Über ein Problem von Herrn Speiser.

Über ein Problem von Herrn Speiser

Von Egon Ullrich in Marburg

Jede einfachzusammenhängende, unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche läßt sich bekanntlich schlicht und konform entweder in den Einheitskreis $|z| < 1$ oder in die punktierte Ebene $|z| < \infty$ abbilden; jenachdem bezeichnet man sie als vom hyperbolischen oder vom parabolischen Typus. Speziell hat Herr Speiser jene Flächen untersucht[1]), welche über allen Stellen $\neq a_1, a_2, a_3$ nur schlichte Blätter haben, während über diesen Stellen selbst auch logarithmische Windungspunkte gestattet (aber nicht für alle Blätter vorgeschrieben) sind. Diese Flächenklasse leistet für eine Orientierung über das Typenproblem zweifellos nützliche Dienste.

Herr Speiser stellt solche Flächen übersichtlicher durch topologische Bäume dar, die (den Blättern der Fläche entsprechend) mit Knotenpunkten besetzt sind; ein beliebiger von diesen wird als nullte Generation, seine Nachbarn als erste Generation, die nächsten Nachbarn als zweite Generation bezeichnet usf. Unter einer Endfolge wird dann ein beliebiger Weg durch den Baum, vom Anfangspunkt (nullte Generation) ausgehend durch immer höhere Generationen in infinitum verstanden.

Im Anschluß daran äußerte Herr Speiser die Vermutung: die Riemannsche Fläche sei stets dann vom hyperbolischen Typus, wenn die Endfolgenmenge die Mächtigkeit des Kontinuums habe, dagegen vom parabolischen Typus, wenn diese Menge abzählbar oder endlich sei.

Etwas später hat Herr Rolf Nevanlinna diese Flächenklasse betrachtet[2]): Die Knotenpunkte sind im Sinne der Kurventheorie entweder Punkte zweiter Ordnung (gewöhnliche Punkte des Baumes) oder dritter Ordnung (Verzweigungsknoten); sei $\sigma(n)$ die Anzahl der Verzweigungsknoten in den ersten n Generationen. Dann zeigte Nevanlinna: Die Fläche ist jedenfalls dann von parabolischem Typus, wenn die Reihe

$$\sum \frac{1}{n\,\sigma(n)}$$

divergiert, insbesondere also, wenn nur endlich viele Endfolgen (also auch: Verzweigungsknoten) vorhanden sind. Damit ist ein Teil der obigen Vermutung bestätigt.

---

[1]) *A. Speiser,* Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen. Comment. math. helv. 1 (1929), S. 310 f. und: Über Riemannsche Flächen. Ebenda 2 (1930), S. 284 f. bes. S. 288.

[2]) *R. Nevanlinna,* Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen. Comment. math. helv. 5 (1933), S. 95 f.

Man kann aber aus demselben Satze unschwer folgern, daß der erste Teil der Speiserschen Vermutung nicht zutrifft, daß es vielmehr Flächen mit kontinuierlich vielen Endfolgen gibt, die gleichwohl parabolischen Typus sind. Man sieht sogar, daß Flächen, deren Baum genau ebensoviele Endfolgen zeigt, wie der Modulbaum (Baum zur Fläche der Modulfunktion) parabolisch sein können. Da Herr Nevanlinna auf diese Folgerung seines Satzes nicht hingewiesen hat, mag es hier geschehen, obschon das Ergebnis leicht zu finden ist[1]).

Legen wir eine einfache Kurve (Kreis) K durch a_1, a_2, a_3 und wählen beiderseits davon je einen Punkt p, q; verbinden wir diese Punkte durch je einen Bogen über die drei Teilbögen zwischen a_1, a_2, a_3 hinweg, und denken dieses Liniensystem auf alle Blätter der Riemannschen Fläche projiziert, auf der so ein Liniensystem L entsteht. Wäre nun irgend einer der Punkte a_j in einem gewissen Blatte kein Windungspunkt, sondern ein schlichter Punkt, so wäre L in der Umgebung dieses Punktes geschlossen; wir vereinbaren daher:

Unter den Bögen pq von L sollen diejenigen gelöscht werden, welche bei einem Umlauf $a_1\, a_2\, a_3\, a_1$ längs K unmittelbar auf eine gewöhnliche Stelle der Fläche über a_j folgen.

Dadurch wird aus L ein Baum B herausgehoben, auf dem wir aber alle Stellen über p und q markiert denken wollen; jede solche Marke vertritt dann ein Halbblatt, entweder das Innere, oder das Äußere der Kurve K.

Bildet man nun die Riemannsche Fläche schlicht und konform durch eine Funktion $z = z\,(w)$ in einen (endlichen oder unendlichen) Kreis ab, so wird zugleich der Baum B in die z-Ebene übertragen; doch sind entgegen den Gepflogenheiten der Topologen auch alle Stellen z_p und z_q markiert, (wo der Baum einen Trieb knospen lassen könnte – ohne daß dies bei allen diesen Knotenpunkten wirklich der Fall sein muß) und wo die Umkehrfunktion $w = f\,(z)$ bezw. die Werte p oder q annimmt.

Man bemerke nun den Unterschied zwischen der Vermutung von Herrn Speiser und dem Satze von Herrn Nevanlinna: Die Vermutung beruft sich allein auf die topologische Struktur des Baumes, und auf eine Eigenschaft, die von der Verteilung der Knotenpunkte zweiter Ordnung in bezug auf die dritter Ordnung gar nicht abhängt. Der Satz dagegen zeigt gerade, daß diese Verteilung quantitativ berücksichtigt werden muß!

Die Unterdrückung von Knotenpunkten zweiter Ordnung würde die Funktion $\sigma\,(n)$ rascher wachsen machen und so der Divergenz der Reihe (1) entgegenwirken; die Hinzufügung von Knotenpunkten zweiter Ordnung, die zwischen solche von dritter Ordnung eingeschoben werden,

[1]) Wie ich erfahre, hat auch Herr Ahlfors diese Bemerkung gemacht.

aber würde $\sigma(n)$ zu einer langsamer wachsenden Funktion machen und wenn sie ausgiebig genug geschieht, aus einer konvergenten eine divergente Reihe machen.

Zeigen wir, vom Modulbaum ausgehend, an Hand einer einfachen Vorschrift, wie dies geschehen kann. Im Modulbaum ist jeder Knotenpunkt von dritter Ordnung; denken wir diesen Baum abgeändert wie folgt: Es sollen so viele Knotenpunkte zweiter Ordnung eingeschoben werden, daß die Reihe divergent wird, die Abänderungen aber keine der Endfolgen des Modulbaumes fortnehmen. Es genügt dazu etwa

$$\sigma(n) = [\log n]$$

zu nehmen, wo rechts das größte Ganze des Logarithmus gemeint ist; denn es gilt ja

$$\sum \frac{1}{n \log n} \ll \sum \frac{1}{n\,[\log n]} \equiv \sum \frac{1}{n\,\sigma(n)}\,,$$

so daß die Reihe (1) divergiert.

Wir wollen den abgeänderten Baum in der *t-Ebene* zeichnen, derart, daß alle Punkte der n-ten Generation auf dem Kreis $|t| = n$ liegen[1]). Im Ursprung wählen wir einen Knotenpunkt dritter Ordnung, von dem 3 Äste etwa nach $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ $(\varepsilon^6 = 1)$ gezogen werden. Diese werden geradlinig fortgesetzt und in jedem Schnitt mit dem Generationenkreis $|t| = n$ wird ein Knoten zweiter Ordnung eingetragen, solange bis sich nach folgender Regel ein Knoten dritter Ordnung ergibt:

Wir reihen alle Knoten dritter Ordnung auf eine spiralenartige Kurve auf. Von $t = 0$ aus verfolgen wir zunächst den Ast über $t = 1$ hinaus bis zur n_1-ten Generation, welche durch

$$[\log(n_1 - 1)] < 2, \quad [\log n_1] = 2$$

bestimmt ist. Dort bringen wir einen Knoten dritter Ordnung an. Dann verfolgen wir den Generationskreis $|t| = n_1$ im positiven Umlaufssinne bis zum nächsten Ast (er geht über $t = \varepsilon$ hinaus), dem wir bis zur Generation n_2 folgen, die durch

$$[\log(n_2 - 1)] < 3, \quad [\log n_2] = 3$$

[1]) Der Baum wird dazu ohne Änderung seiner Struktur verzerrt, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

bestimmt ist. Nachdem wir dort einen Knoten dritter Ordnung angebracht haben, verfolgen wir wieder den Generationenkreis $|t| = n_2$ in positivem Umlaufssinne, bis wir auf den nächsten Ast stoßen, folgen dann diesem bis zur Generation n_3, und fahren so fort in infinitum.

Dieses einfache Verfahren macht aus dem Modulbaum einen Baum, der ihm, abgesehen von den Knotenpunkten zweiter Ordnung, topologisch äquivalent ist. Die Endfolgen beider Bäume entsprechen einander eindeutig. Gleichwohl ist der Modulbaum hyperbolisch, der abgeänderte Baum parabolisch.

Man bemerkt, daß ein ganz ähnliches Verfahren es erlaubt, aus jedem beliebigen hyperbolischen Baum durch Einschalten von Knotenpunkten zweiter Ordnung einen parabolischen Baum zu machen.

(Eingegangen den 28. Mai 1934.)