Zur Auflösung eines Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Von L. Locher, Winterthur

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Auflösung eines Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und beliebigen Störungsfunktionen. Das Aussehen der allgemeinen Lösung ist seit Euler und Lagrange wohlbekannt. Wegen der grossen Bedeutung eines derartigen Systems bei der rechnerischen Behandlung von mechanischen und elektrischen Schwingungen wurden im Laufe der Zeit auch verschiedene praktische Methoden zur expliziten Darstellung der Lösung bei gewissen Anfangsbedingungen ausgearbeitet. Vor allem ist es die schon auf Leibniz und Lagrange zurückgehende, aber erst von *Heaviside* wirklich praktisch durchgeführte Rechnung mit Operatoren, welche sich hier nützlich erweist. Diese in Ingenieur-Kreisen „Heaviside-Kalkül" genannte Methode wurde in der letzten Zeit verschiedentlich behandelt und begründet. Die mir bekannten Begründungen [z. B. *K. W. Wagner*[1]), *L. Casper*[2]), *J. R. Carson*[3])] ziehen von vornherein mehr oder weniger Eigenschaften des in Frage stehenden Gleichungssystemes oder gewisse funktionentheoretische Sätze heran. Die Begründung für einen Spezialfall im Buche von *E. J. Berg*[4]), das im übrigen viele interessante Beispiele enthält, ist nicht einwandfrei. Die folgenden Ausführungen beruhen auf einer Arbeit von *W. Gauster*[5]). Damit sie ein Ganzes für sich bilden, werde ich das von W. Gauster Gegebene zum Teil hier mit wesentlichen Vereinfachungen wiederholen. Aus der allgemeinen Theorie der gew. Differentialgleichungen werde ich dabei überhaupt nichts voraussetzen. Ferner sollen in der Lösung keine unbestimmten Koeffizienten auftreten, die erst nachträglich den An-

---

1) *K. W. Wagner,* Der Satz von der wechselseitigen Energie. Elektr. Nachrichtentechnik. Bd. 2, S. 376, 1925.

2) *L. Casper,* Zur Formel von Heaviside für Einschaltvorgänge. Arch. für Elektrotechnik. Bd. 15, S. 95, 1925.

3) *J. R. Carson,* Elektr. Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung (erw. deutsche Ausgabe von F. Ollendorf und K. Pohlhausen). Verlag J. Springer, 1929.

4) *E. J. Berg,* Rechnung mit Operatoren (deutsche Bearbeitung von O. Gramisch und H. Tropper). Verlag R. Oldenbourg, 1932.

5) *W. Gauster,* Über die Lösung von Schwingungsaufgaben mittels symbolischer Differentialrechnung. Arch. f. Elektrotechnik, Bd. 24, S. 360, 1930.

fangswerten angepaßt werden, sondern sie enthalte direkt diese angenommenen Anfangswerte, wodurch deren Einfluß bequem überschaut werden kann. Das Inhaltliche deckt sich zum Teil mit der kürzlich erschienenen Arbeit von *K. Th. Vahlen*[6]). Dort wird aber der wichtige Fall, daß die Störungsfunktion eine „Stoßfunktion" ist, nur für den sog. Einheitsstoß untersucht. Im Hinblick auf die hier verwendete Methode sei von vornherein betont, daß das im ersten Teil verwendete Rechnen mit Operatoren nur dazu dient, die fertigen Formeln möglichst elementar zu beweisen. Hat man diese, so ist zur praktischen Berechnung der Lösung die Kenntnis der einschlägigen Rechengesetze nicht mehr notwendig.

I.

Ist $G(D) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu D^\nu$ eine ganze rationale Funktion von D mit konstanten Koeffizienten c_ν, so werde wie üblich $G(D)$ durch

$$G(D)\, f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t)$$

als Operator definiert. Sind dann $G_1(D), G_2(D)$ zwei ganze rationale Funktionen, so gilt wegen $D^m \{D^n f(t)\} = D^{n+m} f(t)$ allgemein $G_1(D)\{G_2(D) f(t)\} = \{G_1(D)\, G_2(D)\} f(t)$, also auch das kommutative Gesetz $\{G_1(D) \cdot G_2(D)\} f(t) = \{G_2(D)\, G_1(D)\} f(t)$, wofür wir einfacher

$$G_1(D)\, G_2(D)\, f(t) = G_2(D)\, G_1(D)\, f(t)$$

schreiben. Weiter ist auch das distributive Gesetz

$$G(D)\, \{f_1(t) + f_2(t)\} = G(D)\, f_1(t) + G(D)\, f_2(t)$$

richtig. Mit Hilfe dieser Tatsachen lassen sich bekanntlich aus einem vorgelegten System von m linearen Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} G_{ik}(D)\, x_k(t) = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{1}$$

mit beliebig gegebenen Störungsfunktionen $f_i(t)$ besonders bequem die Differentialgleichungen gewinnen, denen die gesuchten Funktionen $x_k(t)$ einzeln genügen. Bedeutet nämlich $\Delta(D) = |\, G_{ik}(D)\,|$ die Determinante

[6]) *K. Th. Vahlen*, Über den Heaviside-Kalkül. Zschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 283, 1933.

aus den ganzen rationalen Funktionen $G_{ik}(D)$ und $\Delta_{ik}(D)$ die dem Gliede $G_{ik}(D)$ zugeordnete Unterdeterminante, so sind $\Delta(D)$ und $\Delta_{ik}(D)$ wieder ganze rationale Funktionen von D und durch Ausüben des Operators $\Delta_{ik}(D)$ auf die linke und rechte Seite der i-ten Gleichung (1) und nachheriger Addition der erhaltenen Gleichungen folgt

$$\Delta(D)\, x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \Delta_{ik}(D)\, f_i(t). \qquad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{2}$$

Wir wollen annehmen, dass $\Delta(D)$ nicht identisch Null ist. Die Variable t sei reell. Damit die geforderten Operationen im allgemeinen ausführbar sind, müssen wir voraussetzen, dass die gegebenen reellen oder komplexen Funktionen $f_i(t)$ der reellen Variablen t genügend oft differenzierbar sind; abgesehen an isolierten Sprungstellen von $f(t), f'(t), \ldots$, die wir ausdrücklich zulassen wollen. An diesen Stellen müssen wir zwischen links und rechtsseitigen Differentialquotienten unterscheiden. Im übrigen seien die $f_i(t)$ für alle endlichen t endlich. Für die Elektrotechnik kommen besonders solche Störungsfunktionen in Frage, die für $t \leqq t_0$ Null sind und bei $t = t_0$ im allgemeinen einen endlichen Sprung aufweisen. Wir wollen eine solche Funktion eine „*Stoßfunktion*" nennen und mit $S_{t_0}(t)$ bezeichnen. Hat man es nämlich mit einem Stromnetz zu tun, dessen m Maschen, von denen jede aus ohmischen, induktiven und kapazitiven Elementen aufgebaut ist, ohmisch, induktiv und kapazitiv gekoppelt sind und wird zurzeit $t = t_k$ die elektromotorische Kraft $S_{t_k}(t)$ an die k-te Masche angelegt, so erhält man für die Funktionen $x_k(t) = \int J_k(t)\, dt$, wo $J_k(t)$ den Strom in der k-ten Masche bedeutet, das Gleichungssystem:

$$\sum_{i,k} G_{ik}(D)\, x_k(t) = S_{t_k}(t). \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m) \tag{3}$$

In diesem besonderen Falle sind alle $G_{ik}(D)$ von nicht höherem als zweitem Grade.

Ist $x_{ki}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ die Lösung der Gleichung

$$\Delta(D)\, x(t) = \Delta_{ik}(D)\, f_i(t),$$

so wird die Lösung von (2) wegen $\Delta(D) \sum_{i=1}^{m} x_{ki}(t) = \sum_{i=1}^{m} \Delta(D)\, x_{ki}(t)$ durch die Summe

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} x_{ki}(t)$$

gegeben. Es handelt sich also schließlich darum, eine Gleichung der

Gestalt
$$\Phi(D)\,x(t) = \Psi(D)\,f(t) \tag{4}$$
aufzulösen, wobei $f(t)$ eine gegebene, den erwähnten Bedingungen genügende Störungsfunktion und $\Phi(D)$, $\Psi(D)$ gegebene ganze rationale Funktionen von D mit konstanten Koeffizienten sind. Im nächsten Abschnitt wollen wir nun durch Verallgemeinerung des Ansatzes von Gauster[7]) die gebrochenen rationalen Operationen mit D definieren.

II.

Der Operator mit dem Zeichen D^{-1} oder $\frac{1}{D}$ genüge jedenfalls der Beziehung $\{DD^{-1}\,f(t)\} = f(t)$, woraus sich $D^{-1} f(t) = \int f(t)\,dt$ ergibt. Um Eindeutigkeit der Operation D^{-1} zu erlangen, definieren wir mit Gauster
$$D^{-1} f(t) = \int_0^t f(u)\,du.$$
Dann wird für jede natürliche Zahl n
$$D^{-n} f(t) = (n) \int_0^t f(u)\,du,$$
wo die vorgesetzte Klammer (n) andeuten soll, dass n-mal von o bis t zu integrieren ist. Die Operationen D, D^{-1}, allgemein D^n, D^{-n} sind dann nicht vertauschbar, denn es wird:
$$D^{-1} Df(t) = \int_0^t f'(u)\,du = f(t) - f(o); \tag{5}$$
allgemein:
$$D^{-n}D^n f(t) = f(t) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(\nu)}(o)\frac{t^\nu}{\nu!}. \tag{6}$$
Dabei bedeutet $f^{(\nu)}(t)$ die ν-te Ableitung von $f(t)$ nach t.

Der Erklärung des Operators $(D - a)^{-1}$ schicken wir eine Rechenregel, den „Verschiebungssatz" (Heaviside) voraus; es gilt nämlich:
$$(D - a)\,f(t) = e^{at}\,D\,e^{-at}\,f(t). \tag{7}$$
Durch wiederholte Anwendung erhält man allgemein für jede natürliche Zahl n:
$$(D - a)^n\,f(t) = e^{at}\,D^n\,e^{-at}\,f(t). \tag{8}$$

[7]) Vergleiche Fußnote 5.

Für $(D-a)^{-1}$ fordern wir nun jedenfalls die Beziehung

$$(D-a)\left\{(D-a)^{-1} f(t)\right\} = f(t),$$

woraus sich nach Anwendung von (7)

$$(D-a)^{-1} f(t) = e^{at} \int e^{-at} f(t)\, dt$$

ergibt. Wieder erreichen wir die Eindeutigkeit durch Definition der Integrationskonstanten, es sei:

$$(D-a)^{-1} f(t) = e^{at} \int_0^t e^{-au} f(u)\, du = e^{at} D^{-1} e^{-at} f(t). \tag{9}$$

Nach dieser Definition und (7), (5) wird

$$(D-a)^{-1}(D-a) f(t) = f(t) - f(o)\, e^{at}. \tag{10}$$

Für $a = o$ ergibt sich wieder (5), wie es sein muß. Durch wiederholte Anwendung von (9) erhält man für jede natürliche Zahl n:

$$(D-a)^{-n} f(t) = e^{at} D^{-n} e^{-at} f(t). \tag{11}$$

Für $f(t) = 1$ bekommen wir:

$$(D-a)^{-1} 1 = \frac{1}{a}(e^{at} - 1) \qquad (a \mp o)$$

und nun mit (11) allgemein:

$$(D-a)^{-n}\, 1 = (-1)^n \left\{ \frac{1}{a^n} - e^{at} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{a^{n-\nu}} \cdot \frac{t^\nu}{\nu\,!} \right\} \quad (a \mp o) \tag{12}$$

Für $a = o$ wird:

$$D^{-n}\, 1 = \frac{t^n}{n!}. \tag{12'}$$

Haben wir es mit zwei Operatoren $(D-a)^{-1}$, $(D-b)^{-1}$ zu tun, so ergeben die bisherigen Definitionen:

$$(D-a)^{-1}\left\{(D-b)^{-1} f(t)\right\} = e^{at} \int_0^t e^{(b-a)v} \int_0^v e^{-bu} f(u)\, du\, dv,$$

oder nach teilweiser Integration:

$$\frac{1}{b-a}\left[e^{bt}\int_0^t e^{-bu} f(u)\,du - e^{at}\int_0^t e^{-au} f(u)\,du\right],$$

also:

$$(D-a)^{-1}\{(D-b)^{-1} f(t)\} = \frac{1}{b-a}[(D-b)^{-1}-(D-a)^{-1}]\, f(t) \tag{13}$$

und ebenso:

$$(D-b)^{-1}\{(D-a)^{-1} f(t)\} = \frac{1}{a-b}[(D-a)^{-1}-(D-b)^{-1}]\, f(t). \tag{13'}$$

Da die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen identisch sind, sind demnach die Operatoren $(D-a)^{-1}$, $(D-b)^{-1}$ miteinander vertauschbar und wir dürfen

$$(D-a)^{-1}(D-b)^{-1} f(t) = (D-b)^{-1}(D-a)^{-1} f(t)$$

schreiben. Durch wiederholte Anwendung folgt jetzt allgemein, daß in einem Produkt aus Faktoren der Gestalt $(D-a)^{-1}$ die Reihenfolge derselben beliebig gewählt werden kann. Diese Tatsache erlaubt uns, den Operator $\prod_{k=1}^{n} (D-a_k)^{-1}$ auch in der Form $\left\{\prod_{k=1}^{n}(D-a_k)\right\}^{-1}$ zu schreiben.

Die zunächst rein formale Identität

$$\{(D-a)(D-b)\}^{-1} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{D-a}-\frac{1}{D-b}\right]$$

gilt nach (13) auch in der erweiterten Bedeutung für Operatoren.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob sich für das reziproke Produkt mehrerer Faktoren $D-a$ eine ähnliche Zerlegung durchführen läßt. Es sei

$$\Phi(D) = \prod_{k=1}^{n} (D-a_k)^{n_k},$$

wobei die n_k natürliche Zahlen und die a_k untereinander verschieden seien. Rein formal läßt sich dann $\Phi(D)^{-1}$ eindeutig in Teilbrüche zerlegen:

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \sum_{k,h} \frac{A_{kh}}{(D-a_k)^h}. \qquad \begin{array}{l} h = 1,2,\ldots n_k \\ k = 1,2,\ldots n \end{array} \tag{14}$$

Die Konstanten A_{kh} für $h = n_1, n_2, \ldots n_n$ sind dann bekanntlich von Null verschieden, während gewisse der übrigen auch verschwinden können. Wird zur Abkürzung

$$\frac{\Phi(D)}{(D-a_k)^h} = \Phi_{kh}(D) \tag{15}$$

gesetzt, so wird nach Multiplikation von (14) mit $\Phi(D)$:

$$1 = \sum_{kh} A_{kh}\, \Phi_{kh}(D). \tag{16}$$

Die Konstanten A_{kh} können nach der Formel[8])

$$A_{kh} = \frac{1}{(n_k-h)!} \left\{ \Phi_{kn_k}^{(n_k-h)}(a_k) \right\}^{-1} \tag{17}$$

berechnet werden, wobei rechts die $(n_k - h)$-te Ableitung von $\Phi_{kn_k}(D)$ nach D gemeint ist.

Die formale Identität (16) gilt, da nur ganze rationale Operationen auftreten, auch in erweiterter Bedeutung für Operatoren. Wenden wir den so dargestellten Operator 1 auf die wohldefinierte Funktion $\frac{1}{\Phi(D)} f(t)$ an, so ergibt sich

$$\frac{1}{\Phi(D)} f(t) = \sum_{k,h} A_{kh}\, \Phi_{kh}(D) \frac{1}{\Phi(D)} f(t);$$

oder wegen $(D - a)(D - a)^{-1} = 1$ und der erlaubten beliebigen Wahl der Reihenfolge der Faktoren in Φ_{kh} wie in $\frac{1}{\Phi}$:

$$\frac{1}{\Phi(D)} f(t) = \sum_{k,h} A_{kh} \frac{1}{(D-a_k)^h} f(t) = \sum_{k,h} A_{kh}\, e^{a_k t} D^{-h} e^{-a_k t} f(t). \tag{18}$$

Die formal gültige Teilbruchzerlegung (14) ist also auch für Operatoren richtig. Hat $\Phi(D)$ nur einfache Nullstellen, so wird $n_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ und

$$A_{k1} = \{\Phi_{k1}(a_k)\}^{-1} = \{\Phi'(a_k)\}^{-1} \tag{19}$$

und (18) vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{\Phi(D)} f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Phi'(a_k)} \int_0^t e^{a_k(t-u)} f(u)\, du \tag{20}$$

---

[8]) Zum Beweis s. z. B. in *Serret-Scheffers:* Lehrb. d. Diff.- u. Int.-Rechn. 8. Aufl., Bd. 1, S. 612.

Jetzt wollen wir schließlich zwei Operatoren der Gestalt $\Psi(D)$ und $\{\Phi(D)\}^{-1}$ hintereinander anwenden. Es sei

$$\Phi(D) = \prod_{k=1}^{n} (D - a_k)^{n_k} \quad , \quad \Psi(D) = \prod_{l=1}^{m} (D - b_l)^{m_l} \quad , \tag{21}$$

wobei die n_k, m_l beliebige natürliche Zahlen und alle a_k, b_l untereinander verschieden seien. Die Reihenfolge der Faktoren sowohl in $\Phi(D)$ wie in $\{\Phi(D)\}^{-1}$ darf beliebig gewählt werden, hingegen ist zwischen

$$\Psi(D)\{\Phi(D)\}^{-1} \text{ und } \{\Phi(D)\}^{-1}\Psi(D)$$

wohl zu unterscheiden. Für den ersten Fall läßt sich leicht eine zu (18) analoge Darstellung geben. Zunächst kann man bekanntlich $\Psi(D)\ \{\Phi(D)\}^{-1}$ rein formal eindeutig in der Form

$$\Psi(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} = G(D) + \sum_{k,h} \frac{C_{kh}}{(D - a_k)^h} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots n_k; \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{22}$$

schreiben. Dabei ist $G(D)$ die ganze rationale Funktion, die sich beim Dividieren von $\Psi(D)$ durch $\Phi(D)$ ergibt und C_{kh} sind Konstante. Mit der in (15) erklärten Bezeichnung erhält man durch Multiplikation von (22) mit $\Phi(D)$ die formale Identität:

$$\Psi(D) = G(D)\ \Phi(D) + \sum_{k,h} C_{kh}\ \Phi_{kh}(D). \tag{23}$$

Als Beziehung zwischen ganzen rationalen Funktionen ist sie auch für Operatoren richtig. Wenden wir den so dargestellten Operator $\Psi(D)$ auf die Funktion $\frac{1}{\Phi(D)} f(t)$ an und beachten die früher entwickelten Rechenregeln, so ergibt sich:

$$\Psi(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} f(t) = G(D)\ \Phi(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} f(t) + \sum_{k,h} C_{kh}\ \Phi_{kh}(D) \frac{1}{\Phi(D)} f(t)$$

$$= G(D)\, f(t) + \sum_{k,h} \frac{C_{kh}}{(D - a_k)^h}\ f(t)$$

$$= G(D)\, f(t) + \sum_{k,h} C_{kh}\, e^{a_k t}\, D^{-h}\, e^{-a_k t}\, f(t). \tag{24}$$

Die Koeffizienten C_{kh} können folgendermaßen berechnet werden: Setzt man

$$\Psi(D) \frac{(D-a_k)^{n_k}}{\Phi(D)} = F_k(D) \qquad (k = 1, 2, \dots n) \tag{25}$$

so wird[9]):

$$C_{kh} = \frac{1}{(n_k-h)!} F_k^{(n_k-h)}(a_k). \tag{26}$$

Insbesondere sind die Zahlen C_{kh} für $h = n_k$ $(k = 1, 2, \dots n)$ alle von Null verschieden.

III.

Vertauschungssatz. Für den Operator $\frac{1}{\Phi(D)} \Psi(D)$ läßt sich nicht ohne weiteres eine explizite Darstellung geben wie (24) für $\Psi(D)\frac{1}{\Phi(D)}$. Aber insbesondere wird uns der Zusammenhang zwischen den Ausdrücken

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Phi(D)} \cdot \Phi(D) f(t) \text{ und } \Phi(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} f(t) = f(t)$$

ohne weiteres die gewünschte Form der Lösung unserer Differentialgleichung (4) geben. Wenn wir den in die Gestalt (14) gesetzten Operator $\frac{1}{\Phi(D)}$ auf die Funktion $\Phi(D) f(t)$ anwenden und die entsprechenden Rechenregeln beachten, so ergibt sich:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Phi(D)} \cdot \Phi(D) f(t) = \sum_{k,h} \frac{A_{kh}}{(D-a_k)^h} \Phi(D) f(t)$$

$$= \sum_{k,h} A_{kh} (D-a_k)^{-h} (D-a_k)^h \Phi_{kh}(D) f(t)$$

$$= \sum_{k,h} A_{kh} e^{a_k t} D^{-h} D^h e^{-a_k t} \Phi_{kh}(D) f(t). \tag{27}$$

Mit Hilfe der Formel (6), in der an Stelle von n bezw. $f(t)$ jetzt h bezw.

$$e^{-a_k t} \Phi_{kh}(D) f(t) = \varphi_{kh}(t)$$

zu setzen ist, ergibt sich:

[9]) Vergleiche Fußnote 8.

$$e^{a_k t} D^{-h} D^h e^{-a_k t} \Phi_{kh}(D) f(t) = \Phi_{kh}(D) f(t) - e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} \varphi_{kh}^{(\nu)}(o) \frac{t^\nu}{\nu!}. \qquad (28)$$

Die Koeffizienten $\varphi_{kh}^{(\nu)}(o)$ der ganzen rationalen Funktion $(h-1)$-ten Grades rechts lassen sich noch übersichtlicher darstellen. Es wird nämlich nach (8) und (15) für $\nu < h$:

$$D^\nu \varphi_{kh}(t) = D^\nu e^{-a_k t} \Phi_{kh}(D) f(t) = e^{-a_k t} (D - a_k)^\nu \Phi_{kh}(D) f(t)$$

$$= e^{-a_k t} \Phi_{h(h-\nu)}(D) f(t).$$

Also

$$\varphi_{kh}^{(\nu)}(o) = [\, \Phi_{k(h-\nu)}(D) f(t) \,]_{t=o}\,. \qquad (29)$$

Setzen wir nun (28) in (27) ein, so ergibt sich:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Phi(D)} \Phi(D) f(t) = \sum_{k,h} \left\{ A_{kh} \Phi_{kh} f(t) - A_{kh} e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} [\Phi_{k(h-\nu)} f(t)]_{t=o} \frac{t^\nu}{\nu!} \right\}$$

Dabei wurden die Argumente D weggelassen. Wegen (16) erhalten wir so schließlich den Vertauschungssatz:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Phi(D)} \Phi(D) f(t) = f(t) - \sum_{k,h} A_{kh} e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} [\Phi_{k(h-\nu)} f(t)]_{t=o} \frac{t^\nu}{\nu!} \,. \qquad (30)$$

$$(h = 1, 2, \ldots n_k\,; \quad k = 1, 2, \ldots n)$$

Seine Gültigkeit ist an die Bedingung geknüpft, daß $f(t)$ bei $t = o$ genügend oft differenzierbar ist. Verhält sich die Funktion $f(t)$ oder eine ihrer Ableitungen $f'(t), \ldots$ bei $t = 0$ unstetig, aber so, daß die Grenzwerte $f(+0)$, $f(-0)$ oder $f'(+0)$, $f'(-0), \ldots$ existieren, so läßt sich die Formel (30) so fassen, daß für alle positiven t in den Klammerausdrücken $[\ldots]$ auf der rechten Seite $f(+0)$, $f'(+0)$ usw., hingegen für alle negativen t entsprechend $f(-0)$, $f'(-0)$ usw. zu nehmen ist. Bei der praktischen Berechnung von $\bar{f}(t)$ aus gegebenem $f(t)$ und $\Phi(D)$ besteht natürlich die Hauptarbeit in der Bestimmung der Nullstellen a_k. Durch aufeinanderfolgende Divisionen von $\Phi(D)$ durch $D - a_k$ erhält man dann $\Phi_{kh}(D)$ $(h = 1, 2, \ldots n_k)$, woraus sich schließlich die Zahlen A_{kh} und die Koeffizienten der auftretenden ganzen rationalen Funktionen von t ergeben.

IV.

Anwendung des Kalküls. Die im folgenden auftretenden Funktionen $\Phi(D)$, $\Psi(D)$ seien immer durch (21) definiert und sollen den dort erwähnten Voraussetzungen genügen. Zunächst betrachten wir die homogene Gleichung

$$\Phi(D)\,x(t) = 0. \tag{31}$$

Die allgemeine Lösung werde mit $x^*(t)$ bezeichnet. Dann wird:

$$\overline{x^*}(t) = \frac{1}{\Phi(D)}\Phi(D)\,x^*(t) = \frac{1}{\Phi(D)}\,0 = 0.$$

Aus (30) ergibt sich daraus sofort:

$$x^*(t) = \sum_{k,h} A_{kh}\, e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} \left[\Phi_{k\,(h-\nu)}\, x^*(t)\right]_{t=0} \cdot \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \tag{32}$$

Damit ist die allgemeine Lösung von (31) direkt konstruiert. In der eckigen Klammer stecken die als gegeben gedachten Anfangswerte $x^*(0)$, $x^{*\prime}(0)$, ... Ist $g = \sum_k^n n_k$ der Grad von $\Phi(D)$, so haben die ganzen rationalen Funktionen $\Phi_{k\,(h-\nu)}^{\,1}(D)$ den Grad $g - h + \nu$, also ist der höchst vorkommende für $\nu = h - 1$ gleich $g - 1$. Da alle A_{kn_k} von Null verschieden sind, treten demnach rechts die Konstanten $x^{*(\mu)}(0)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, g - 1$) auf. Im Falle lauter verschiedener Nullstellen a_k vereinfacht sich nach (19) die Lösung auf

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Phi'(a_k)} \left[\Phi_{k1}\, x^*(t)\right]_{t=0} e^{a_k t}\,. \tag{33}$$

Nun sei die Differentialgleichung

$$\Phi(D)\,x(t) = \Psi(D)\,f(t) \tag{34}$$

vorgelegt. Wieder werden wir die allgemeine Lösung $x(t)$ direkt konstruieren. Wir bilden zunächst die Funktionen:

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{\Psi(D)}\Psi(D)\,f(t) = f(t) - f^*(t);$$

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{\Phi(D)}\Phi(D)\,x(t) = x(t) - x^*(t).$$

$x^*(t)$ ist nach dem Vorhergehenden die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Phi(D)\,x(t) = 0$, während $f^*(t)$ durch $f(t)$ vollständig bestimmt ist.

Üben wir auf $\bar{f}(t)$ den Operator $\Psi\frac{1}{\Phi}$ aus, so ergibt sich unter Beachtung der im Abschnitt II erhaltenen Rechenregeln [10]:

$$\Psi\frac{1}{\Phi}\bar{f}(t) = \Psi\frac{1}{\Phi}\,\frac{1}{\Psi}\cdot\Psi f(t) = \Psi\cdot\,\frac{1}{\Psi}\,\frac{1}{\Phi}\,\Phi\,x(t) = \bar{x}(t).$$

Es gilt also:

$$\bar{x}(t) = \Psi(D)\cdot\frac{1}{\Phi(D)}\bar{f}(t).$$

Die rechte Seite können wir aber nach (24) durch Teilbruchzerlegung in folgender Form schreiben:

$$\bar{x}(t) = G(D)\,\bar{f}(t) + \sum_{k,h} C_{kh}\,e^{a_k t}\,D^{-h}\,e^{-a_k t}\overline{f(t)} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots n_k; \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{35}$$

Die allgemeine Lösung von (34) wird also gegeben durch:

$$x(t) = x^*(t) + G(D)\,\{f(t) - f^*(t)\} + \sum_{k,h} C_{k\bar{h}}\,(h)\int_0^t e^{a_k(t-u)}\,\{f(u) - f^*(u)\}\,du \tag{36}$$

mit

$$x^*(t) = \sum_{k,h} A_{kh}\,e^{a_k t}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left[\Phi_{k(h-\nu)}\,x(t)\right]_{t=0}\frac{t^\nu}{\nu!},$$

$$f^*(t) = \sum_{l,s} B_{ls}\,e^{b_l t}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left[\Psi_{l(s-\nu)}\,f(t)\right]_{t=0}\frac{t^\nu}{\nu!}. \tag{37}$$

Dabei haben B_{ls} und $\Psi_{l(s-\nu)}(D)$ für $\Psi(D)$ dieselbe Bedeutung wie A_{kh} und $\Phi_{k(h-\nu)}(D)$ für $\Phi(D)$. Die vorgesetzte Klammer (h) soll andeuten, daß h-mal von 0 bis t zu integrieren ist. Damit die geforderten Operationen alle ausführbar sind, müssen wir voraussetzen, daß $f(t)$ bei $t = 0$ genügend oft differenzierbar ist. Im übrigen schaden isolierte Sprungstellen von $f(t)$, $f'(t)$, nichts, da dies für die in der Summe in (36) auftretenden einfachen und mehrfachen Integrationen nicht hinderlich ist; nur müssen wir dann an diesen Stellen zwischen links- und rechts-

[10]) In dieser Art behandelt W. Gauster (s. Fußnote 5) den besonderen Fall einfacher Nullstellen.

seitigen Ableitungen von $f(t)$ und $x(t)$ unterscheiden. Die Forderung, daß $f(t)$ für alle endlichen t endlich ist, läßt sich dahin einschränken, daß die in (36) auftretenden Integrale existieren. Auf der rechten Seite von (36) treten außer den als gegeben gedachten Anfangswerten $x(0)$, $x'(0)$, usw. in $x^*(t)$ keine unbestimmten Konstanten auf.

Wir wollen nun noch einige Spezialfälle betrachten. Wünschen wir die *Hauptlösung* von (34), d. h. die Lösung mit den Anfangswerten

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(g-1)}(0) = 0$$

so brauchen wir nur in (36) das Glied $x^*(t)$ zu streichen, da in diesem Falle $x^*(t)$ identisch Null wird. Für die Gleichung

$$\Phi(D)\, x(t) = f(t) \tag{38}$$

wird also die Hauptlösung[11]) gegeben durch:

$$x(t) = \sum_{k,h} A_{kh}(h) \int_0^t e^{a_k(t-u)} f(u)\, du. \tag{39}$$

da für $\Psi(D) = 1$ dann $G(D) = 0$ (wenn $\Phi(D)$ nicht konstant ist) und $f^*(t) \equiv 0$ wird.

Ist die Störungsfunktion $f(t)$ in (34) eine „*Stoßfunktion*" $S_\varepsilon(t)$, also

$$S_\varepsilon(t) = 0 \text{ für } t \leqq \varepsilon$$

wobei $\varepsilon > 0$ sei, so gilt auch für sie die Lösung (36). In diesem Falle wird $f^*(t) = S_\varepsilon^*(t) = 0$, da dann $S_\varepsilon(t)$ und alle ihre Ableitungen für $t = 0$ verschwinden und demnach auch alle Koeffizienten

$$[\Psi_{l(s-\nu)}(D)\, S_\varepsilon(t)]_{t=0}$$

in (37) Null werden. Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\Phi(D)\, x(t) = \Psi(D)\, S_\varepsilon(t) \qquad \varepsilon > 0$$

lautet also:

$$x(t) = x^*(t) + G(D)\, S_\varepsilon(t) + \sum_{k,h} C_{kh}\, e^{a_k t} D^{-h} e^{a_k t} S_\varepsilon(t).$$

[11]) *W. Gauster* (vergleiche Fußnote 5) beweist dies für den Fall einfacher Nullstellen durch Differentiation und Anwendung gewisser Formeln für die A_{kl}, was aber gerade durch seine Methode überflüssig wird.

Dafür können wir auch schreiben:

$$x(t) = x^*(t) + G(D)\,S_\varepsilon(t) + \sum_{k,h} C_{kh}(h) \int_\varepsilon^t e^{a_k(t-u)}\, S_\varepsilon(u)\,du. \tag{40}$$

Da die Summe rechts wegen der vorausgesetzten Endlichkeit von $S_\varepsilon(t)$ eine stetige Funktion von ε darstellt, dürfen wir den Grenzübergang *lim* $\varepsilon = 0$ vornehmen. Die Gleichung (40) ist also auch für $\varepsilon = 0$ gültig, womit auch der vorher ausgeschlossene Fall erledigt ist. Nur ist hier wohl zu beachten, daß an der Stelle $t = 0$ die Lösung $x(t)$ und ihre Ableitungen im allgemeinen Sprungstellen aufweisen werden. Denkt man sich die Zahlen $x^{(\mu)}(0)$ gegeben, so wird wohl für pos. η:

$$\lim_{\eta \to 0} x^{(\mu)}(-\eta) = x^{(\mu)}(0)\,; \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, g-1)$$

hingegen:

$$\lim_{\eta \to 0} x^{(\mu)}(\eta) = x^{(\mu)}(0) + \lim_{\eta \to 0} H^{(\mu)}(\eta),$$

wobei $H(t)$ die von $x^*(t)$ befreite rechte Seite von (40) mit $\varepsilon = 0$ bedeutet. Man darf also hier die gegebenen Zahlen $x^{(\mu)}(0)$ nicht einfach die gegebenen Anfangswerte, sondern genauer etwa die „linksseitigen Anfangswerte" der Lösung $x(t)$ nennen. Der praktisch wichtigste Fall fordert von der Lösung $x(t)$, daß sie für alle negativen t verschwindet. In diesem Falle wird:

$$\lim_{\eta \to 0} x^{(\mu)}(-\eta) = 0;$$

d. h. es muß $x^*(t)$ identisch Null sein. Daraus folgt der für die Elektrotechnik (Anlegen einer elektromotorischen Kraft $S(t)$ an einen zunächst stromlos gedachten Stromkreis) fundamentale Satz:

Unter der Schaltbedingung, das heißt

$$x(t) = 0, \qquad S(t) = 0 \qquad \text{für } t \leqq 0$$

wird die Lösung der Gleichung

$$\Phi(D)\,x(t) = \Psi(D)\,S(t) \tag{41}$$

gegeben durch

$$x(t) = G(D)\,S(t) + \sum_{k,h} C_{kh} \cdot (h) \int_0^t e^{a_k(t-u)}\, S(u)\,du \tag{42}$$

Ist dabei $\Psi(D)$ von niedrigerem Grade als $\Phi(D)$, so wird $G(D) \equiv 0$ und in diesem Falle verschwindet $x(t)$ bei $t = 0$.

Arbeitet man also unter der Schaltbedingung, so kann man die Lösung von (41) einfach in der symbolischen Form

$$x(t) = \frac{\Psi(D)}{\Phi(D)} S(t)$$

hinschreiben und auswerten (mit unterer Integrationsgrenze Null), wobei die Integrationskonstanten automatisch richtig bestimmt werden, dies ist der allgemeine Fall vom „Heaviside-Kalkül"[12]).

Wir wollen die Lösung noch für den besonderen Fall angeben, daß $G(D) = 0$ und $S(t)$ gleich dem „*Einheitsstoß*" $E(t)$ ist:

$$E(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t \leqq 0. \end{cases}$$

Nach (12), (12′) ist:

$$(D - a)^{-h} E(t) = (-1)^h \left\{ \frac{1}{a^h} - e^{at} \sum_{\nu=0}^{h-1} \frac{(-1)^\nu}{a^{n-\nu}} \cdot \frac{t^\nu}{\nu!} \right\} E(t); \qquad (a \neq o)$$

$$D^{-h} E(t) = \frac{t^h}{h!} E(t). \tag{43}$$

Also nach (42):

$$x(t) = \sum_{k,h} C_{kh} (-1)^h \left[\frac{1}{a_k^h} - e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} \frac{(-1)^\nu t^\nu}{a_k^{h-\nu} \cdot \nu!} \right] E(t)$$

Das von Faktoren $e^{a_k t}$ freie Glied wird:

$$\sum_{k,h} C_{kh} \frac{(-1)^h}{a_k^h} E(t) = \frac{\Psi(o)}{\Phi(o)} E(t);$$

dies folgt aus (22) für $D = 0$. Also schließlich:

$$x(t) = \left\{ \frac{\Psi(o)}{\Phi(o)} - \sum_{k,h} (-1)^h C_{kh} e^{a_k t} \sum_{\nu=0}^{h-1} \frac{(-1)^\nu}{a_k^{h-\nu}} \cdot \frac{t^\nu}{\nu!} \right\} E(t). \quad (a_k \neq o) \tag{44}$$

[12]) S. auch die Überlegung von *L. Casper* in der Anmerkung[2]) zitierten Arbeit.

Ist eine der Nullstellen a_k gleich Null, so muß die innere Summe für das betreffende k durch (43) ersetzt werden. Im Falle lauter einfacher Nullstellen stellt (44) die sog. *Heaviside'sche Formel*

$$x(t) = \left\{ \frac{\Psi(o)}{\Phi(o)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi(a_k)}{a_k \Phi'(a_k)} e^{a_k t} \right\} E(t) \qquad (a_k \neq 0)$$

dar. Für den Fall, daß alle Nullstellen a_k negative Realteile haben, wurde (44) mit Hilfe einer Integraldarstellung des diskontinuierlichen Faktors $E(t)$ von K. W. Wagner (vergl. Fußnote 1) bewiesen, es ist die sogenannte Heaviside-Wagner'sche Formel. Allgemein zeigt K. Th. Vahlen in der oben[13]) erwähnten Arbeit, daß (44) — vom Faktor $E(t)$ befreit — ein partikuläres Integral der Gleichung (34) mit $f(t) = 1$ ist. Es wird aber nicht bewiesen, daß diese Lösung allein durch die Bedingungen

$$x^{(\mu)}(-0) = 0\,,\ f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon(t) \text{ mit } E_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t > \varepsilon > 0 \\ 0 \quad ,, \quad t \leqq \varepsilon \end{cases} \qquad (45)$$

vollständig bestimmt ist. Der wesentliche Punkt liegt aber gerade darin, die Lösung unter der Schaltbedingung zu finden. Die Annahmen (45) sind wohl zu unterscheiden von den Bedingungen

$$x^{(\mu)}(o) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, g-1),\ f(t) = 1,$$

welche natürlich ein anderes Ergebnis liefern, auch wenn man dieses noch mit dem Faktor $E(t)$ versieht.

Weitere Angaben über die diesbezügliche Literatur findet man im Buche von J. R. Carson (s. Anm. 3).

(Eingegangen den 17. Mai 1934.)

---

[13]) S. 294, Abschnitt XIV der in Anmerkung 6 zit. Arbeit.