K_1 und K_2 auf einer gemeinsamen ebenen C_3 sich in einer Restkurve C_6 ($p = 4$) schneiden, die überdies auf einer quadratischen Fläche Q gelegen ist.

Aus der ebenen projektiven Geometrie hat man nun den folgenden

Satz 3. *Verbindet man drei Punkte A, B, C einer Geraden s_3 mit zwei beliebigen in derselben Ebene gelegenen Punkte V_1 und V_2 mit der Verbindungsgeraden l, so daß sich in derselben Ordnung die Geradentripel $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$ ergeben, so schneiden sich diese außerhalb A, B, C noch in 6 Punkten, die auf einem Kegelschnitt L liegen. Diese bilden drei Mal drei Paare von Involutionen, von denen zwei die Zentren V_1 und V_2 haben. Das Zentrum der dritten Involution V_3 liegt auf der Verbindungslinie l von V_1 und V_2. Die drei Involutionsaxen sind natürlich die Polaren von V_1, V_2, V_3 in bezug auf L und schneiden sich in einem Punkte S, dem Pol von l. Die sechs Punkte liegen auch auf dem dritten Geradentripel $a_3\,b_3\,c_3$.*

Die Spitzen der Kegel K_1 und K_2 seien V_1 und V_2, ihre Verbindungslinie l. Die Ebene von C_3 werde mit s_3 bezeichnet. Jede Ebene s des Büschels durch l schneidet aus K_1, K_2 und Q zwei Geradentripel $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$ aus, die drei Punkte auf C_3 gemeinsam haben und sich also noch in 6 Punkten schneiden, die auf C_6, überdies auf einem Kegelschnitt L auf Q liegen. Es gelten also in jeder Ebene s die Voraussetzungen des Satzes 3, woraus folgt, daß die sechs jeweilen in s gelegenen Punkte von C_6 zu zweien auf einem dritten Geradentripel $a_3\,b_3\,c_3$ liegen, dessen Spitze V_3 auf l liegt. Mit andern Worten, C_6 liegt noch auf einem dritten kubischen Kegel K_3, dessen Spitze V_3 auf der Verbindungslinie l von V_1 und V_2 liegt. Dreht sich s um l, so beschreiben s_1 und s_2 zwei gleichnamige Ebenen, die mit s_3 die Polarebenen von V_1, V_2 und V_3 in bezug auf Q sind und durch die polarkonjugierte Gerade g von l gehen.

Somit

Satz 4. *Zwei kubische Kegel K_1 und K_2 mit den Spitzen V_1 und V_2 und einer gemeinsamen ebenen Kurve dritter Ordnung C_3''' schneiden sich in einer Restkurve C_6 ($= 4$), die noch auf einem dritten kubischen Kegel K_3 liegt, dessen Spitze V_3 auf der Verbindungslinie l von V_1 und V_2 liegt. K_1 und K_3, K_2 und K_3 schneiden sich außer C_6 noch in C_3'' und C_3'. Die drei Ebenen s_1, s_2, s_3, in welchen C_3', C_3'', C_3''' bezüglich* *gelegen sind, sind die Polarebenen von V_1, V_2, V_3 in bezug auf Q und* gehen durch die konjugierte Gerade g *von l. Die C_6 ist selbst entsprechend in den drei perspektivischen Involutionen (V_1, s_1); (V_2, s_2); (V_3, s_3), so daß auch je zwei der drei Kegel in bezug auf die bezügliche dritte Involution entsprechend sind.*

2. Analytisch gestalten sich die Verhältnisse wie folgt: Die Spitzen der Kegel K_1 und K_2 seien V_1 (1000) und V_2 (0100) und ihre gemeinschaftliche ebene Kurve C_3 liege in $x_1 - x_2 = 0$. Dann hat man ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$(1) \quad K_1 = x_2^3 + x_2^2 (a x_3 + b x_4) + x_2 (c x_3^2 + d x_3 x_4 + e x_4^2) + f x_3^3 + g x_3^2 x_4 + h x_3 x_4^2 + j x_4^3 = 0\,,$$

$$(2) \quad K_2 = x_1^3 + x_1^2 (a x_3 + b x_4) + x_1 (c x_3^2 + d x^3 x_4 + e x_4^2) + f x_3^3 + g x_3^2 x_4 + h x_3 x_4^2 + j x_4^3 = 0\,,$$

welche für $x_2 = x_1$ identische Ausdrücke geben, die eben die gemeinschaftliche C_3 in $x_1 - x_2 = 0$ bestimmen. Als quadratische Fläche Q, auf welcher C_6 liegt, erhält man

$$(3) \quad Q = \frac{K_2 - K_1}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)(a x_3 + b x_4) + c x_3^2 + d x_3 x_4 + e x_4^2 = 0.$$

Eine beliebige F_3 durch C_6 kann in der Form

$$(4) \quad (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4)\, Q + K_1 = 0$$

geschrieben werden. Es läßt sich bestätigen, daß (4) ein kubischer Kegel K_3 mit der Spitze V_3 (1, —1, 0, 0) wird, wenn $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = a$, $\delta = -b$ gesetzt wird, so daß also

$$(5) \quad K_3 = (x_1 + 2 x_2 + a x_3 + b x_4)\, Q - K_1 = 0.$$

Derselbe Kegel wird in ähnlicher Weise als

$$(6) \quad K_3 = (2 x_1 + x_2 + a x_3 + b x_4)\, Q - K_2 = 0$$

erhalten. Dabei zeigt es sich, daß

$$x_1 + 2 x_2 + a x_3 + b x_4 = 0 \quad \text{und} \quad 2 x_1 + x_2 + a x_3 + b x_4 = 0$$

die Polarebenen von V_2 und V_1 in bezug auf Q sind und daß $x_1 - x_2 = 0$ durch den Schnitt der beiden geht, was insgesamt einer vollständigen Bestätigung des Satzes 4 gleichkommt.

§ 4. C_6 auf nur zwei kubischen Kegeln

1. Es ist klar, daß die obigen Verhältnisse nur dann eintreten, wenn die C_3 eine allgemeine Kurve dritter Ordnung ist und in derselben Ebene liegt. Zerfällt C_3 in drei verschiedene Geraden, oder in zwei zusammenfallende und eine verschiedene Gerade, oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder in drei in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden, so gibt es entweder keine zwei kubische Kegel, die sie gemeinsam haben, oder die Kegel haben zusammenfallende Spitzen. Im letztern Fall zerfällt die C_6 in sechs in der Spitze zusammenlaufenden Geraden.

Es ist jedoch möglich, das K_1 und K_2 mit verschiedenen Spitzen eine gemeinschaftliche Erzeugende und derselben entlang dieselbe Wendetangentialebene haben, so daß dann die nichtzerfallende C_6 auf nur zwei Kegeln liegt.

$$K_1 = x_2^2\,(a\,x_3 + b\,x_4) + \varphi_3\,(x_3, x_4) = 0\,, \tag{1}$$

$$K_2 = x_1^2\,(a\,x_3 + b\,x_4) + \psi_3\,(x_3, x_4) = 0\,, \tag{2}$$

sind zwei Kegel mit dieser Eigenschaft und Spitzen wieder in V_1 (1000); V_2 (0100). Eine durch K_1 und K_2 gehende F_3 hat die Form

$$K_1 + \lambda K_2 = (x_2^2 + \lambda x_1^2)\,(a x_3 + b x_4) + \varphi_3 + \lambda\,\psi_3 = 0\,. \tag{3}$$

Da $\varphi_3 + \lambda\psi_3$ eine binäre kubische Form ist, so kann offenbar ein Wert von λ so bestimmt werden, daß $x_3 / x_4 = -b / a$ eine Wurzel von $\varphi_3 + \lambda\psi_3 = 0$ wird, so daß $a x_3 + b x_4$ Divisor von $\varphi_3 + \lambda\psi^3$ ist. $K_1 + \lambda K_2$ zerfällt in die Ebene $a x_3 + b x_4 = 0$ und die quadratische Fläche

$$Q = x_2^2 + \ x_1^2 + F_2\,(x_3\,x_4) = 0\,, \tag{4}$$

auf welcher C_6 liegt. Die Polarebenen s_1 und s_2 von V_1 und V_2 in bezug auf Q sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, so daß jede durch die ihr gegenüberliegende Spitze geht.

$$(V_1, s_1) \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

ist eine perspektivische Involution mit V_1 als Zentrum und s_1 als Axialebene, welche den Kegel K_2 invariant läßt. In ähnlicher Weise läßt die Involution

$$(V_2, s_2) \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

den Kegel K_1 ungeändert.

Es gilt also

Satz 5. *Zwei kubische Kegel K_1 und K_2 mit den Spitzen V_1 und V_2 auf einer gemeinschaftlichen Erzeugenden l und einer gemeinschaftlichen Wendetangentenebene durch l schneiden sich auf einer C_6 $(p=4)$, die auf einer quadratischen Fläche Q liegt. Sind s_1 und s_2 die Polarebenen von V_1 und V_2 in bezug auf Q, so sind K_1 und K_2, sowohl als C_6 selbstentsprechend bezüglich der perspektivischen Involutionen (V_2, s_2); (V_1, s_2).*

2. Wenn in (1) und (2) $\psi_3 = \Phi_3$ ist, dann werden die durch $\Phi_3 = 0$ bestimmten Ebenen durch $V_1 V_2 = l$ Tangentialebenen an die beiden Kegel. Die Berührungserzeugenden $a_1\, b_1\, c_1$ auf K_1 in s_2 gelegen, und $a_2\, b_2\, c_2$ auf K_2, in s_1 gelegen, schneiden sich in drei Punkten ABC auf der konjugierten g von l, welche Berührungspunkte der beiden Kegel und deshalb Doppelpunkte von C_6 sind. Eine Ebene durch l und einen allgemeinen Punkt von C_6 hat 7 Punkte mit C_6 gemein, so daß also ein Teil von C_6 in eine Ebene fällt und eine ebene C_3 ist. Die residuale Kurve ist ebenfalls eine ebene C'_3. Da

$$K_1 - K_2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(ax_3 + bx_4)\,,$$

so ergeben sich diese Ebenen als $x_1 - x_2 = 0$ und $x_1 + x_2 = 0$. Die dritte ist die Wendetangentenebene. Die Fläche Q besteht aus $Q = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Das Resultat läßt sich ausdrücken als

Satz 6. *Haben zwei kubische Kegel K_1 und K_2 mit verschiedenen* Spitzen *V_1 und V_2 und einer gemeinsamen Erzeugenden $l = V_1 V_2$ drei verschiedene gemeinsame Tangentialebenen, die durch l gehen, so besitzen sie eine gemeinsame durch l gehende Wendetangentialebene. Die drei Berührungserzeugenden für jeden Kegel liegen je in einer Ebene s_1, bezüglich s_2. s_1 und s_2 schneiden sich in einer Geraden g. Die Durchdringungskurve C_6 zerfällt in zwei ebene C_3, deren Ebenen durch g gehen und mit s_1 und s_2 vier harmonische Ebenen bilden. Die Kegel K_1, K_2, sowie die beiden C_3 sind selbstentsprechend beziehungsweise in den Involutionen (V_1, s_1) und (V_2, s_2).*

§ 5. C_6 auf nur vier kubischen Kegeln

1. Wenn ein kubischer Kegel K_3 mit der Spitze A_3 (0010)

$$K_3 = x_1^3 + x_1^2\, \Phi_1(x_2, x_4) + x_1\, \Phi_2(x_2, x_4) + \Phi_3(x_2, x_4) = 0$$

unter der Involution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ invariant sein soll, so muß er die Form haben:

$$K_3 = x_1^2(a x_2 + b x_4) + c x_2^3 + d x_2^2 x_4 + e x_2 x_4^2 + f x_4^3 = 0,$$

Soll er auch unter einer zweiten Involution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ invariant sein, so ist seine Form notwendigerweise

$$K_3 = b x_1^2 x_4 + d x_2^2 x_4 + f x_4^3 = x_4(b x_1^2 + d x_2^2 + f x_4^2) = 0$$

und ist somit reduzibel. Daraus geht hervor, *daß ein allgemeiner Kegel dritter Ordnung nicht unter zwei perspektivischen Involutionen invariant sein kann, bei welchen jedes Zentrum der einen auf der Axialebene der andern liegt.*

Aehnliches gilt natürlich für die elliptischen ebenen Kurven dritter Ordnung.

2. Nun werde die C_6, die auf drei kubischen Kegeln mit kollinearen Spitzen liegt, als erster Fall, die C_6, die auf nur zwei kubischen Kegeln liegt, als zweiter Fall bezeichnet; kürzer Fall 1 und Fall 2. Im Fall 2 soll die C_6 nicht degeneriert sein.

Angenommen drei kubische Kegel K_1, K_2, K_3 mit den Spitzen V_1, V_2, V_3, welche nicht kollinear seien, gehen durch dieselbe C_6, und seien gegenseitig im Verhältnis von Fall 2. Die Polarebene von V_1 in bezug auf die quadratische Fläche Q, auf welcher C_6 liegt, geht durch V_2 und V_3; die Polarebene von V_2 durch V_1 und V_3. Demnach wäre K_3 invariant in zwei Involutionen (V_1, s_1); (V_2, s_2), bei welcher V_1 auf s_2 und V_2 auf s_1 liegt. Das ist jedoch, wie soeben gezeigt wurde, nicht möglich, ohne daß K_3 zerfällt.

2. Nachdem die Fälle erledigt sind, nach welchen C_6 auf nur zwei, oder nur drei kubischen Kegeln liegt, kommt zunächst die Möglichkeit von nur vier Kegeln in Betracht. Diese tritt ein, wenn drei Kegel K_1, K_2, K_3 des Falles 1 in einer Involution, z. B. (V_4 (001 — 1), $x_3 - x_4 = s_4$) selbstentsprechend sind, d. h. in $(34) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}$. Es ist dann

$$K_1 = x_2^3 + a x_2^2 (x_3 + x_4) + x_2 (b x_3^2 + 2 c x_3 x_4 + b x_4^2) + d(x_3^3 + x_4^3) + \\ + e(x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2) = 0$$

$$K_2 = x_1^3 + a x_1^2 (x_3 + x_4) + x_1 (b x_3^2 + 2 c x_3 x_3 + b x_4^2) + d(x_3^3 + x_4^3) + \\ + e(x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2) = 0$$

$$K_3 = (x_1 + x_2)^3 + a(x_1 + x_2)^2 (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)[b(x_3^2 + x_4^2) + 2 c x_3 x_4 + \\ + a(x_3 + x_4)^3] + a(x_3 + x_4)[b(x_3^2 + x_4^2) + 2 c x_3 x_4] - [d(x_3^2 + x_4^2) + \\ + e(x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2)] = 0 \ .$$

Die quadratische Fläche Q, auf welcher C_6 liegt, ist

$$Q = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + b(x_3^2 + x_4^2) + 2 c x_3 x_4 = 0 \ .$$

Der vierte kubische Kegel hat V_4 zur Spitze und ist

$$K_4 = d(x_3^3 + x_4^3) + e(x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2) - x_1 x_2 [x_1 + x_2 + a(x_3 + x_4)] \\ + \frac{e - 3d}{2(b - c)} \left[(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)(x_3 + x_4) + a(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)^2 + \right. \\ \left. (x_3 + x_4)\left\{ b(x_3^2 + x_4^2) + 2 c x_3 x_4 \right\} \right] = 0 \ .$$

Die Gerade $V_4 V_1$ ist Wendeerzeugende von K_4 mit der Wendetangentenebene

$$x_2 + \frac{3d - e}{2(b - c)} (x_3 + x_4) = 0 \ ,$$

die auch K_1 gemeinsam ist. In ähnlicher Weise ist

$$x_1 + \frac{3d - e}{2(b - c)} (x_3 + x_4) = 0$$

die gemeinsame Wendetangentenebene von K_4 und K_2 durch $V_4 V_2$;

$$x_2 + x_2 + \left(a + \frac{e - 3d}{2(b - c)} \right) (x_3 + x_4)$$

diejenige von K_4 und K_3. Die Polarebenen (Axialebenen der Involutionen) von V_1, V_2, V_3, V_4 in bezug auf Q sind in derselben Ordnung

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + a(x_3 + x_4) &= 0 \ , \\ x_1 + 2x_2 + a(x_3 + x_4) &= 0 \ , \\ x_1 - x_2 &= 0 \ , \\ x_3 - x_4 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Satz 7. *Liegt eine* C_6 *(*$p = 4$*) auf drei kubischen Kegeln* K_1, K_2, K_3 *mit drei kollinearen Spitzen* V_1, V_2, V_3 *und sind sie selbstentsprechend in einer vierten Involution mit Zentrum* V_4, *so liegt* C_6 *auf einem vierten Kegel* K_4 *mit der Spitze* V_4. $V_4 V_4$, $V_4 V_2$, $V_4 V_1$ *sind Wendeerzeugende von* K_4 *und die Wendetangentenebenen sind in derselben Ordnung* K_4 *und den Kegeln* K_1, K_2, K_3 *gemein. Die den Wendeerzeugenden konjugierten Polarebenen sind gerade die Polarebenen oder Axialebenen der drei Involutionen* (V_1, s_1); (V_2, s_2); (V_3, s_3) *und sind koaxial.*

§ 6. C_6 auf sechs Kegeln

V_1, V_2, V_3 seien wieder die drei kollinearen Spitzen von drei Kegeln des Falles 1. V_4 sei die Spitze eines vierten Kegels durch C_6, so daß K_1, K_4 zwei von drei Kegeln eines andern Falles 1 seien. Ist K_5 der dritte dieser Kegel, so sind K_2, K_4 entweder Kegel des Falles 2, oder zwei der drei Kegel eines neuen Falles 1. Es werde das letztere angenommen, dann bestimmen V_2 und V_4 die Spitze V_6 eines dritten Kegels K_6 auf C_6. Die Geraden $\overline{V_2 V_4 V_6}$ und $\overline{V_3 V_5}$ sollen sich in W schneiden, dann sind V_2, V_3 und V_4, V_5 involutorische Paare inbezug auf die Involution (V_1, s_1), bei welcher s_1 durch W geht. V_2, V_4 und V_3, V_5 sind involutorische Paare inbezug auf eine Involution mit W als Spitze und eine Gerade s, welche durch V_1 und den dritten Diagonalpunkt von $V_2 V_3 V_4 V_5$ geht. In dieser Involution würde V_6 ein siebenter Punkt V_7 auf $\overline{V_2 V_4 V_6}$ entsprechen, was nicht möglich ist, ohne daß V_6 mit W zusammenfällt. Die Annahme eines vierten Punktes V_4 mit der angegebenen Eigenschaft führt also zu sechs durch C_6 gehenden Kegeln dritter Ordnung, deren Spitzen die sechs Schnittpunkte eines vollständigen Vierseits bilden. Dasselbe Resultat wird erhalten, wenn V_2 und V_4 Spitzen von Kegeln des Falles 2 sind, und V_1, V_2, V_3 mit V_4 nicht Spitzen von vier Kegeln des § 5 sind. Wird in der Ebene des Vierseits durch V_2 eine Gerade gezogen, welche $\overline{V_1 V_4}$ in V_7 und $\overline{V_5 V_6}$ in V_8 schneidet und wird angenommen V_2 V_7 V_8 seien Spitzen von drei Kegeln des Falles 1., so hätte man dann drei Tripel von Kegeln des Falles 1. mit einem gemeinsamen Kegel K_2, was unmöglich ist. Denn eine Ebene durch $\overline{V_1 V_4 V_5 V_7}$ würde Q in einem Kegelschnitt schneiden auf dem sechs Punkte von C_6 liegen die vier Involutionen mit kollinearen Spitzen angehören würden, was nicht möglich ist. Man hat demnach

Satz 8. *Liegt eine Kurve 6. Ordnung (*$p = 4$*) auf nur sechs kubischen Kegeln, so bilden ihre Spitzen die sechs Schnittpunkte der Seiten eines ebenen Vierseits.*

Die Annahme eines 7. Kegels mit koplanarer Spitze führt zu der oben bewiesenen Unmöglichkeit. Daß der Fall des Satzes 8 wirklich existiert, habe ich früher bewiesen[1]).

Sind Φ_1, Φ_2, Φ_3 elementar symmetrischen Funktionen in S_3 (x_1, x_2, x_3, x_4), so sind

$$F_3 = \Phi_1^2 + \lambda \Phi_1 \Phi_2 + \mu \Phi_3 = 0$$

$$Q = F_2 = \Phi_1^2 + \nu \Phi_1 \Phi_2 \qquad = 0$$

zwei symmetrische Flächen dritter und zweiter Ordnung, die sich in einer C_6 von der in Satz 8 angegebenen Art. Die C_6 ist invariant in der Kollineationsgruppe G_{24} und speziell in den sechs perspektivischen Involutionen (12), (13), (14), (23), (24), (34) mit den Spitzen V_{12} (1—100), V_{13} (10—10), V_{14} (100—1), V_{23} (01—10), V_{24} (010—1), V_{34} (00—11), und den Axialebenen $x_i - x_k = 0$ (Zentrum V_{ik}). Das sind die Spitzen der sechs Kegel, deren explizite Gleichungen ich am angeführten Orte angegeben habe.

§ 7. C_6 auf zehn kubischen Kegeln

1. Es werde jetzt die Möglichkeit angenommen, daß außer den sechs Kegeln des vorhergehenden Falles noch ein siebenter Kegel mit der Spitze V_7 existiere, die außerhalb der Ebene α der andern sechs Spitzen $V_1 \ldots V_6$ liege. Die Gerade l, auf welcher V_1, V_2, V_3 liegen, bestimmt mit V_7 eine Ebene β, in der zwei weitere Spitzen V_8 und V_9 von durch C_6 gehenden Kegeln sind, so daß ihre Spitzen das Vierseit $l = \overline{V_1, V_2, V_3}$, $k = \overline{V_1, V_7, V_8}$, $h = \overline{V_2, V_7, V_9}$, $m = \overline{V_3, V_8, V_9}$ bilden. Die Gerade $g = \overline{V_1, V_4, V_6}$ bestimmt mit k eine Ebene γ, in welcher $\overline{V_4, V_8}$ und $\overline{V_6, V_7}$ sich in einem Punkte V_{10}, der Spitze eines zehnten durch C_6 gehenden Kegels schneiden. Aber nach der Konstruktion liegt V_{10} auf $\overline{V_5, V_9}$, so daß also alle zehn Ecken oder Spitzen als Schnittpunkte des Fünfflachs α (V_4, V_5, V_6), β (V_7, V_8, V_9), γ (V_4, V_5, V_{10}), δ (V_5, V_6, V_{10}), ε (V_4, V_6, V_{10}) erscheinen. In jeder der zehn Diagonalebenen, z. B. $V_{10}\, l$, liegen die Spitzen von vier Kegeln K_1, K_2, K_3, K_{10}, und keine andern. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn V_7 so angenommen wird, daß es mit V_1, V_2, V_3 die Spitzen von nur vier durch C_6 gehenden Kegeln bildet. Die Annahme eines 11. Kegels würde zu einer Reihe von Fünf-

[1]) Some geometric applications of symmetric substitution groups. The American Journal of Mathematics, Vol. XLV (1923), pp. 192—207.

flachen mit der obigen Eigenschaft und so auf kubische Kegel mit mehr als drei reellen Wendeerzeugenden führen, was unmöglich ist.

Daß der Fall von zehn kubischen Kegeln durch eine C_6 existiert, so daß die zehn Spitzen die Ecken eines Fünfflachs sind, ergibt sich sofort aus der Betrachtung der Kollineationsgruppe G_{120} von fünf Variablen $x_1, \ldots, x_5$, wobei $x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ angenommen wird. Wie oben, sind $\Phi_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i$, $\Phi_2 = \sum_{1}^{5} x_i x_k$, $\Phi_3 = \sum_{1}^{5} x_i x_k x_j$ elementar sym-symmetrische Funktionen. Als quadratische und kubische Flächen in S_4 hat man

$$\Phi_1^2 + \nu \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1^3 + \lambda \Phi_1 \Phi_2 + \mu \Phi_3 = 0 .$$

Da aber $\Phi_1 = 0$, so reduzieren sich diese auf S_3 projiziert auf

$$Q = \Phi_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0$$

$$F_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 .$$

Diese F_3 ist als Diagonalfläche von Clebsch bekannt. Q und F_3 schneiden sich in einer C_6 vom Geschlecht vier, die in der Gruppe G_{120} invariant ist. Unter dieser befinden sich zehn perspektivische Involutionen $(i\,k)$ mit Zentrum V_{ik} und Axialebene $x_i - x_k = 0$. Die V_{ik} sind somit Spitzen von kubischen Kegeln, auf welchen C_6 liegt. Sie entsprechen genau den Verhältnissen der oben gefundenen Möglichkeit von 10 Kegeln. Das in Rede stehende Fünfflach ist hier $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Satz 9. *Befindet sich eine C_6 $(p = 4)$ auf zehn kubischen Kegeln, so bilden ihre Spitzen die zehn Ecken eines Fünfflachs. Eine solche C_6 ist invariant in einer der symmetrischen Kollineationsgruppe von fünf Variablen isomorphen Kollineationsgruppe G_{120}.*

§ 8. Die 120 Tritangentialebenen der C_6 auf zehn kubischen Kegeln

Man betrachte die drei kubischen Kegel K_1, K_2, K_3, deren Spitzen V_1, V_2, V_3 auf l collinear sind. Die Polarebenen derselben mit Bezug auf Q seien wieder s_1, s_2, s_3, dann sind K_2, K_3 entsprechend in der Involution (V_1, s_1) u. s. w. Von l lassen sich sechs Tangentialebenen an K_1 legen, die wegen den Involutionseigenschaften auch den Kegeln K_2 und K_3 gemeinsam sind. Die drei Kegel berühren sich somit sechsmal in einem Tripel, was zu sechs Tritangentialebenen des C_6 führt. Zwei Kegel wie K_2 und K_3 schneiden sich in einer Kurve 9. Ordnung, die sich aus

C_6 und einer ebenen C_3 zusammensetzt. Die Schnittpunkte von C_3 und C_6 fallen mit Punkten der soeben erwähnten Tripel zusammen. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich für jede der übrigen neun Seiten des Fünfflachs. Man erhält also aus dieser Quelle 60 Tritangentialebenen. Jede Spitze V_i ist gemeinsam zu drei Tripeln von Kegeln mit kollinearen Spitzen. Sei t die Berührungserzeugende einer der Tritangentialebenen mit K_1. Durch t kann man noch vier Tangentialebenen an K_1 ziehen, die zugleich Tritangentialebenen von C_6 sind. Aber drei davon sind schon unter den obigen sechzig enthalten. Durch jede der 60 Berührungserzeugenden geht also noch eine weitere Tritangentialebene. Somit ergibt sich

Satz 10. *Befindet sich eine $C_6\,(p=4)$ auf zehn kubischen Kegeln, deren Spitzen die Ecken eines vollständigen Fünfflachs sind, so gehen durch jede der zehn Seiten des Fünfflachs sechs Tritangentialebenen. Durch jede der sechzig Berührungskanten derselben mit den entsprechenden Kegeln geht noch eine weitere Tritangentialebene. Die ganze Konfiguration wird durch die Kollineationsgruppe G_{120} beherrscht.*

(Eingegangen den 23. Februar 1934.)