Über die Unabhängigkeit des Beweises des Primzahlsatzes vom Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variablen.

Über die Unabhängigkeit des Beweises des Primzahlsatzes vom Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln

Von ALFRED KIENAST, Küsnacht (Zürich)

Im Beweise des Primzahlsatzes wird bisher immer, direkt oder indirekt, das Resultat verwendet, daß $\zeta(1+it)$ für kein reelles t verschwindet. Da die Reihe Σn^{-1-it} nicht konvergiert, mußte man, um es zu erhalten, die durch Σn^{-s} definierte Funktion auf die Gerade $\sigma = 1$ und über sie hinaus analytisch fortsetzen, wodurch erst die Werte $\zeta(1+it)$ definiert wurden. Deshalb beruht die Ableitung des genannten Resultates wesentlich auf dem Begriff der analytischen Funktion.

Hierin liegt nichts Besonderes, solange man auch in den übrigen Teilen des Beweises des Primzahlsatzes die Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes nötig hat. Die Bestrebungen, einen Beweisgang anzugeben, der ohne sie auskommt, sind neuerdings erfolgreich gewesen. E. Landau und H. Heilbronn [1] haben einen allgemeinen Satz über Dirichlet'sche Reihen, der den Primzahlsatz enthält, bewiesen ohne die Funktionentheorie zu verwenden. Seine Voraussetzungen lauten, wenn man sie spezialisiert auf gewöhnliche Dirichlet'sche Reihen:

$$(a)\ f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s} \text{ konvergiere für } \sigma > 1;$$

(b) $a_n \geqq 0$;

(c) es sei $\lambda > 0$; für $|t| \leqq 2\lambda$ sei bei $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig

$$h_\varepsilon(t) = f(1+\varepsilon+it) - \frac{1}{\varepsilon+it} \to h(t).$$

Herr Landau [2] hat dem Beweis eine noch einfachere Gestalt gegeben und für $f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ damit den Primzahlsatz abgeleitet [3]. In diesem Spezialfall folgert E. Landau das Bestehen von (c) aus der Tatsache, daß

$$g(s) = f(s) - \frac{s}{s-1} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1} \tag{1}$$

für $\sigma \geqq 1$ regulär ist, was dort die Aussage von Satz 4 (pag. 517) ist. Hierin ist das Ergebnis $\zeta(1+it) \neq 0$ enthalten.

Andererseits hat Herr Landau 1923 [4] einen Beweis des Primzahlsatzes angegeben, bei dem man nicht zu definieren braucht, was unter $\zeta(1+it)$ zu verstehen ist. Dies deutet darauf hin, daß in der Aussage: $g(s)$ ist für $\sigma \geqq 1$ regulär, mehr enthalten ist, als für den vorliegenden Zweck erforderlich ist. Das ist in der Tat der Fall, wie sich unten ergibt.

Der vorliegende Aufsatz enthält einen Beitrag zur Frage: welches sind die geringsten Voraussetzungen, die nötig sind, um das Bestehen von Bedingung (c) festzustellen. Es wird gezeigt, daß in den zunächst interessierenden Fällen, die von den Funktionen $\zeta(s)$ und $\zeta_k(s)$ (ζ_k die zum algebraischen Körper K gehörende Zetafunktion) abhängen, der Begriff der in abgeschlossenem Gebiet stetigen Funktion von σ, t ausreicht. Es ist dabei nicht nötig, die Werte von $g(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ zu definieren, so daß man ohne den Begriff der analytischen Funktion auskommen kann. Die Überlegungen umfassen die Fälle, in denen

$$f(s) = E(s)\,\zeta(s) + F(s)\,G^{-1}(s),$$

wo E, F, G gegeben sind durch Dirichlet'sche Reihen, die für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ gleichmäßig konvergieren. Analoges gilt für $f(s)$, wo an Stelle von ζ, ζ_k steht und E, F, G durch Reihen gegeben sind von gleichem Bau wie ζ_k, die für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ gleichmäßig konvergieren.

In I wird gezeigt, daß

$$\zeta(s) = \frac{H(s)}{G(s) - G(1)}, \quad \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{M(s) - L(s)}{K(s)}$$

worin die großen Buchstaben Dirichlet'sche Reihen bedeuten, die für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ gleichmäßig konvergieren und wo für $\sigma \geqq 1$ $G(s) - G(1) \neq 0$ ($s \neq 1$), $K(s) \neq 0$. II. Analoge Aussagen gelten für $\zeta_k(s)$. In III werden diese Ergebnisse in drei Beispielen angewendet.

I.

Es sei s die komplexwertige Funktion $\sigma + it$ der beiden reellen Variabeln σ, t. Für $u > 0$ sei bei reellem lgu: $u^s = e^{s\,lgu}$, also

$$|u^s| = u^\sigma. \tag{2}$$

Das Differentiationszeichen ist nachstehend immer aufzufassen als Differentiation der Funktion des reellen Argumentes. In die durch die

Differentiation entstehende Funktion wird für s wieder $\sigma + it$ eingesetzt. Hierin steckt keine Voraussetzung und keine Aussage über die Differenzierbarkeit einer Funktion eines komplexen Argumentes.

1. Satz. Fundamentalsatz über Dirichletreihen.
Wenn die Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

für $s_0 = \sigma_0 + it_0$ konvergiert, dann ist sie gleichmäßig konvergent für jedes Paar σ, t, dessen zugehöriger Punkt im Sektor

$$|\arg (s - s_0)| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

enthalten ist;
somit stellt sie eine für $\sigma > \sigma_0$ stetige Funktion von σ, t dar.

2. Satz. Wenn die Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

für $s_0 = \sigma_0 + it_0$ absolut konvergiert, dann ist sie für $\sigma \geqq \sigma_0$ gleichmäßig konvergent;
und stellt somit eine für $\sigma \geqq \sigma_0$ stetige Funktion von σ, t dar.

Definition 1. Für $\sigma > 1$ sei

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $\sigma \geqq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

3. Satz. Für $\sigma > 1$ ist $\zeta(\sigma + it)$ eine stetige Funktion von σ, t.

4. Satz. Für $\sigma > 1$ ist

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = exp \sum_{p, m} \frac{1}{m\, p^s}$$

und somit für $\sigma > 1 : \zeta(s) \neq 0$. Beweis siehe H. § 41.

Definition 2. Es sei τ reell und größer als 4.

$$G(s) = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^s \lg^{\tau} n} \quad \text{für } \sigma \geqq 1.$$

$$\sum_{k/n}{}' \lg^{-\tau} k = \gamma_n \quad \left(\textstyle\sum' \text{ bedeutet, daß } k \neq 1\right)$$

$$H(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\gamma_n - G(1)}{n^s} = \zeta(s) \, \{G(s) - G(1)\} \text{ für } \sigma > 1. \tag{3}$$

5. Satz.

1. Für $\sigma \geqq 1$ ist $G(\sigma + it)$ eine stetige Funktion von σ, t.
2. Für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ ist $H(\sigma + it)$ eine stetige Funktion von σ, t.

Beweis: 1. folgt aus Definition und Satz 2.

2. Das Dirichlet'sche Verfahren gibt

$$\sum_{n \leqq x} \gamma_n = x \sum_{2}^{\sqrt{x}} k^{-1} \lg^{-\tau} k - \sum_{2}^{\sqrt{x}} \lg^{-\tau} k \left(\frac{x}{k} - \left[\frac{x}{k} \right] \right) + \sum_{1}^{\sqrt{x}} \sum_{2}^{x/\lambda} \lg^{-\tau} k - [\sqrt{x}] \sum_{2}^{\sqrt{x}} \lg^{-\tau} k$$

$$= x \{G(1) - O(\lg^{1-\tau} x)\} - O\left(\frac{\sqrt{x}}{\lg^{\tau} x}\right) + O\left(\sum_{1}^{\sqrt{x}} \frac{x}{\lambda} \lg^{-\tau} \frac{x}{\lambda}\right) - O\left(\frac{x}{\lg^{\tau} x}\right)$$

somit

$$\sum_{n \leqq x} (\gamma_n - G(1)) = O(x \lg^{1-\tau} x).$$

Unter Verwendung dieser Abschätzung findet man, daß die durch partielle Summation aus $H(s)$ hervorgehende Reihe für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ absolut und gleichmäßig konvergiert; dies ergibt die Behauptung.

6. Satz. 1. Für $\sigma \geqq 1$, $s \neq 1$ ist $G(s) - G(1) \neq 0$, folglich

$$\zeta(s) = \frac{H(s)}{G(s) - G(1)} \tag{4}$$

folglich nach Satz 4: $H(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$.

2. Für $\sigma \geqq 1$ ist

$$K(s) = \frac{G(s) - G(1)}{s - 1} \neq 0$$

eine stetige Funktion von σ, t und

$$K(1) = G'(1) = -\sum_2^\infty \frac{1}{k\, lg^{\tau-1} k} \neq 0.$$

3. Für $\sigma \geqq 1$ ist

$$L(s) = \frac{1}{s-1}\{K(s) - G'(1)\}$$

eine stetige Funktion von σ, t.

Beweis: 1. folgt aus $G(1) > R\big(G(s)\big)$.

2. Der Taylor'sche Satz für 2 Variable liefert, $1 < \sigma$,

$$G(\sigma + it) = G(1) + G'\big(1 + \Theta(\sigma - 1) + i\Theta t\big)(\sigma - 1 + it),\ 0 < \Theta < 1.$$

Die Reihe

$$G'(s) = -\sum_2^\infty \frac{1}{n^s\, lg^{\tau-1} n}$$

konvergiert absolut für $s = 1$; Satz 2 und $G'(1) > R\big(G'(s)\big)$ ergeben die Behauptungen.

3. Der Taylor'sche Satz für 2 Variable liefert, $1 < \sigma$, $0 < \Theta < 1$,

$$G(\sigma + it) = G(1) + G'(1)(\sigma - 1 + it) +$$
$$+ \frac{1}{2!} G''\big(1 + \Theta(\sigma - 1) + i\Theta t\big)(\sigma - 1 + it)^2$$

Die Reihe

$$G''(s) = \sum_2^\infty \frac{1}{n^s\, lg^{\tau-2} n}$$

konvergiert absolut für $s = 1$; somit folgt die Behauptung aus Satz 2.

7. Satz. 1. $H(1) = G'(1)$

2. Für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ ist

$$M(s) = \frac{H(s) - H(1)}{s-1}$$

eine stetige Funktion von σ, t.

Beweis: 1. Aus Satz 6, 1) folgt $(s-1)\,\zeta(s) = \dfrac{H(s)}{K(s)}$; man hat durch elementare Abschätzung, vgl. H. pag. 112,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \zeta (1 + \varepsilon) = \frac{H(1)}{K(1)} = 1.$$

2. Der Taylor'sche Satz ergibt diese Aussage über $M(s)$ analog wie für die entsprechende in Satz 6, 2). Die Abschätzung der summatorischen Funktion der Reihe $H(s)$ (bei Satz 5) ergibt, daß die aus $H'(s)$ durch partielle Summation hervorgehende Reihe für $\sigma \geqq 1, |t| \leqq T$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

8. Satz. Es sei $H(1 + it) = a$,

$$\sum_{k/n} \frac{\gamma_k - G(1)}{k^{it}} = f(n);$$

dann ist die Reihe

$$N(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{f(n) - a}{n^s} = \zeta(s) \{ H(s + it) - a \} \tag{5}$$

konvergent für $\sigma \geqq 1$.

Beweis: Setzt man

$$\frac{\gamma_k - G(1)}{k^{it}} = \beta_k, \quad 0 \leqq \varrho(\lambda) = \lambda - [\lambda] < 1,$$

so ist

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = x \sum_{1}^{\sqrt{x}} f(n) - \sum_{1}^{\sqrt{x}} \beta_k \, \varrho\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1}^{\sqrt{x}} \sum_{1}^{x/\lambda} \beta_k - [\sqrt{x}] \sum_{1}^{\sqrt{x}} \beta_k .$$

Es ist $|\gamma_k| < d_k - 1$, wo d_k die Anzahl der Teiler von k bedeutet; somit

$$|\beta_k| \leqq d_k - 1 + G(1)$$

Hiermit folgt

$$\sum_{\sqrt{x}+1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} = O(\overset{2-\tau}{lg} x)$$

$$\sum_{1}^{\sqrt{x}} \beta_k \varrho\left(\frac{x}{k}\right) = O\left(\sum_{1}^{\sqrt{x}} (d_k - 1 + G(1))\right) = O(\sqrt{x} \, lg \, x)$$

somit

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = x \{ H(1 + it) - O(\overset{2-\tau}{lg} x)\} + O(x \overset{2-\tau}{lg} x)$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

9. Satz. Für jedes t, für das

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \zeta(1+\varepsilon+it) = 0,$$

existiert der limes

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \zeta(1+\varepsilon+it) = d.$$

Beweis: Die Voraussetzung ist nicht erfüllt für $t = 0$; somit $t \gtrless 0$. Zur Abkürzung sei (nach Satz 6, 1)

$$\bigl(G(1+it) - G(1)\bigr)^{-1} = b \neq 0$$

Somit: wenn die Voraussetzung erfüllt ist, dann ist nach (3)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H(1+\varepsilon+it) = a = 0.$$

Dann ergibt (4) und dann (5)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \zeta(1+\varepsilon+it) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} H(1+\varepsilon+it)\, b = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(1)b}{\varepsilon \zeta(1+\varepsilon)} = N(1)b = d.$$

w. z. b. w.

10. Satz. Für jedes reelle t ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \zeta(1+\varepsilon+it) = H(1+it)\, b \neq 0.$$

Beweis: Die Behauptung muß, wegen (4) nur für $t \neq 0$ bewiesen werden.

In H. § 45 ist ausführlich, unter Verwendung des letzten Ausdruckes in Satz 4, entwickelt, daß für $0 < \varepsilon < 1$, $t \gtreqless 0$, die Ungleichung besteht

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(1+\varepsilon+it) \right| > \frac{1}{2\varepsilon^{1/4} |\zeta(1+\varepsilon+2it)|^{1/4}}.$$

Bei zu null abnehmendem ε wächst die rechte Seite über alle Grenzen, also auch die linke Seite. Nimmt man nun an, es wäre für ein gewisses $t \neq 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \zeta(1+\varepsilon+it) = 0$, so wäre nach Satz 7 der limes

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(1+\varepsilon+it) \right| = |d|$$

vorhanden, während soeben gezeigt wurde, daß er nicht existiert; das ist ein Widerspruch; somit kann die Annahme nicht richtig sein und dies ist die Behauptung.

II.

Es sei K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k sein Grad. Die zu ihm gehörende Zetafunktion ist definiert, für $\sigma > 1$ durch

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \sum \frac{F(n)}{n^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} = exp \sum_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}} \frac{1}{m N\mathfrak{p}^s}$$

somit ist für $\sigma > 1$, $\zeta_k(s) \neq 0$. Das Fundament der Aussagen über diese Funktion ist der Weber'sche Satz (1896)

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} 1 = ax + O(x^{1-1/k}).$$

Jetzt kann man Überlegungen durchführen, die völlig analog verlaufen zu denen in I.

Definition 3. Es sei τ reell und größer als 4.

$$G_k(s) = \sum_{N\mathfrak{a}=2}^{\infty} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s lg^\tau N\mathfrak{a}} \text{ für } \sigma \geqq 1 ;$$

$$\sum_{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{q}}' lg^{-\tau} N\mathfrak{m} = \gamma_{\mathfrak{q}} \ (\textstyle\sum' \text{ bedeutet, daß } N\mathfrak{m} \neq 1) ;$$

$$H_k(s) = \sum_{N\mathfrak{a}=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\mathfrak{a}} - G_k(1)}{N\mathfrak{a}^s} = \zeta_k(s) \{ G_k(s) - G_k(1) \} .$$

Hier ergeben sich Aussagen analog zu Satz 5—7, die auf gleiche Weise zu beweisen sind.

11. Satz. Es sei $H_k(1 + it) = a$

$$\sum_{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{q}} \frac{\gamma_{\mathfrak{m}} - G_k(1)}{N\mathfrak{m}^{it}} = f(\mathfrak{q})$$

dann ist die Reihe

$$N_k(s) = \sum_{N\mathfrak{a}=1}^{\infty} \frac{f(\mathfrak{a}) - a}{N\mathfrak{a}^s} = \zeta_k(s) \{ H_k(s + it) - a \}$$

konvergent für $\sigma \geqq 1$.

Hier schließen sich Sätze an analog zu Satz 9 und 10, und ihre Beweise verlaufen ebenso.

III.

Die vorangehenden Sätze ermöglichen auf das Bestehen von Bedingung (*c*) des Satzes von Landau und Heilbronn zu schließen für Reihen der in der Einleitung genannten Zusammensetzung.

1. Beispiel.

Definition 4.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} lg\, p \text{ für } n = p^m,\ p \text{ Primzahl},\ m > 0 \text{ ganz}, \\ 0 \quad \text{für die anderen ganzen } n > 0. \end{cases}$$

12. Satz. Für $\sigma > 1$ ist

$$1)\quad \zeta'(s) = -\sum_{2}^{\infty} \frac{lg\, n}{n^s}$$

eine stetige Funktion von σ, t;

$$2)\quad -\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Beweis: 1) folgt aus Satz 2.

2) $$\sum_{n/k} \Lambda(n) = \sum_{p/k} \sum_{\substack{m>0 \\ p^m/k}} \lg p = \lg k.$$

ζ' ist das Produkt von Reihen, die für $\sigma > 1$ absolut konvergieren.

13. Satz. Für $\sigma > 1$ ist

$$-\zeta'(s)\, \zeta^{-1}(s) = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Folgt aus 12. Satz, 2., wegen Satz 4.

14. Satz. Es ist für $\lambda > o$, $|t| \leqq 2\lambda$ gleichmäßig

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + it) - \frac{1 + \varepsilon + it}{\varepsilon + it} = h(t)$$

und $h(t)$ ist stetig.

Beweis: Durch Berechnung der summatorischen Funktion nach Dirichlet's Verfahren findet man, daß (C = Euler'sche Konstante)

$$u(s) = \zeta'(s) + \zeta^2(s) - 2C\zeta(s) = \sum \frac{e_n}{n^s}$$

durch eine Reihe dargestellt wird, die für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert. Somit ist $u(s)$ eine stetige Funktion von σ, t für $\sigma \geqq 1$. Jetzt ist unter Verwendung von in I eingeführten Bezeichnungen

$$g(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1} =$$

$$= -u(s)\frac{G(s)-G(1)}{H(s)} - 2C - 1 + \frac{1}{K(s)}(M(s) - L(s)) = R(s).$$

Die rechte Seite ist auf Grund der abgeleiteten Eigenschaften eine stetige Funktion von σ, t für $\sigma \geqq 1$, somit ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g(1 + \varepsilon + it) = R(1 + it)$$

Da $R(s)$ im Innern und auf der Begrenzung jedes Rechtecks: $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq 2\lambda$ stetig ist, so ist dieser limes gleichmäßig. Damit ist Bedingung (c) für $f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ bewiesen und es ergibt sich, wie von E. Landau in [3] § 2 ausgeführt, der Primzahlsatz.

2. Beispiel.

15. Satz. Es ist für $\lambda > 0$, $|t| \leqq 2\lambda$ gleichmäßig

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\zeta_k'}{\zeta_k}(1 + \varepsilon + it) - \frac{1 + \varepsilon + it}{\varepsilon + it} = h_k(t)$$

und $h_k(t)$ ist stetig.

Beweis: Durch Berechnung der summatorischen Funktion (vgl. Landau [5]) findet man, daß

$$u_k(s) = \zeta_k'(s) + \alpha^{-1}\zeta_k^2(s) - (\gamma\alpha^{-2} + 1)\zeta_k(s) = \sum_{N\mathfrak{a}=1}^{\infty} \frac{e(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

für $\sigma > 1 - (2k)^{-1}$ konvergiert. Man erhält für $-\frac{\zeta_k'}{\zeta_k}(s) - \frac{s}{s-1}$ durch II eine Formel, analog zu derjenigen im Beweise zu Satz 14. Das Landausche Verfahren von [3] § 2 ergibt hier den Primidealsatz

$$\sum_{N\mathfrak{p}^m \leqq x} lg\, N\mathfrak{p} = x + o(x).$$

3. Beispiel.

Sei die Reihe $f(s)$ des Satzes von Landau und Heilbronn (s. Einleitung)

$$f(s) = \zeta(s) + \tfrac{1}{2}\{L^{-1}(s,\chi) + L^{-1}(s,\chi^*)\} = \sum \frac{1}{n^s}\Big(1 + R\big(\chi(n)\mu(n)\big)\Big)$$

wo χ nicht Hauptcharakter mod. k, χ^* der konjugierte Charakter ist, dann sind die Bedingungen (a), (b) erfüllt. Da $L(s,\chi) = \Sigma \frac{\chi(n)}{n^s}$ für $\sigma \geqq 1$, $|t| \leqq T$ gleichmäßig konvergiert und $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1$ (siehe H pag. 460—62), so folgt nach Satz 6 und 7

$$f(s) - \frac{s}{s-1} = \frac{M(s) - L(s)}{K(s)} - 1 + \tfrac{1}{2}\{L^{-1}(s,\chi) + L^{-1}(s,\chi^*)\} = U(s).$$

$U(s)$ ist für $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq \lambda$ eine stetige Funktion von σ, t und somit ist Bedingung (c) erfüllt. Das Landausche Verfahren von [3] § 2 ergibt

$$R\Big(\sum_{1}^{x} \chi(n)\mu(n)\Big) = o(x).$$

Analoges folgt für den imaginären Teil; also

$$\sum_{1}^{x} \chi(n)\mu(n) = o(x).$$

Hieraus folgt elementar

$$\sum_{1}^{x} \chi(n)\Lambda(n) = o(x).$$

Dies und der Primzahlsatz geben den Primzahlsatz für die arithmetische Progression.

---

1. *H. Heilbronn und E. Landau,* Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner. MZ. 37 (1933), 10—16.

H. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 1909.

2. *E. Landau,* Über Dirichlet'sche Reihen. Göttinger Nachrichten, 1932, 525—527.

3. *E. Landau,* Über den Wiener'schen neuen Weg zum Primzahlsatz. Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1932, 514—521.

4. *E. Landau,* Sobre los números primos en progressión arithmética. Revista Matem. Hispano-Americana 4 (1923).

5. *E. Landau,* Über die Aequivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie. Sitzungsberichte Akad. Wien 120, IIa (1911), 973—988.

(Eingegangen den 7. Mai 1935.)