Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; thèories des sillages et des proues.

Autor: Leray, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9291

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues[1])

Par JEAN LERAY, Paris

INTRODUCTION

1° Enoncés des problèmes

Soit à construire un sillage correspondant à un obstacle tranchant donné; cet obstacle est plongé dans un liquide illimité qu'anime un mouvement plan, uniforme à l'infini; les lignes de jet sont assujetties à se détacher aux points extrêmes de l'obstacle.

D'après Helmholtz ce problème équivaut à *un problème de représentation conforme* essentiellement distinct de celui de Riemann et dont voici l'énoncé:

Problème du sillage. *On demande de transformer conformément un plan entaillé le long d'une demi-droite (à savoir le plan du potentiel complexe $f = \varphi + i\psi$ qu'entaille le demi-axe réel positif $\psi = 0$, $\varphi > 0$), en un domaine, D, d'un plan $z = x + iy$, dont la frontière se compose d'un arc de courbe donné (l'obstacle) et de deux lignes libres inconnues (les lignes de jet); ces deux lignes libres joignent le point à l'infini aux points extrêmes de l'obstacle; elles possèdent, jusqu'en leurs extrémités, des tangentes continues; en chacun de leurs points la transformation cherchée doit conserver les longueurs; elle doit en outre associer les points à l'infini des deux plans f et z et conserver les directions des courbes aboutissant en ces points (la direction de l'axe des x est celle du courant, c'est-à-dire celle de la vitesse aux points infiniment éloignés de l'obstacle).*

La courbe obstacle donnée vérifiera, par hypothèse, la condition suivante: son intersection avec toute parallèle à l'axe des x, quand elle existe, se compose d'un seul point ou exceptionellement d'un segment rectiligne.

En poursuivant l'étude que M. Levi-Civita a faite de ce problème, M. Brillouin et M. Villat ont constaté[2]) que les lignes libres se raccordent

[1]) Ce travail a été résumé en deux Notes parues aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences le 3 décembre 1934 et le 12 juin 1935. (t. 199 et 200).

[2]) Nous rappellerons les démonstrations au cours des chapitres I et II.

à l'obstacle[3]) et que ces lignes libres présentent en leurs extrémités des courbures en général infinies; depuis les travaux de ces Auteurs on considère que, pour être physiquement acceptable, un sillage doit avoir des lignes libres quittant l'obstacle de l'une des deux façons que voici:

Détachement vers l'aval[4]): la ligne libre se dirige du côté aval de l'obstacle, et y présente une courbure infinie.

Détachement en proue: la ligne libre se raccorde en son extrémité à l'obstacle, et y présente une courbure finie[5]).

Ainsi s'est posé un second problème:

Problème de la proue. *Etant donné un obstacle* $\widehat{B_0C_0}$ *trouver un sillage, correspondant à un obstacle* $\widehat{BC}$, *dont les propriétés soient les suivantes:* $\widehat{BC}$ *coïncide avec* $\widehat{B_0C_0}$ *ou est une portion de cet arc. Si* B (*ou* C) *est en* B_0 (*ou en* C_0) *la ligne libre issue de ce point doit y présenter un détachement vers l'aval, ou un détachement en proue. Si* B (*ou* C) *est intérieur à l'arc* $\widehat{B_0C_0}$, *la ligne libre issue de ce point doit y présenter un détachement en proue.*

Mais une solution de ce problème n'est *acceptable*, c'est-à-dire ne peut correspondre à une réalité physique que si elle vérifie en outre *les deux conditions de M. Brillouin.*

1° Les arcs $\widehat{B_0B}$ et $\widehat{CC_0}$, s'ils ne se réduisent pas à des points, doivent être extérieurs au domaine D que délimitent l'obstacle et les lignes libres.

2° Le module $|df/dz|$ de la transformation conforme doit valoir au plus 1 (en d'autres termes la vitesse doit être au plus égale à la vitesse à l'infini).

Les problèmes précédents seront nommés *symétriques* quand on les posera pour des obstacles possédant un axe de symétrie parallèle au courant, les sillages envisagés devant présenter cette même symétrie.

2° Nature de l'obstacle

Rappelons que l'intersection de l'obstacle et de toute parallèle à l'axe des x doit être d'un seul tenant quand elle existe. Nous supposerons d'autre part que l'obstacle a une courbure finie en tous ses points et que

[3]) De sorte que la ligne libre et l'obstacle constituent une courbe à tangente continue.

[4]) On définit de même le détachement vers l'amont, qui ne peut correspondre à aucune réalité physique.

[5]) Nécessairement égale à celle de l'obstacle, comme l'a prouvé *M. Villat.*

cette courbure, considérée comme fonction de l'abscisse curviligne, vérifie une condition de Hölder d'exposant μ supérieur à $\frac{1}{2}$. On peut d'ailleurs remplacer en divers endroits cette seconde hypothèse par d'autres hypothèses moins restrictives: par exemple on peut discuter le nombre des solutions du problème du sillage quand, au lieu de supposer que l'obstacle est un arc à courbure höldérienne, on considère un obstacle composé d'un nombre fini d'arcs de cette nature, se joignant en des points anguleux[6]). Nous n'exposerons pas la méthode qui convient à de telles parois anguleuses: elle s'obtient en combinant les procédés par lesquels nous allons étudier les parois lisses avec les procédés que M. Weinstein et moi-même appliquerons ultérieurement aux parois polygonales, le problème étant celui du jet et non plus celui du sillage.

Nous orienterons l'obstacle dans le sens des y croissants; nous désignerons par l son abscisse curviligne, par Ψ l'angle qu'il fait avec $0x$. Les hypothèses énoncées se formulent donc comme suit: $0 \leqq \Psi[l] \leqq \pi$; la dérivée $\Psi'[l]$ existe et vérifie une condition de Hölder d'exposant μ ($\frac{1}{2} < \mu < 1$).

Nous nommerons *accolade* un obstacle $\widehat{B_0C_0}$ du type suivant: il se compose d'un arc convexe[7]) $\widehat{B_0B_1}$, d'un arc concave[8]) $\widehat{B_1A}$, d'un autre arc concave $\widehat{AC_1}$ et d'un autre arc convexe $\widehat{C_1C_0}$; la valeur absolue de la courbure des arcs $\widehat{B_0B_1}$ et $\widehat{C_1C_0}$ croît ou ne décroît pas quand on les parcourt de C_1 vers C_0, de B_1 vers B_0.

Remarques. Les arcs $\widehat{B_1A}$ et $\widehat{AC_1}$ peuvent contenir des portions rectilignes. Chacun des arcs $\widehat{B_0B_1}$, $\widehat{B_1C_1}$, $\widehat{C_1C_0}$ peut se réduire à un point. L'obstacle présente en A un angle saillant ou rentrant quelconque; si A n'est pas anguleux, sa position est considérée comme indéterminée sur $\widehat{B_1C_1}$. Les obstacles concaves et les obstacles circulaires convexes sont les formes extrêmes de l'accolade.

3° Résultats obtenus

Nous démontrons en premier lieu *des théorèmes d'existence* (ch. IV). Le problème du sillage, le problème symétrique du sillage sont toujours possibles. Le problème symétrique de la proue possède au moins une

[6]) Les demi-tangentes en ces points anguleux sont supposées distinctes. Toutefois, dans le cas symétrique, l'obstacle peut présenter un rebroussement en son milieu.

[7]) C'est-à-dire ayant une concavité sans cesse tournée vers l'aval.

[8]) C'est-à-dire ayant une concavité sans cesse tournée vers l'amont.

solution, même quand on s'impose les restrictions suivantes: le point de détachement inférieur B doit être choisi entre l'extrémité inférieure B_0 de l'obstacle et le point B_1 où la moitié inférieure de la courbe-obstacle fait avec $0x$ l'angle de plus petite valeur algébrique[9]); le point C doit être choisi entre C_0 et le point C_1 symétrique de B_1. Le problème de la proue possède au moins une solution, même quand on s'impose les restrictions suivantes: B doit être situé entre B_0 et le point B_2 où la courbe obstacle fait avec $0x$ l'angle de plus petite valeur algébrique[9]); C doit être choisi entre C_0 et le point C_2 où cet angle atteint sa plus grande valeur algébrique.

Nous démontrons ensuite *l'unicité de la solution* des problèmes suivants:

le problème du sillage posé pour un obstacle convexe (§ 30);
le problème symétrique du sillage (§ 30);
le problème de la proue posé pour un arc circulaire convexe (§ 33);
le problème symétrique de la proue posé pour une accolade symétrique (§ 32).

Enfin nous prouvons qu'il existe des obstacles convexes et symétriques pour lesquels le problème de la proue possède plusieurs solutions (§ 32).

Signalons qu'un autre mémoire[10]) discute les conditions de validité de M. Brillouin: il démontre qu'une solution du problème de la proue est toujours acceptable lorsque l'obstacle est une accolade $B_0 B_1 A C_1 C_0$ et que le point de bifurcation du courant se trouve être en A.

Les arcs circulaires convexes et les accolades symétriques sont donc des obstacles auxquels la théorie du sillage s'adapte parfaitement.

A ma connaissance aucun des théorèmes d'existence et d'unicité ci-dessus n'avait été prouvé[11]). Mais le problème du jet symétrique[12]), qui est identique à celui du sillage symétrique dans un canal, a été étudié par M. Weinstein, Hamel, Weyl,

---

[9]) Si le minimum de l'angle est atteint en plusieurs points, on choisit celui d'entre eux qui est le plus proche de B_0.

[10]) Sur la validité des solutions du problème de la proue (Volume du Jubilé de M. Brillouin, Gauthier-Villars, 1935).

[11]) Signalons que M. *Brodetsky* a construit d'excellentes *solutions approchées* des problèmes du sillage et de la proue, l'obstacle étant circulaire ou elliptique. (Proc. Edin. Math. Soc. XLI, 1923; Scripta Univ. Hieros., Jérusalem, 1923; Deuxième Congrès international de Mécan. appliquée, Zurich, 1926.)

[12]) Il n'est pas inutile de faire l'historique de ce sujet: Le théorème d'existence et le théorème d'unicité infinitésimale sont étudiés simultanément; M. *Weinstein* démontre que leur validité est assurée quand un certain théorème d'unicité locale, dénommé „problème II", est exact. C'est ce „problème II" qui est résolu successivement dans des cas de plus en plus généraux par MM. *Weinstein, Hamel, Weyl, Friedrichs.*

M. *Quarleri* a consacré un article (Rend. R. Acc. Lincei, 1er nov. 1931, p. 332 t. 14) aux sillages qui correspondent à des arcs de cercles symétriques; mais M. *Weinstein* a signalé

Friedrichs; dans un autre mémoire, fait en collaboration avec M. Weinstein, nous étendrons les résultats obtenus par ces divers Auteurs, en appliquant à ce problème du jet les méthodes du présent travail; nous nous y bornerons à l'étude des jets issus de parois polygonales; ceci nous permettra d'un côté d'éviter l'emploi d'équations fonctionnelles, d'un autre côté de montrer comment se traitent les difficultés que présentent les parois anguleuses.

La majorité des Hydrodynamiciens considéraient les théorèmes d'existence que nous venons d'énoncer comme devant être sûrement exacts; il n'est pas inutile de justifier de telles croyances chaque fois qu'on le peut.

Au contraire, m'a-t-il semblé, les opinions étaient indécises sur les questions d'unicité; nous sommes d'ailleurs loin de les avoir complètement élucidées.

4° Méthodes employées

Nos théorèmes d'existence se déduisent d'un théorème d'existence général concernant les équations fonctionnelles[13]) (ch. IV). Les équations fonctionnelles de nos problèmes sont des équations intégro-différentielles dues à M. Villat; nous en rappelons l'origine (ch. I et II). L'application du théorème d'existence cité exige la vérification de deux catégories d'hypothèses: les premières ont trait à la continuité de l'équation; la vérification en est immédiate (ch. I et II). Les deuxièmes consistent en une limitation *a priori* de l'ensemble des solutions éventuelles; le chapitre III établit que cette limitation est possible. Nous y utilisons un lemme de représentation conforme et l'équation de M. Villat.

Le chapitre V recherche des cas où le problème du sillage possède une solution unique; la théorie des équations fonctionnelles montre comment on peut découvrir de tels cas en étudiant l'allure de deux solutions infiniment voisines, c'est-à-dire le problème de l'unicité infinitésimale; ce problème est au premier abord compliqué; mais nous le transformons[14]) suivant les principes que M. Weinstein a indiqués dans ses travaux. Pour conclure[15]) il nous suffit alors d'utiliser convenablement certaines considérations[16]) que M. Friedrichs a récemment appliquées à ces questions.

---

que cette note contenait trois erreurs et que la méthode employée ne conduisait en fait qu'à des résultats très restreints (Rend. R. Acc. Lincei, oct. 1932, p. 85 t. 17; C.R.A.S., t. 196, p. 324, 1933; Zentralblatt für Mech.).

Quant aux travaux de M. *Schmieden* ils contiennent en excès des raisonnements tels que le suivant: „De l'inégalité $|A| \leq |B|$ résulte par différentiation $|dA| \leq |dB|$." (Ingenieur-Archiv, t. III, 1932, p. 368.)

[13]) *Leray-Schauder*, Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 51, 1934.

[14]) Cette transformation (§ 27) exige quelques calculs, que M. *Jacob* avait entrepris et qu'il a eu l'amabilité de me communiquer.

[15]) Nous n'opérons donc pas de réduction à un „problème II", comparable à celle que M. *Weinstein* a effectuée dans le cas du jet et sur laquelle se basaient tous les travaux parus jusqu'à présent (voir p. 40, note 48).

[16]) Ces considérations reposent sur l'inégalité (5,16); cette inégalité est plus simple et plus générale que celle sur laquelle M. *Weyl* base ses raisonnements.

Cette étude de l'unicité infinitésimale est la base du chapitre VI qui discute le nombre des solutions du problème de la proue; tous les raisonnements de ce dernier chapitre sont simples et intuitifs.

5° Le travail présent constitue donc un exemple typique *d'application de la théorie générale des équations fonctionnelles*[17]). Nous y discutons seulement les problèmes; nous ne cherchons pas à les résoudre effectivement, entreprise que d'ailleurs les théoriciens du sillage ont menée aussi loin qu'il était possible.

Mes premières remarques sur ce sujet ont eu l'avantage d'être exposées par M. Villat dans son Cours de l'année 1933. Encouragé d'une telle façon, j'ai tenu à pousser mes recherches le plus loin possible. Mon travail a été singulièrement facilité par les directives de M. Villat et par les nombreux échanges de vues que j'ai eus avec M. Weinstein.

I. Mise en équation du problème du sillage[18])

6° La solution indéterminée de M. Levi-Civita

M. Levi-Civita a introduit dans l'étude d'un sillage une troisième variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$: il représente conformément le plan coupé f sur le demi-cercle $\eta \geqq 0$, $|\zeta| \leqq 1$ en sorte que les éléments suivants soient homologues dans la correspondance qui associe les plans z et ζ: l'obstacle et la demi-circonférence $\eta > 0$, $|\zeta| = 1$; le point $z = \infty$ et le point $\zeta = 0$; les lignes libres et les segments $-1 \leqslant \zeta < 0$, $0 < \zeta \leqslant 1$. Dans ces conditions:

$$f = a\left[\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos s_0\right]^2, \quad (a > 0), \tag{1,1}$$

a et s_0 étant des constantes réelles (le point $\zeta = e^{is_0}$, le point $f = 0$ et le point de l'obstacle où le courant bifurque sont homologues).

En même temps M. Levi-Civita définit dans le demi-cercle $\eta \geqq 0$, $|\zeta| \leqq 1$ une fonction uniforme $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ par les deux conditions suivantes

$$\omega(0) = 0 \quad ; \tag{1,2}$$

$$df/dz = e^{-i\omega} \tag{1,3}$$

[17]) On y voit en particulier que les théorèmes d'existence sont absolument indépendants des théorèmes d'unicité et qu'ils exigent des hypothèses moins strictes.

[18]) Les résultats énoncés au cours de ce chapitre ne sont pas originaux: ceux du paragraphe 6 sont dus à M. *Levi-Civita* (Rendiconti Palermo t. 23, 1907), les autres sont dus à M. *Villat* (Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 28, 1911; Journal de Math., t. 10, 1914).

La fonction $\omega(\zeta)$ est continue au voisinage du segment $-1 < \zeta < 1$; elle est réelle sur ce segment: le principe de symétrie de Schwarz lui est applicable. Un fait capital en résulte: $\omega(\zeta)$ est holomorphe pour $|\zeta| < 1$ et prend des valeurs imaginaires conjuguées en des points ζ imaginaires conjugués.

Il est aisé de vérifier avec M. Levi-Civita la réciproque suivante: soient deux constantes réelles arbitraires a et s_0; soit $\omega(\zeta)$ une fonction holomorphe pour $|\zeta| < 1$, réelle et nulle en même temps que ζ. Les relations (1,1) et (1,3), que nous écrirons

$$(1,4) \qquad \begin{cases} f = a\left[\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos s_0\right]^2 \\ dz = a\, e^{i\omega(\zeta)} \left[\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos s_0\right] \left[\zeta - \zeta^{-1}\right] \frac{d\zeta}{\zeta}, \end{cases}$$

établissent une correspondance conforme entre le plan f coupé et un domaine D. Cette correspondance conserve les longueurs tout le long des lignes libres (images des segments $-1 \leqq \zeta < 0$, $0 < \zeta \leqq 1$); elle associe les points à l'infini; elle conserve les directions des lignes qui aboutissent en ces points. Mais D peut se recouvrir, comme l'a signalé M. Brillouin; et aucun procédé n'apparaît qui permette de choisir la fonction $\omega(\zeta)$ en sorte que l'image, dans le plan des z, de la demi-circonférence $\eta = 0$, $|\zeta| = 1$ soit un obstacle donné. M. Villat a réussi à écarter ces deux inconvénients en précisant comme suit la nature de la fonction $\omega(\zeta)$.

7° La solution indéterminée de M. Villat

La fonction $f(z)$ établit une correspondance conforme entre deux domaines dont les frontières se composent d'un nombre fini d'arcs à tangente continue et d'un nombre fini de points anguleux. Donc l'argument de df/dz est borné, et il est continu au voisinage de tout point frontière qui n'est anguleux ni dans le plan f ni dans le plan z: La fonction $\theta(\zeta)$ est une fonction harmonique, bornée dans le cercle $\zeta \leqq 1$ et qui est sûrement continue au voisinage des points $\zeta = e^{is}$ autres que ± 1, $e^{\pm i s_0}$. Puisque $\tau(0) = 0$, nous avons d'après la formule de Schwarz-Poisson

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(e^{is}) \frac{e^{is} + \zeta}{e^{is} - \zeta}\, ds\,.$$

La relation $\theta(0) = 0$ nous apprend en outre que $\int^{2\pi} \theta(e^{is})\, ds = 0$.

Posons avec M. Villat $\Phi(s) = \theta(e^{is}) = \theta(e^{-is})$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$: $\Phi(s)$ est l'angle que fait avec ox la vitesse au point de l'obstacle homologue de $\zeta = e^{is}$. Les deux relations précédentes s'écrivent

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos s + \zeta^2} \, ds, \tag{1,5}$$

$$\int_0^\pi \Phi(s) \, ds = 0. \tag{1, 6}$$

Rappelons que nous désignons par $\Psi[l]$ l'angle que l'obstacle fait avec $0x$ au point d'abscisse curviligne l $(b \leqq l \leqq c)$, l'obstacle étant orienté dans le sens des y croissants;

(1,7) $\quad 0 \leqq \Psi[l] \leqq \pi$; $\Psi'[l]$ existe et vérifie une condition de Hölder d'exposant $\mu > \frac{1}{2}$; l est une fonction continue[19]) de s et nous avons

$$\text{(1,8)} \quad \begin{array}{lll} \text{pour } 0 \leqslant s < s_0, & \Phi(s) = \Psi[l(s)] - \pi, & (-\pi \leqslant \Phi(s) \leqslant 0); \\ \text{pour } s_0 < s \leqslant \pi, & \Phi(s) = \Psi[l(s)], & (0 \leqslant \Phi(s) \leqslant \pi). \end{array}$$

8° Direction des lignes libres

Soient réciproquement une constante a, une fonction $\Psi[l]$ vérifiant les conditions (1,7) et une fonction croissante et continue $l(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi;$ $b \leqslant l \leqslant c)$. Les relations (1,8) et (1,6) définissent une fonction $\Phi(s)$ et une constante s_0. Les relations (1,5) et (1,4) établissent une correspondance conforme entre le plan f coupé et un domaine du plan z. Il est possible de préciser l'allure des lignes libres qui, rappelons-le, sont les images dans le plan des z des deux segments $\eta = 0$, $-1 \leqslant \xi < 0$, $0 < \xi \leqslant 1$.

Ces lignes sont analytiques, sauf peut-être en leurs extrémités. Nous les orienterons dans le sens des ξ croissants. L'angle que fait avec $0x$ la ligne libre passant par l'image du point $\zeta = \xi$ est $\theta(\xi)$, si $\xi < 0$, $\theta(\xi) + \pi$ si $\xi > 0$. Nous avons d'après (1,8) $-\pi \leqslant \Phi(s) \leqslant \pi$; d'où $-\pi < \theta(\zeta) < \pi$.

[19]) Parce que toute correspondance conforme entre deux domaines établit une correspondance continue entre leurs éléments frontières.

Nous avons d'après (1,5)

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{1 - \xi^2}{1 - 2\xi \cos s + \xi^2} ds ,$$

ce que (1,6) nous permet d'écrire

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \left[\frac{1 - \xi^2}{1 - 2\xi \cos s + \xi^2} - \frac{1 - \xi^2}{1 - 2\xi \cos s_0 + \xi^2} \right] ds ;$$

d'après (1,8) $\Phi(s) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant s < s_0$, $\Phi(s) \geqslant 0$ pour $s_0 < s \leqslant \pi$; or le crochet est du signe de ξ $(\cos s - \cos s_0)$; $\theta(\xi)$ a donc le signe de $-\xi$.

Il résulte de cet ensemble de faits que *l'angle des lignes libres avec* $0x$ *est constamment positif et inférieur à* π.

La continuité de $l(s)$ entraîne celles de $\Phi(s)$, donc celle de $\theta(e^{is})$ au voisinage des valeurs 0 et π de s; $\theta(\zeta)$ est donc continue au voisinage des points $\zeta = 1$ et $\zeta = -1$: *les lignes libres et l'obstacle constituent une courbe à tangente continue*[20]).

La correspondance entre les plans $\sqrt{f}$ et z, puisqu'elle représente conformément l'un sur l'autre des domaines dont les frontières ont des tangentes continues, vérifie une condition de Hölder d'exposant ν arbitrairement voisin de 1: on *a*

$$| z' - z'' | < | \sqrt{f'} - \sqrt{f''} |^\nu \, C(| f' |, | f'' |),$$

$C(| f' |, | f'' |)$ étant une fonction continue de $| f' |$ et $| f'' |$. En particulier $l(s)$ satisfait à une inégalité de la forme

$$(1,9) \qquad | l(s') - l(s'') | \leqslant C^{te} \, | \cos s' - \cos s'' |^\nu .$$

Désormais nous n'envisagerons plus dans les formules (1,8) que des fonctions $l(s)$ de cette espèce; afin que toutes les formules ultérieures aient un sens, nous choisirons $1/2\mu < \nu < 1$.

9° Sillage associé à des fonctions $\Psi[l]$ et $l(s)$ données

Soit une fonction $\Psi[l]$ qui vérifie les conditions (1,7) $(b \leqslant l \leqslant c)$; soit une fonction $l(s)$ qui croît de b à c et qui vérifie une inégalité (1,9); soit

[20]) Nous excluons de nos considérations les obstacles parallèles au courant: $\Psi[l]$ ne doit être identique ni à 0, ni à π. Ces cas sont les seuls où s_0 puisse valoir 0 ou π; on a alors $z = f$.

enfin une constante a. Considérons les fonctions définies par (1,4), (1,5), (1,6), (1,8).

$\Phi(s)$ est discontinue ; par contre $\Psi[l(s)]$ vérifie le long du demi-cercle $|\zeta| = 1$. $\eta > 0$ une condition de Hölder d'exposant ν :

$$|\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]| \leqslant \mathrm{C}^{\underline{te}} |s - s'|^{\nu} ;$$

envisageons donc la fonction $\Omega(\zeta) = \Theta + iT$, qui est holomorphe pour $|\zeta| < 1$, dont la partie réelle Θ prend sur le cercle $|\zeta| = 1$ les valeurs $\Theta(e^{\pm is}) = \Psi[l(s)]$ et dont la partie imaginaire T s'annule avec ζ : la formule de Schwarz-Poisson nous donne :

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi[l(s)] \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos s + \zeta^2} ds . \tag{1,10}$$

De cette formule et du fait que $\Psi[l(s)]$ satisfait à une condition de Hölder d'exposant ν résulte, d'après Fatou[21]) et M. Priwaloff[22]), que $\Omega(\zeta)$ vérifie une condition de Hölder d'exposant ν sur toute la région $|\zeta| \leqslant 1$:

$$|\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta')| \leqslant \mathrm{C}^{\underline{te}} |\zeta - \zeta'|^{\nu} .$$

Les relations (1,5), (1,8), (1,10) donnent

$$\omega(\zeta) = \Omega(\zeta) - i \log \frac{1 - \zeta e^{is_0}}{e^{is_0} - \zeta} . \tag{1,11}$$

La seconde relation (1,4) peut donc s'écrire:

$$dz = a\, e^{i\Omega(\zeta)} \left[\frac{1}{2} (\zeta e^{is_0} + \zeta^{-1} e^{-is_0}) - 1 \right] \cdot \left[\zeta - \zeta^{-1} \right] \frac{d\zeta}{\zeta} . \tag{1,12}$$

Par suite la frontière image dans le plan z du demi-cercle $|\zeta| = 1$, $\eta > 0$ est une courbe; choisissons s pour paramètre de cette courbe $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$; son abscisse curviligne L est définie par la relation

$$\frac{dL}{ds} = 4\, a\, e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s + s_0}{2} \sin s , \tag{1,13}$$

où l'on a, d'après (1,6), (1,8) et (1,10)

---

21) *Fatou*, Acta math., t. 30 (1906).

22) *Priwaloff*, Bulletin de la Société math. de France, t. 44 (1916), p. 100—103.

$$(1,14) \qquad \pi s_0 = \int_0^{\pi} \Psi[l(s)]\, ds \ ,$$

$$(1,15) \qquad T(e^{is}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \Psi[l(s')] - \Psi[l(s)] \right\} \frac{\sin s}{\cos s' - \cos s}\, ds' \ ;$$

l'angle que cette courbe fait avec $0x$ est $\Psi[l(s)]$. Cet angle, comme celui des lignes libres, vaut au moins 0, au plus π. Le domaine que délimitent cette courbe et les lignes libres ne peut donc se recouvrir: la frontière de ce domaine est une courbe à tangente continue sans point double.

Les relations (1,4), (1,5), (1,6), (1,8) définissent donc le sillage le plus général; elles constituent une solution indéterminée du problème du sillage.

Il y a plus: soit un obstacle, dont la forme et l'orientation sont définis par une fonction $\Psi[l]$ $(b \leqq l \leqq c)$ (Cf. § 2); choisissons arbitrairement une constante a et une fonction $l(s)$ qui croît de b à c quand s croît de 0 à π et qui vérifie une inégalité du type (1,9); le sillage défini par (1,4), (1,5), (1,6), (1,8) correspond à un obstacle qui a la même allure que l'obstacle donné: nous entendons par là que la tangente prend long des deux obstacles la même suite de directions; la multiplication de a par une constante convenable permet de donner à ces deux obstacles la même longueur. Le sillage ainsi associé aux fonctions $\Psi[l]$ et $l(s)$ constitue donc, quel que soit $l(s)$, *une solution approchée du problème du sillage*, posé pour l'obstacle que définit la fonction $\Psi[l]$; cette solution est celle de M. Villat; moyennant un choix habile de $l(s)$ elle sera pratiquement très satisfaisante, la simplicité étant en Hydrodynamique aussi importante que la précision.

Cette solution n'est exacte que si les choix de a et de $l(s)$ sont tels que $l(s)$ soit identique à la fonction $L(s)$ que définissent les relations (1,13), (1,14) et (1,15): cette condition n'est autre que l'équation intégro-différentielle à laquelle M. Villat, en poursuivant les travaux de M. Levi-Civita, a ramené la résolution rigoureuse du problème du sillage:

$$(1,16) \qquad \frac{dl}{ds} = 4\, a\, e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s + s_0}{2} \sin s \ .$$

10° Equation fonctionnelle du problème

Introduisons des notations qui faciliteront le maniement de cette équation intégro-différentielle.

L'obstacle sera l'arc $b \leqq l \leqq c$ d'une courbe illimitée, dont la forme et l'orientation seront définies par la donnée de son angle avec $0x$ en fonction de son abscisse curviligne: $\Psi[l]$. Désignons par C_Ψ, C'_Ψ, les plus petites constantes telles que

$$|\Psi[l_1] - \Psi[l_2]| \leqslant C_\Psi \, |l_1 - l_2|^\mu, \; |\Psi'[l_1] - \Psi'[l_2]| \leqslant C'_\Psi \, |l_1 - l_2|^\mu ,$$

et nommons „norme de $\Psi[l]$" la grandeur

$$\| \Psi[l] \|_{1,\mu} = \{ \text{Max.} \, |\Psi| + C_\Psi \} + \{ \text{Max.} \, |\Psi'| + C'_\Psi \} .$$

Nous supposerons que $\Psi[l]$ appartient à l'espace abstrait $E_{1,\mu}$ des fonctions telles que cette norme existe.

Nous utiliserons un second espace abstrait E_ν; il sera linéaire, normé et complet comme le précédent. Il se composera de l'ensemble des fonctions $l(s)$, définies pour $0 \leqslant s \leqslant \pi$, qui possèdent une norme finie, $\| l(s) \|_\nu$, au sens que voici: ν étant la constante que nous avons choisie arbitrairement au § 8 $(1 | 2\mu < \nu < 1)$, soit c_l la plus petite constante telle que

$$| l(s_1) - l(s_2) | \leqslant c_l \, | \cos s_1 - \cos s_2 |^\nu ;$$

nous posons

$$\| l(s) \|_\nu = \text{Max} \, | l(s) | + c_l .$$

Etant donnés un élément $l(s)$ de E_ν, (1,14) définit une constante s_0 et (1,15) définit une fonction $T(e^{is})$; d'après le théorème déjà cité de Fatou-Priwaloff $T(e^{is})$ vérifie, par rapport à s, une condition de Hölder d'exposant ν; (1,13) définit alors des fonctions croissantes $L(s)$ qui dépendent d'une constante d'intégration additive et de la constante multiplicative a; il existe une et une seule de ces fonctions dont les valeurs pour $s = 0$ et $s = \pi$ soient b et c; elle correspond au choix suivant de a

$$(1,17) \qquad c - b = 4a \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s + s_0}{2} \sin s \, ds \; ;$$

nous désignerons par $\qquad \mathsf{V}\{ l(s) , \; \Psi[l], b, c \}$

la transformation fonctionnelle qui fournit cette fonction $L(s)$ à partir des éléments [23]) $l(s)$, $\Psi[l]$, b et c, lesquels sont respectivement un point de E_ν, un point de $E_{1,\mu}$ et deux constantes réelles.

[23]) Il importe de bien remarquer que $l(s)$ n'est plus nécessairement une fonction croissante, que $\Psi(l)$ n'est plus nécessairement compris entre 0 et π, comme c'était le cas au cours des paragraphes précédents.

Le problème du sillage équivaut à la résolution de l'équation suivante: étant donnés ν, $\Psi[l]$, b et c, et sous réserve que l'on a

$$1/2\mu < \nu < 1, \quad 0 \leqslant \Psi[l] \leqslant \pi, \quad b < c,$$

trouver un point $l(s)$ de E_ν tel que

$$l(s) = \mathsf{V}\{\, l(s),\ \Psi[l], b, c\}.$$

11° Propriétés fonctionnelles de la transformation V

Continuité complète de V. Il est facile de vérifier que la transformation V fournit un point de E_ν qui dépend continûment des arguments de V; cette continuité résulte d'ailleurs de la différentiation de V que nous effectuerons à la fin de ce paragraphe.

Les fonctions $L(s) = \mathsf{V}\{\, l(s), \Psi[l], b, c\}$ sont des éléments particuliers de E_ν : la dérivée $dL/d\,(\cos s)$ existe et est continue; les maxima de $|\,L(s)\,|$, $|\,dL\,/\,d\,(\cos s)\,|$ peuvent être majorés au moyen des quatre grandeurs $||\,l(s)\,||_\nu$, $||\,\Psi[l]\,||_{1,\mu}$, $|b|$, et $|c|$. Tout ensemble de valeurs de $l(s)$, $\Psi[l]$, b, c sur lequel ces quatre grandeurs sont bornées est donc transformé continûment par V en un sous-ensemble compact de E_ν. On exprime cette propriété en disant que V est complètement continue.

Différentiation[24]) *de* V. Nous allons comparer le système d'arguments $l(s)$, $\Psi[l]$, b, c à un système voisin, que nous désignerons par l'indice 1. Représentons les accroissements des arguments par les symboles

$$\delta l(s) = l_1(s) - l(s), \quad \Delta\Psi[l] = \Psi_1[l] - \Psi[l], \quad \delta b = b_1 - b, \quad \delta c = c_1 - c.$$

La partie principale de l'accroissement de $\Psi[l(s)]$ est

$$\delta\Psi[l(s)] = \Psi'[l(s)]\ \delta l(s) + \Delta\Psi[l(s)];$$

cette fonction appartient à l'espace $\mathsf{E}_{\mu\nu}$.

La partie principale de l'accroissement de $T(e^{is})$ est, d'après (1, 15)

$$\delta T(e^{is}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\, \delta\Psi[\,l(s')\,] - \delta\Psi[\,l(s)\,]\,\}\ \frac{\sin s}{\cos s' - \cos s}\, ds' \ ;$$

en vertu du théorème de Fatou-Priwaloff[22]) $\delta T(e^{is})$ appartient aussi

[24]) Cette différentiation sera utilisée au début du chapitre V; la démonstration des théorèmes d'existence n'en fait pas usage.

[22]) *Priwaloff*, Bulletin de la Société math. de France, t. 44 (1916), p. 100—103.

à $\mathsf{E}_{\mu\nu}$. Les équations (1,14) et (1,17) différentiées définissent deux constantes δs_0, δa:

$$\pi\, \delta s_0 = \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)]\, ds \ ,$$

$$\delta c - \delta b = 4a \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s+s_0}{2} \sin s \left[\frac{\delta a}{a} - \delta T(e^{is}) + \operatorname{cotg} \frac{s+s_0}{2} \delta s_0\right] ds \ .$$

Soit enfin $\delta L(s)$ la fonction qui satisfait aux trois conditions ci-dessous, dont la première résulte de la différentiation de (1,13)

$$\frac{d\delta L}{ds} = 4a\, e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s+s_0}{2} \sin s \left[\frac{\delta a}{a} - \delta T(e^{is}) + \operatorname{cotg} \frac{s+s_0}{2} \delta s_0\right],$$

$$\delta L(0) = \delta b \ , \ \delta L(\pi) = \delta c \ ;$$

l'équation de définition de δa exprime la compatibilité de ces trois conditions.

La lettre A nous servira à représenter diverses fonctions continues de μ, ν, $\|l(s)\|_\nu$, $\|\Psi[l]\|_{1,\mu}$, $|b|$, $|c|$, $\|l_1(s)\|_\nu$, $\|\Psi_1[l]\|_{1,\mu}$, $|b_1|$, $|c_1|$. Nous avons, en posant

$$r(t, s) = \Psi_1' [l(s) + t\,\delta l(s)] - \Psi'[l(s)],$$

$$\Psi_1[l_1(s)] - \Psi[l(s)] - \delta\Psi[l(s)] = \delta l(s). \int_0^1 r(t, s)\, dt.$$

Or

$$|r(t, s)| < A \mid \delta l(s) \mid^\mu + |\Delta \Psi'[l(s)]| \, ;$$

donc, *a fortiori*,

$$|\, r\,(t, s_1) - r\,(t, s_2)\,| < A.\ \{\|\delta l\|_\nu + \|\Delta \Psi\|_{1,\mu}\}^\mu;$$

d'autre part $r\,(t, s)$ appartient à $\mathsf{E}_{\mu\nu}$:

$$|r(t, s_1) - r(t, s_2)| < A. \mid \cos s_1 - \cos s_2 |^{\mu\nu}.$$

Soit ϱ une constante inférieure à 1 ; nous la choisirons supérieure à $1/2\,\mu\nu$, pour satisfaire aux exigences du paragraphe 14 ; les deux inégalités précédentes entraînent

$$|\, r\,(t, s_1) - r\,(t, s_2)| < A. \mid \cos s_1 - \cos s_2 |^{\mu\nu\varrho} \cdot \{\, \|\delta l\|_\nu + \|\Delta \Psi\|_{1,\mu}\}^{\mu(1-\varrho)}$$

Cette inégalité portée dans l'intégrale ci-dessus donne

(1,18)

$$\|\Psi_1[l_1(s)] - \Psi[l(s)] - \delta\Psi[l(s)]\|_{\mu\nu\varrho} < A. \|\delta l\|_\nu \cdot \{\|\delta l\|_\nu + \|\Delta\Psi\|_{1,\mu}\}^{\mu(1-\varrho)}.$$

Par conséquent

$$|s_{1,0} - s_0 - \delta s_0| + \text{Max.}\ |T_1(e^{is}) - T(e^{is}) - \delta T(e^{is})| <$$
$$< A.\{||\delta l||_\nu + ||\Delta \Psi||_{1,\mu}\}^{1+\mu(1-\varrho)}.$$

D'où

$$|a_1 - a - \delta a| \quad < A.\{||\delta l||_\nu + ||\Delta \Psi||_{1,\mu} + |\delta b| + |\delta c|\}^{1+\mu(1-\varrho)}.$$

Par suite

$$\text{Max.}\ |L_1 - L - \delta L| + \text{Max.}\left|\frac{d(L_1 - L - \delta L)}{d(\cos s)}\right| <$$
$$< A\{||\delta l||_\nu + ||\Delta \Psi||_{1,\mu} + |\delta b| + |\delta c|\}^{1+\mu(1-\varrho)};$$

nous avons donc, quand $l_1(s)$, $\Psi_1[l]$, b_1, c_1, tendent respectivement vers $l(s)$, $\Psi[l]$, b, c,

(1,19)
$$\lim.\ ||L_1(s) - L(s) - \delta L(s)||_\nu \cdot \{||\delta l||_\nu + ||\Delta \Psi||_{1,\mu} + |\delta b| + |\delta c|\}^{-1} = 0.$$

Posons

$$\delta L = \mathsf{W}\{\delta l(s), \Delta \Psi[l], \delta b, \delta c;\ \Psi[l(s)], b, c\};$$

la transformation fonctionnelle W fournit, comme V, des fonctions appartenant à E_ν; comme V elle est complètement continue; elle est linéaire et homogène par rapport à ses quatre premiers arguments; la relation (1,19) exprime que c'est, au sens de M. Fréchet, la différentielle de la transformation V.

Remarque. Dans le cas particulier où l'obstacle est rectiligne W est indépendant de δl.

Propriétés définissant W. L'équation de définition de $\delta T(e^{is})$ exprime que $\delta \Psi[l(s)] + i\,\delta T(e^{is})$ sont les valeurs sur la demi-circonférence $\zeta = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$ d'une fonction $\delta \Omega(\zeta)$ holomorphe à l'intérieur de cette demi-circonférence, réelle sur son diamètre; l'équation de définition de δs_0 exprime que $\delta s_0 = \delta \Omega(0)$. Nous pouvons donc définir la fonction $\delta L(s)$ que fournit la transformation W par l'ensemble des propriétés suivantes: il existe une fonction $\delta \Omega(\zeta)$, holomorphe pour $|\zeta| < 1$, $\eta > 0$, höldérienne pour $|\zeta| \leqslant 0$, qui est réelle sur le diamètre $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$ et dont les valeurs frontières sur la demi-circonférence $\zeta = e^{is}$ sont

$$(1,20) \qquad \delta \Omega(e^{is}) = \Psi'[l]\,\delta l + \Delta \Psi[l] - i\frac{d\delta L}{dl} + i\frac{\delta a}{a} + i \operatorname{cotg} \frac{s + s_0}{2}\,\delta s_0;$$

on a en outre

(1,21) $$\delta L(0) = \delta b, \ \delta L(\pi) = \delta c,$$

(1,22) $$\delta s_0 = \delta \Omega(0).$$

Définissons une fonction $\delta\omega(\zeta)$ par la relation (1,11) différentiée

(1,23) $$\delta\omega(\zeta) = \delta\Omega(\zeta) - \frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos s_0+\zeta^2}\,\delta s_0\,;$$

on peut substituer à la formule (1,22) la suivante

(1,24) $$\delta\omega(0) = 0.$$

II. Mise en équation du problème de la proue

12° Préliminaires

Soit un sillage correspondant à un obstacle donné. La fonction $z(f)$ est analytique le long des lignes libres. Son allure à l'infini est très simple à préciser, grâce aux équations (1,4). Sa nature le long de l'obstacle se déduit des nombreuses études qui ont porté sur les voisinages des frontières de deux domaines donnés se correspondant conformément. Les points de détachement sont donc les seuls points que nous devions examiner.

Nous savons que $l(s)$ et par suite $\Omega(\zeta)$ vérifient une condition de Hölder d'exposant ν (§ 8 et 9). Il en résulte, par l'équation de M. Villat (1,16), que dl/ds vérifie aussi une telle condition; donc que $\frac{d\Psi[l(s)]}{ds} = \Psi'[l(s)]\frac{dl}{ds}$ vérifie une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$. La partie imaginaire de $\zeta\frac{d\Omega}{d\zeta}$ vérifie également une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$, puisqu'elle vaut $\pm\Psi'[l(s)]\,dl/ds$ au point $e^{\pm is}$ et que cette fonction $\Psi'[l(s)]\,dl/ds$ s'annule pour $s=0$ et pour $s=\pi$. Le théorème de Fatou-Priwaloff permet d'en déduire que $\zeta\frac{d\Omega}{d\zeta}$ et par suite

(2,1) $$\frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{d\omega}{d\zeta} + \frac{2\sin s_0}{1-2\zeta\cos s_0+\zeta^2}$$

vérifient une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$ sur tout le cercle $|\zeta| \leqq 1$.

Digression. *Supposons pour un instant $\Psi[l]$ analytique*; le raisonnement se poursuit, basé sur l'équation de M. Villat et le théorème de Fatou-Priwaloff: on démontre successivement que les fonctions suivantes satisfont une condition de Hölder : $\frac{d\,T(e^{is})}{ds}$, donc, d'après (1,16) $\frac{d^2 l}{ds^2}$, puis $\frac{d^2\Psi[l(s)]}{ds^2}$, la partie réelle de $\frac{d^2\Omega}{(d\log\zeta)^2}$, $\frac{d^2\Omega}{d\zeta^2}$, $\frac{d^2 T(e^{is})}{ds^2}$, donc d'après (1,16) $\frac{d^3 l}{ds^3}$, puis enfin $\frac{d^3\Psi[l(s)]}{ds^3}$. Mais en général la partie imaginaire de $\frac{d^3\Omega}{(d\log\zeta)^3}$ a une discontinuité aux points $\zeta = \pm 1$ et $\frac{d^3\omega}{d\zeta^3}$ a un infini logarithmique en chacun des points de détachement.

Un point de détachement ne présente pas cette singularité quand en ce point

$$\frac{d^3\Psi[l(s)]}{ds^3} = 0\,.$$

Nous transformerons cette condition en remarquant que d'après (1,3)

$$|dl| = e^{-\tau}|df|$$

c'est-à-dire

$$dl = 2a\,e^{-\tau}|\cos s - \cos s_0|\sin s\,ds\;;$$

cette équation, qui n'est autre que l'équation de M. Villat, fournit le développement limité au voisinage de la valeur $s = 0$:

$$l(s) = \text{fonction paire de } s - \frac{2a}{3}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_0(1-\cos s_0)\,s^3 + \cdots\;;$$

$$\text{d'où } \Psi[l(s)] = \text{fonction paire de } s - \frac{2a}{3}\Psi'[b]\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_0(1-\cos s_0)\,s^3 + \cdots$$

par suite la condition $\frac{d^3\Psi[l(s)]}{ds^3} = 0$ équivaut à la suivante: $\Psi'[b]\cdot\omega'(1) = 0$.

Pour que $\frac{d^3\omega}{d\zeta^3}$ soit bornée au voisinage d'un point de détachement il faut et il suffit donc que la courbure de l'obstacle y soit nulle ou bien qu'on y ait $\omega' = 0$.

En poursuivant on aboutit aux conclusions suivantes: Considérons la suite des dérivées d'ordre impair $\frac{d^{2p+1}\omega}{(d\log\zeta)^{2p+1}}$ $(p \geqq 0)$; soit $2m+3$ l'ordre de la première d'entre elles qui n'est pas continue au point de détachement; soit $2n+1$ l'ordre de la première d'entre elles qui n'y est pas continue et nulle; m (ou n) est posé égal à $+\infty$ si toutes ces dérivées y sont continues[25]) (ou continues et nulles). On a $0 \leq n \leq m$. Les dérivées $\frac{d^q\omega}{(d\log\zeta)^q}$ d'ordres inférieurs à $2m+3$ vérifient une condition de Hölder au point de détachement. Si m est fini la dérivée $\frac{d^{2m+3}\omega}{(d\log\zeta)^{2m+3}}$ y présente un infini logarithmique. Si la courbure de l'obstacle n'est pas nulle au point de détachement, on a $n = m$.

L'allure du détachement dépend de n: au voisinage du point de détachement l'obstacle et la ligne de jet sont les transformés d'un segment de l'axe des f réels par la fonction $z(f) = \int e^{i\omega}df$. Si $n = +\infty$ toutes les dérivées de $z(f)$ sont continues

[25]) On a en général $m = n = 0$; les cas $n = \infty$ et $m = \infty$ sont très exceptionnels. Toutefois $m = \infty$ quand l'extrémité de l'obstacle est un segment rectiligne; alors $\Psi[l(s)]$ et par suite la partie réelle de $\Omega(\zeta)$ sont constants au voisinage du point de détachement; $\omega(\zeta)$ y est donc analytique.

au point de détachement. Sinon $\frac{d^{2n+1}\omega}{(d\log\zeta)^{2n+1}}$ y est continue, mais non nulle ; donc $\frac{d^{n+1}z}{df^{n+1}}$ y est continue alors que $\frac{d^{n+2}z}{df^{n+2}}$ y devient infinie. La ligne libre a au point de détachement un contact d'ordre $n+1$ avec le prolongement de l'obstacle ; si n est fini son élément de contact d'ordre $n+2$ est singulier et c'est le signe de $\frac{d^{2n+1}\omega}{(d\log\zeta)^{2n+1}}$, calculé au point de détachement, qui indique si la ligne libre est située au voisinage de ce point du côté amont ou du côté aval de l'obstacle.

Le paragraphe ci-dessous va montrer comment cette conclusion reste en partie valable quand on ne suppose plus l'obstacle analytique.

13° Courbure d'une ligne libre en son point de détachement

L'angle que fait la ligne libre supérieure (ou inférieure) avec $0x$ est ω (ou $\omega+\pi$) ; son abscisse curviligne est f (ou $-f$) ; sa courbure est donc

$$\frac{d\omega}{df}\left(\text{ou } -\frac{d\omega}{df}\right).$$

Déterminons l'allure au point $\zeta = 1$ de la fonction analytique

$$(2,2)\qquad \frac{d\omega}{df} = \frac{d\omega}{d\zeta}\,\frac{2\cdot\zeta^3}{\varkappa(\zeta^2-1)(\zeta^2-2\zeta\cos s_0+1)}.$$

Au voisinage du point $\zeta = 1$, $\frac{d\omega}{d\zeta}$ vérifie une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$ (*cf* § 12) et nous avons donc

$$(2,3)\qquad \left|\frac{d\omega}{df} - \frac{\omega'(1)}{4a(1-\cos s_0)}\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right| < \mathrm{C^{te}}\,|\zeta-1|^{\mu\nu-1}.\quad \left(\omega' = \frac{d\omega}{d\zeta}\right).$$

D'autre part[26]) sur le demi-cercle $\zeta = e^{is}$ $(0 < s < \pi)$

$$\mathrm{R}\left(\frac{d\omega}{df}\right) = \Psi'[l]\frac{dl}{df}$$

or d'après (1,3) $|df| = e^{\tau}|dl|$; d'où

$$\mathrm{R}\left(\frac{d\omega}{df}\right) = \Psi'[l]\cdot e^{-\tau}\cdot \text{signe de}\,\frac{df}{dl}.$$

[26]) R signifie „partie réelle de . . .“

$\mathsf{R}\left(\frac{d\omega}{df}\right)$ reprend ces mêmes valeurs sur le demi-cercle complémentaire; le long du cercle $|\zeta| = 1$ et au voisinage du point $\zeta = 1$, $\mathsf{R}\left(\frac{d\omega}{df}\right)$ vérifie donc une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$. Introduisons une fonction $W(\zeta)$ qui présente les caractères suivants : elle est analytique pour $|\zeta| < 1$; pour $|\zeta| \leqslant 1$ elle vérifie une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$; elle est réelle en même temps que ζ ; sa partie réelle vaut $\mathsf{R}\left(\frac{d\omega}{df}\right)$ le long de $|\zeta| = 1$, au voisinage de $\zeta = 1$. La fonction

$$\frac{d\omega}{df} - \frac{\omega'(1)}{4a(1-\cos s_0)}\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - W(\zeta)$$

a sa partie réelle nulle le long de ce cercle, au voisinage de $\zeta = 1$; d'après le principe de symétrie elle existe et est holomorphe dans un petit cercle pointé $0 < |\zeta - 1| < \varepsilon$; elle y vérifie une inégalité semblable à (2,3) ; elle est donc holomorphe au point $\zeta = 1$. Par définition $W(1) = -\Psi'[b]$. On a donc le développement

$$\frac{d\omega}{df} = \frac{\omega'(1)}{4a(1-\cos s_0)}\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \Psi'[b] + \cdots \tag{2,4}$$

les points ..... représentant une fonction qui s'annule pour $\zeta = 1$ et qui vérifie une condition de Hölder d'exposant $\mu\nu$ dans le cercle $|\zeta| \leqslant 1$, au voisinage du point $\zeta = 1$.

La ligne de jet se détache donc vers l'amont, vers l'aval ou en proue suivant que $d\omega/d\zeta$ est positif, négatif ou nul au point de détachement.

N.B. Quand le détachement est en proue $\omega'(1) = 0$, $d\omega/df$ est continue au point de détachement; et la formule (2,4) prouve que la courbure de la ligne de jet y est égale à celle de l'obstacle (Villat).

14° Calcul de $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$

Considérons le sillage associé à des fonctions $\Psi[l]$ et $l(s)$ données. Calculons $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$ à l'aide de ces données. Nous avons d'après (1,5)

$$\frac{\omega(1) - \omega(\zeta)}{1-\zeta^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\Phi(0) - \Phi(s)]\frac{ds}{1 - 2\zeta\cos s + \zeta^2};$$

Faisons tendre ζ vers 1 par des valeurs réelles, et tenons compte de l'inégalité, déduite de (1,7), (1,8) et (1,9):

$$|\Phi(0) - \Phi(s)| < \mathrm{C^{te}} \, |1 - \cos s|^{\nu} \qquad (1/2 < \nu < 1);$$

opérons de même au point $\zeta = -1$; nous obtenons les deux formules

$$(2,5) \qquad \begin{aligned} \omega'(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\Phi(0) - \Phi(s)\} \frac{ds}{\sin^2(s/2)}; \\ \omega'(-1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\Phi(s) - \Phi(\pi)\} \frac{ds}{\cos^2(s/2)}. \end{aligned}$$

Les relations (1,8) permettent de donner à (2,5) la forme suivante [27])

$$(2,6) \qquad \begin{aligned} \omega'(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\Psi[l(0)] - \Psi[l(s)]\} \frac{ds}{\sin^2(s/2)} - \operatorname{cotg}\frac{s_0}{2}; \\ \omega'(-1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)]\} \frac{ds}{\cos^2(s/2)} - tg\frac{s_0}{2}. \end{aligned}$$

Les seconds membres de (2,6) sont des fonctionnelles de $l(s)$ et $\Psi[l]$ qui sont continues sauf quand $\Psi[l]$ se réduit identiquement à 0 ou à π.

Quelques cas où la nature du détachement est évidente a priori : Supposons que $\Psi[b]$ soit la plus petite des valeurs que prend $\Psi[l]$ sur la partie de l'obstacle inférieure au point de bifurcation (c'est-à-dire pour $0 \leqslant s \leqslant s_0$); ceci a lieu par exemple si $\Psi[b] = 0$; on a alors

$$\Phi(0) \leqslant \Phi(s); \text{ donc d'après (2,5), } \omega'(1) < 0.$$

Si $\Psi[b] = \pi$ nous avons $\Phi(0) = 0$; donc

$$\omega'(1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(s) \frac{ds}{\sin^2\frac{s}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\sin^2\frac{s_0}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{s}{2}}\right] \Phi(s)\, ds;$$

or le crochet a le signe de $\Phi(s)$; donc $\omega'(1) > 0$.

[27]) Les deux quantités $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$ intervenant fréquemment dans les travaux de M. *Villat*, signalons l'aspect qu'elles y présentent: M. *Villat* se limite en général au cas symétrique où elles sont égales à

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin s} \frac{d\Phi}{ds}\, ds - 1.$$

Différentiation des fonctionelles $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$.

L'inégalité (1,18) prouve [28]) que les fonctionnelles, $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$ possèdent des différentielles de Fréchet, $\delta\omega'(1)$ et $\delta\omega'(-1)$. Nous avons [29])

$$(2,7)\qquad \delta\omega'(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\delta\Psi[l(0)] - \delta\Psi[l(s)]\}\frac{ds}{\sin^2(s/2)} + \frac{1}{2}\frac{\delta s_0}{\sin^2\frac{s_0}{2}}.$$

Cette expression et l'expression analogue de $\delta\omega'(-1)$ permettent de vérifier que $\delta\omega'(1)$ et $\delta\omega'(-1)$ sont les dérivées[30]), aux points ± 1, de la fonction $\delta\omega(\zeta)$ définie par (1,23).

15° Equations fonctionnelles du problème de la proue

Etant donnés un élément $l(s)$ de E_ν et un élément $\Psi[l]$ de $E_{1,\mu}$, posons

$$\mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} = \omega'(1)\sin\frac{s_0}{2}, \quad \mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} = \omega'(-1)\cos\frac{s_0}{2};$$

c.-à.-d.

$$(2,8)\qquad \begin{aligned} \mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} &= \frac{1}{2\pi}\sin\frac{s_0}{2}\int_0^\pi \{\Psi[l(0)] - \Psi[l(s)]\}\frac{ds}{\sin^2(s/2)} - \cos\frac{s_0}{2}, \\ \mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} &= \frac{1}{2\pi}\cos\frac{s_0}{2}\int_0^\pi \{\Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)]\}\frac{ds}{\cos^2(s/2)} - \sin\frac{s_0}{2}. \end{aligned}$$

Ces fonctionnelles sont continues par rapport à leurs arguments. La condition pour qu'en l'extrémité inférieure (ou supérieure) de l'obstacle le détachement soit vers l'aval, vers l'amont ou en proue est que B (ou C) soit négatif, positif ou nul. Et ces propriétés subsistent, même quand l'obstacle devient parallèle au courant. Il y a donc avantage à considérer B et C au lieu de $\omega'(1)$ et $\omega'(-1)$.

Le problème de la proue se formule comme suit: on donne ν, $\Psi[l]$, b_0, c_0 $(1/2\mu < \nu < 1;\ 0 \leqslant \Psi[l] \leqslant \pi;\ b_0 < c_0)$; on demande de trouver un point $l(s)$ de E_ν et deux constantes b et c qui vérifient l'un des quatre systèmes écrits ci-dessous

---

[28]) Car nous avons l'inégalité $\mu\nu\varrho > 1/2$.

[29]) On ne peut guère restreindre les hypothèses faites sur la régularité de l'obstacle sans que la définition de $\delta\omega'(1)$ perde toute signification; or le chapitre VI est entièrement basé sur l'existence de $\delta\omega'(1)$.

[30]) Calculées le long du diamètre réel.

$$(2,9) \qquad l(s) = \mathsf{V}\{l(s), \Psi[l], b, c\}, \qquad \mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} = 0,$$
$$\mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} = 0, \qquad b_0 < b < c < c_0;$$

$$(2,10) \qquad l(s) = \mathsf{V}\{l(s), \Psi[l], b_0, c\}, \qquad \mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} \leqq 0,$$
$$\mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} = 0, \qquad b_0 = b < c < c_0;$$

$$(2,11) \qquad l(s) = \mathsf{V}\{l(s), \Psi[l], b, c_0\}, \qquad \mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} = 0,$$
$$\mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} \leqq 0, \qquad b_0 < b < c = c_0;$$

$$(2,12) \qquad l(s) = \mathsf{V}\{l(s), \Psi[l], b_0, c_0), \qquad \mathsf{B}\{l(s), \Psi[l]\} \leqq 0,$$
$$\mathsf{C}\{l(s), \Psi[l]\} \leqq 0, \qquad b_0 = b, c = c_0.$$

Soient b_1, c_1, b_2, c_2 les abscisses curvilignes des points B_1, C_1, B_2, C_2 que définit le paragraphe 3; le chapitre IV établira que le problème symétrique de la proue est résoluble même quand on impose à b et c les restrictions

$$(2,13) \qquad b < b_1 \qquad c_1 < c.$$

Il établira que le problème de la proue est résoluble même quand on impose à b et c les restrictions[31])

$$(2,14) \qquad b < b_2 \qquad c_2 < c.$$

III. Limitation (a priori) des inconnues

16° But du chapitre

Nous dirons qu'une *famille d'obstacles* est *bornée* quand les longueurs $c - b$ et les courbures $|\Psi'[l]|$ de ces obstacles sont bornées dans leur ensemble. Nous nous proposons d'établir le théorème suivant:

Théorème. *Soit une famille bornée d'obstacles. Les fonctions $l(s)$ correspondantes (s'il en existe) vérifient simultanément une même inégalité*

$$|l(s) - l(s')| \leqslant C\,|\cos s - \cos s'|^{\nu}.$$

En d'autres termes les normes $\|l(s)\|_{\nu}$ sont bornées dans leur ensemble.

[31]) Ces restrictions facilitent la résolution du problème.

L'inégalité de Hölder

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \right| < \left[\int_a^b |\varphi(x)|^{\frac{1}{1-\nu}} dx \right]^{1-\nu} \cdot \left[\int_a^b |\psi(x)|^{\frac{1}{\nu}} dx \right]^{\nu}$$

s'écrit, quand on pose $x = \cos s$, $\psi = 1$, $\varphi = dl/d(\cos s)$:

$$|\,l(s) - l(s')\,| < \left| \int_{\cos s}^{\cos s'} \left| \frac{dl}{d(\cos s)} \right|^{\frac{1}{1-\nu}} d(\cos s) \right|^{1-\nu} \cdot |\cos s - \cos s'|^{\nu} \;;$$

pour établir le théorème il suffit donc de majorer les intégrales

$$\int_{s=\pi}^{s=0} \left| \frac{dl}{d(\cos s)} \right|^{\frac{1}{1-\nu}} d(\cos s)\,.$$

Or nous avons l'équation de M. Villat (1,16),

$$\frac{dl}{ds} = 4\,a\,e^{-T(e^{is})} \sin^2 \frac{s+s_0}{2} \sin s\,.$$

Le théorème énoncé est donc un corollaire des deux faits suivants, que nous allons établir indépendamment l'un de l'autre:

1° Les coefficients a sont bornés dans leur ensemble (§ 17).

2° Les intégrales

$$\int_0^{\pi} e^{-(1-\nu)^{-1} T(e^{is})}\,ds \tag{3,1}$$

sont bornées dans leur ensemble (§ 18 à 21).

17° Majoration de a

Nous avons d'après la seconde formule (1,4)

$$c - b = 2\,a \int_0^{\pi} e^{-\tau}\,|\cos s - \cos s_0|\,\sin s\,ds\,. \tag{3,2}$$

La convexité de la fonction exponentielle permet, comme on sait, de tirer de (3,2) l'inégalité[32])

$$\log \frac{c-b}{2a\,(1+\cos^2 s_0)} > -\frac{1}{1+\cos^2 s_0} \int_0^{\pi} \tau(e^{is})\,|\cos s - \cos s_0|\,\sin s\,ds. \tag{3,3}$$

[32]) Cette inégalité exprime le fait suivant:
des masses infinitésimales $dm = \sin s\,|\cos s - \cos s_0|\,ds$ placées aux points $x(s) = \tau(s)$, $y(s) = e^{-\tau(s)}$ ont un centre de gravité situé dans le domaine $\log y > -x$.

Or $\int_{s_0}^{s} \tau(e^{is'})\ (\cos s' - \cos s_0)\ \sin s'\, ds'$ est égal, le long du cercle $\zeta = e^{is}$, à la partie imaginaire de la fonction

$$\Pi(\zeta) = -\frac{1}{2}\int_{e^{is_0}}^{\zeta} \omega(\zeta)\left[\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos s_0\right]\left[\zeta - \zeta^{-1}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

On a

$$\Pi(\zeta) = \frac{1}{4}\omega'(0)\,[\zeta - \zeta^{-1}] + \frac{1}{4}[\omega''(0) - 2\omega'(0)\cos s_0]\log\zeta + \Pi_1(\zeta),$$

$\Pi_1(\zeta)$ étant holomorphe pour $|\zeta| < 1$.

La relation (1,5), où $|\Phi(s)| < \pi$, entraîne les inégalités

$$\omega'(0) < 4, \quad \omega''(0) < 8.$$

La partie réelle de $\Pi_1(\zeta)$ sur le cercle $\zeta = e^{is}$ est

$$\int_{s_0}^{s} \theta(e^{is'})\ (\cos s' - \cos s_0)\ \sin s'\, ds';$$

cette fonction a une dérivée comprise entre -2π et $+2\pi$; le théorème de Fatou-Priwaloff déjà utilisé permet d'en déduire que, sur le cercle $|\zeta| \leqslant 1$, $|\Pi_1(\zeta)|$ est inférieur à une certaine constante numérique.

Il existe donc une constante numérique qui majore $|\Pi(\zeta)|$; on peut donc assigner une borne inférieure[33]) au second membre de (3,3). Par suite a peut être majorée en fonction de $b-c$. C. Q. F. D.

18° Lemme

Soit une fonction, $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + iT_1$, hölderienne pour $|\zeta| \leqslant 1$, holomorphe pour $|\zeta| < 1$, réelle pour $\zeta = 0$. Supposons que l'oscillation de $\Theta_1(e^{is})$ soit $2\tilde{\omega} < \pi$. Je dis que

$$\int_0^{2\pi} e^{-T_1(e^{is})}\, ds \leqslant 2\pi\,(\cos\tilde{\omega})^{-1}. \tag{3,4}$$

La fonction $-i\int_1^{\zeta} e^{i\Omega_1(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta}$ transforme le cercle $\zeta = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$ en un arc ouvert, Γ; l'origine de Γ est le point 0; l'extrémité de Γ est le point $2\pi e^{i\Theta_1(0)}$; la corde qui sous-tend Γ a donc pour longueur 2π.

[33]) J'ai cherché si l'on pouvait choisir cette borne égale à 0; il n'en est rien. Si ce choix avait été possible, il en serait résulté par (3,3) que la longueur de l'obstacle est toujours supérieure à celle de son image dans le plan f du potentiel complexe. Cette proposition est fausse elle aussi.

D'autre part Γ fait avec l'axe réel l'angle $\Theta_1(e^{is})$, dont l'oscillation est $2\tilde{\omega}$. Par suite la longueur de Γ vaut au plus $2\pi(\cos\omega)^{-1}$. Or le premier membre de (3,4) représente cette longueur. Notre lemme est donc établi.

Remarque. Supposons que la famille des obstacles donnés présente le caractère suivant: les oscillations des fonctions $\Psi[l]$, qui définissent ces obstacles, admettent une borne supérieure inférieure[34]) à $\pi(1-\nu)$; soit $2\tilde{\omega}(1-\nu)$. Envisageons un sillage correspondant à l'un de ces obstacles. Le lemme qui précède s'applique à la fonction $\Omega_1(\zeta) = (1-\nu)^{-1}\Omega(\zeta)$. L'intégrale (3,1) est identique au premier membre de (3,4). Le lemme ci-dessus suffit donc dans ce cas à établir le théorème du paragraphe 16.

19° Lemme sur la correspondance des frontières dans une représentation conforme

Il existe une fonction $\eta[\varepsilon]$, continue et nulle pour $\varepsilon = 0$, qui possède la propriété suivante: Soit F une variable complexe. Donnons-nous arbitrairement deux segments étrangers F_1F_2 et F_3F_4 de l'axe des F réels et une surface D^*, d'aire σ, qui soit l'image conforme du demi-plan $I(F) > 0$. Appelons Λ la plus courte longueur des chemins tracés sur D^* qui joignent l'image de F_1F_2 à l'image de F_3F_4. On a[35])

$$\Lambda < \sqrt{\sigma}\,\eta[-(F_1F_3F_4F_2)]. \tag{3,5}$$

Démonstration: Transformons conformément le demi-plan $I(F) > 0$ en un rectangle R d'un plan complexe $G + iH$, de façon que les points F_1, F_2, F_3, F_4 deviennent les sommets $0, \alpha, \alpha + i\beta, i\beta$ de R. Soit $M(G+iH)$ le module de la correspondance conforme qui représente R sur D^*. Nous avons

$$\Lambda^2 \leqslant \text{borne}\,\Big[\int_0^\beta M(G+iH)\,dH\Big]^2 \leqslant \text{borne}\,\beta\int_0^\beta M(G+iH)^2\,dH \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\alpha\int_0^\beta M(G+iH)^2\cdot dG\cdot dH = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\,.$$

---

[34]) Nous supposons au cours de tout le mémoire $1/2 < \mu\nu < 1$; mais seule la discussion du nombre des solutions du problème de la proue (chapitre VI) tomberait en défaut si nous choisissions ν arbitrairement voisin de 0.

[35]) (F_1, F_3, F_4, F_2) représente le rapport anharmonique des points F_1, F_3, F_4, F_2.

D'après la définition même de la fonction modulaire λ,

$$(F_1, F_3, F_4, F_2) = \lambda\left[\frac{i\beta}{\alpha}\right].$$

Or $-\lambda[ix]$ croît de 0 à $+\infty$ quand x croît de 0 à $+\infty$. Par conséquent nous avons

$$(3,6) \qquad -\lambda\left[i\frac{\Lambda^2}{\sigma}\right] \leqslant -(F_1, F_3, F_4, F_2),$$

et cette inégalité équivaut à une inégalité du type (3,5).

20° Construction d'un module de continuité pour la fonction $\Psi[l(s)]$

Considérons un sillage; nous allons lui appliquer le lemme ci-dessus. Nous représentons le demi-cercle $|\zeta| < 1, \eta > 0$ sur un demi-plan $I(F) > 0$ au moyen de la transformation $F = -\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$. Nous envisageons deux points $\zeta' = e^{is'}$, $\zeta'' = e^{is''}$ tels que $0 \leqslant s' < s'' \leqslant \pi$, $|\cos s' - \cos s''| < 1$; l'une des inégalités $\cos s' < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \cos s''$ est donc vérifiée; fixons les idées en admettant que $\cos s' < \frac{1}{2}$.

Les transformés des points ζ' et ζ'' sont $F_2 = -\cos s'$, $F_3 = -\cos s''$; posons $F_1 = -1$, $F_4 = \infty$; nous avons

$$-(F_1, F_3, F_4, F_2) = \frac{\cos s' - \cos s''}{1 - \cos s'}, \quad \text{donc}$$

$$(3,7) \qquad -(F_1, F_3, F_4, F_2) \leqslant 2(\cos s' - \cos s'').$$

Soit D le domaine situé en amont de l'obstacle et des lignes libres. Soient $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ les points de l'obstacle homologues de ζ' et ζ''. Traçons la sphère Σ de diamètre $c - b$ qui touche en z'' le plan z. Soit D^* la projection stéréographique[36]) de D sur Σ.

L'image de $\overline{F_1F_2}$ dans le plan z est un arc de l'obstacle qui appartient à la région D': $|z - z''| < c - b$, $y \leqq y'$. L'image de $\overline{F_3F_4}$ se compose de la ligne libre supérieure et d'une partie de l'obstacle; elle appartient donc au demi-plan D'': $y \geqslant y''$ (cf § 8). On vérifie sans peine que les projections sur Σ de D' et D'' sont distantes d'au moins $\frac{y'' - y'}{2}$. Par suite

$$(3,8) \qquad \frac{y'' - y'}{2} < \Lambda.$$

[36]) Le centre de projection est le point de Σ diamétralement opposé à z''.

Des inégalités (3,6), (3,7), (3,8) nous concluons que

$$(3,9) \qquad -\lambda\left[\frac{i}{4\pi}\frac{(y'-y'')^2}{(c-b)^2}\right] < 2\,|\cos s' - \cos s''\,| \text{ pour } |\cos s' - \cos s''| \leqslant 1$$

Cette inégalité (3,9) fournit un module de continuité pour l'ordonnée $y(s)$ des points de l'obstacle.

Nous avons le long de l'obstacle

$$\sin \Psi d\Psi = \Psi'[l]\,dy\,,$$

donc

$$|\cos \Psi[l(s')] - \cos \Psi[l(s'')]| \leqq |y' - y''|\,.\,\mathrm{Max}\,|\Psi'[l]|\,,$$

$$\frac{2}{\pi^2}\,|\Psi[l(s')] - \Psi[l(s'')]|^2 \leqq |y' - y''|.\quad \mathrm{Max}\,|\Psi'[l]|$$

Portons cette inégalité dans (3,9); il vient, si $|\cos s' - \cos s''| \leqq 1$,

$$(3,10) \qquad -\lambda\left[\frac{i}{\pi^5}\frac{|\Psi[l(s')] - \Psi[l(s'')]|^4}{(c-b)^2\cdot\mathrm{Max}\,|\Psi'[l]|^2}\right] < 2\,|\cos s' - \cos s'')\,.$$

Cette inégalité fournit pour la fonction $\Psi[l(s)]$ un module de continuité, qui dépend seulement de la grandeur $(c-b)$. Max $|\Psi'[l]|$.

21 Majoration des intégrales (3,1)

Considérons une famille bornée d'obstacles et les fonctions $\Psi[l(s)]$, $\vartheta(e^{is})$ correspondantes. Donnons-nous un nombre $\tilde{\omega} < \pi/2$. L'inégalité (3,10) entraîne l'existence d'une constante S possédant la propriété suivante: l'oscillation des fonctions $\Psi[l(s)]$, et par suite celle des fonctions $\Theta(e^{is})$ est inférieure à $2(1-\nu)\tilde{\omega}$ sur tous les arcs du cercle $|\zeta| = 1$ dont la longueur est $3\,S$.

Pour savoir majorer les intégrales (3,1), il suffit de savoir majorer les intégrales

$$(3,11) \qquad \int_{s_1}^{s_2} e^{-(1-\nu)^{-1}\,T(e^{is})}\,ds\,,$$

quand $s_2 - s_1 = S$. Soit $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + iT_1$ la fonction holomorphe pour $|\zeta| < 1$, qui est réelle quand ζ est réel et dont la partie réelle Θ_1 est définie comme suit: $\Theta_1(\zeta)$ est continue au voisinage du cercle $\zeta = e^{is}$; $\Theta_1(e^{is})$ vaut $(1-\nu)^{-1}\Theta(e^{is})$ pour $s_1 - S \leqslant \pm s \leqslant s_2 + S$; $\Theta_1(e^{is})$ est constante au voisinage des autres valeurs de s. Puisque $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$

on peut construire, en fonction de S et ν, une quantité qui majore $| T_1(e^{is}) - (1-\nu)^{-1} T(e^{is}) |$ pour $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Les intégrales (3,11) peuvent donc être majorées au moyen des intégrales $\int_{s_1}^{s_2} e^{-T_1(e^{is})} ds$. Or, d'après le paragraphe 18, celles-ci sont inférieures à $2\pi(\cos \tilde{\omega})^{-1}$.

On peut donc assigner une borne supérieure aux intégrales (3,1). C. Q. F. D.

IV. Theorèmes d'existence

22° Préliminaires

Nous allons maintenant établir que le problème du sillage possède toujours une solution au moins, et qu'il en est de même pour le problème de la proue. Nous n'expliciterons pas l'étude des problèmes symétriques: ceux-ci peuvent être traités par les raisonnements qui suivent, où l'on précise que tous les obstacles et tous les sillages envisagés sont symétriques.

Nous nous appuierons sur une théorie récente[37]) des équations fonctionnelles: Soit une équation de la forme

$$x = \mathsf{F}(x); \tag{4,1}$$

x étant un point d'un espace abstrait, linéaire, normé et complet, E; $\mathsf{F}(x)$ étant une transformation fonctionnelle, définie sur E, complètement continue. On associe à cette équation la transformation fonctionnelle

$$y = x - \mathsf{F}(x) \tag{4,2}$$

Soit dans E un domaine borné D dont la frontière ne comporte aucune solution de (4,1). On nomme indice total des solutions de (4,1) contenues dans D le degré topologique au point 0 de la transformation (4,2) envisagée sur D. Cet indice total reste constant quand on modifie continûment la transformation complètement continue $\mathsf{F}(x)$ sans qu'aucune solution de (4,1) atteigne la frontière de D; des théorèmes d'existence peuvent donc s'obtenir par le procédé suivant: on réduit continûment l'équation (4,1), sans qu'aucune de ses solutions atteigne la frontière de D, à une équation suffisamment simple pour qu'on puisse déterminer

[37]) *Leray-Schauder*, Annales de l'Ecole norm. sup., t. 51, 1934, p. 45.

l'indice total des solutions qu'elle a dans D; s'il diffère de 0, l'indice total des solutions que (4,1) a dans D, lui étant égal, diffère de 0; alors D contient nécessairement au moins une solution de (4,1).

23° Problème du sillage

Ce problème a été ramené (§ 10) à la résolution de l'équation

$$l(s) = \mathsf{V}\{\, l(s),\ \Psi[l],\ b_0,\ c_0 \}; \tag{4,3}$$

l'inconnue $l(s)$ appartient à l'espace linéaire, complet, et normé E_ν.

Envisageons l'équation, qui dépend continûment d'un paramètre k,

$$l(s) = \mathsf{V}\left\{ l(s)\,,\ k\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2}\,,\ b_0\,,\ c_0 \right\},\ (0 \leqslant k \leqslant 1)\,; \tag{4,4}$$

c'est l'équation du problème du sillage pour l'obstacle que définit la fonction

$$k\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2}\,. \tag{4,5}$$

Faire varier k de 1 à 0 revient à transformer continûment l'obstacle donné en un segment rectiligne de même longueur, perpendiculaire au courant.

La transformation $\mathsf{V}\{\, l(s),\ k\,\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2}\,,\ b_0, c_0 \}$ est complètement continue dans l'espace E_ν, comme nous l'avons constaté au § 11: la théorie de l'indice total s'applique. Le théorème du § 16 certifie que les solutions $l(s)$ de (4,4) sont toutes intérieures à l'hypersphère D que constituent les points de E_ν dont la distance à l'origine est inférieure à une certaine constante; l'indice total de ces solutions est donc indépendant de k.

Pour $k = 0$ V est un élément de E_ν indépendant de $l(s)$ et cet indice total vaut donc 1. Par suite il vaut encore 1 pour $k = 1$, et l'équation (4,3) a au moins une solution C. Q. F. D.

24° Problème de la proue. Cas où $b_2 = b_0$

Dans ce cas la valeur de b est imposée et le problème de la proue peut être rattaché au paragraphe précédent: Considérons les obstacles $\widehat{B_0C}$ tels que $c_2 \leqslant c \leqslant c_0$; la théorie des équations fonctionnelles permet

d'apporter la précision suivante au théorème qui affirme l'existence des sillages: il existe un ensemble *continu*[38]) de sillages qui correspondent à ces obstacles $\widehat{B_0C}$ en sorte qu'à chacun de ces obstacles soit associé au moins un sillage de ce continu. Pour tous ces sillages nous avons[39]) $\mathsf{B} < 0$. Nous avons[39]) $\mathsf{C} < 0$ quand $c = c_2$; si tous les sillages correspondant à $\widehat{B_0C_0}$ sont tels que $\mathsf{C} > 0$ il existe nécessairement un sillage du *continu* pour lequel $\mathsf{C} = 0$. Le problème de la proue est donc toujours possible quand $b_2 = b_0$.

Le cas où $c_2 = c_0$ se traite de la même façon.

Quand on a à la fois $b_2 = b_0$ et $c_2 = c_0$ le problème de la proue ne diffère pas du problème du sillage posé pour l'obstacle $\widehat{B_0C_0}$.

25° Problème de la proue

Le *cas général*, contrairement aux cas particuliers qui précèdent, ne peut être traité au moyen du théorème qui affirme l'existence du sillage[40]): nous allons devoir faire à nouveau un raisonnement de la même nature que le paragraphe 23.

Les inconnues du problème de la proue sont la fonction $l(s)$ et les paramètres b, c. L'espace abstrait E que nous considérerons aura pour élément l'ensemble x que constituent une fonction $l(s)$ de E_ν et deux constantes b, c. Par définition la norme d'un tel élément de E sera $||x|| = ||l(s)||_\nu + |b| + |c|$; si $x' = [l'(s), b', c']$ et $x'' = [l''(s), b'', c'']$ sont deux éléments de E leur combinaison linéaire à coefficients constants $h'x' + h''x''$ sera l'élément $[h'l'(s) + h''l''(s),\ h'b' + h''b'',\ h'c' + h''c'']$.

Il s'agit de trouver un élément de E qui vérifie les inégalités (2,14) et l'un des quatre systèmes (2,9), (2,10), (2,11), (2,12). Ce problème équivaut au suivant (dans l'énoncé duquel le symbole d^+ représente le nombre d quand $d > 0$ et 0 quand $d < 0$):

Trouver un élément $[l(s), b, c]$ de E qui appartient au domaine non borné

$$\mathsf{D}_2: \quad b < b_2, \quad c_2 < c, \quad b < c,$$

et qui satisfasse le système *unique*

[38]) Ceci signifie que les fonctions $l(s)$ correspondantes constituent un continu dans E_ν.

[39]) Cf. § 14, „Quelques cas où la nature du détachement est évidente a priori".

[40]) Toutefois le raisonnement de continuité du paragraphe précédent permet de résoudre le problème symétrique de la proue. Rappelons que dans le cas du problème symétrique nous remplaçons b_2 et c_2 par b_1 et c_1.

$$(4,6)\quad \begin{cases} l(s) = \mathsf{V}\{l(s)\,,\ \Psi[l]\,,\ b_0 + (b - b_0)^+\,,\ c_0 - (c_0 - c)^+\}\,, \\ \qquad \mathsf{B}\{l(s)\,,\ \Psi[l]\} + (b_0 - b)^+ = 0\,, \\ \qquad \mathsf{C}\{l(s)\,,\ \Psi[l]\} + (c - c_0)^+ = 0\,. \end{cases}$$

Envisageons le système qui dépend d'un paramètre $k (0 \leqslant k \leqslant 1)$

$$(4,7)\quad \begin{cases} l(s) = \mathsf{V}\left\{l(s)\,,\ k\Psi[l] + (1-k)\dfrac{\pi}{2}\,,\ b_0 + (b - b_0)^+, c_0 - (c_0 - c)^+\right\}\,, \\ \qquad \mathsf{B}\left\{l(s)\,,\ k\Psi[l] + (1-k)\dfrac{\pi}{2}\right\} + (b_0 - b)^+ = 0\,, \\ \qquad \mathsf{C}\left\{l(s)\,,\ k\Psi[l] + (1-k)\dfrac{\pi}{2}\right\} + (c - c_0)^+ = 0\,. \end{cases}$$

Chercher les points de D_2 qui le vérifient, c'est se poser le problème de la proue pour l'obstacle que définit la fonction (4,5); en effet quel que soit k le maximum et le minimum de la fonction (4,5) sont respectivement atteints pour $l = c_2$ et $l = b_2$. Le système (4,7) équivaut à une équation du type (4,1): la théorie de l'indice total s'applique.

Montrons qu'aucune solution de (4,7) ne peut appartenir à la frontière de D_2.

Supposons que nous ayons $b = c$; alors $b - b_0 \geqslant 0$, $c_0 - c \geqslant 0$; $b_0 + (b - b_0)^+ = c_0 - (c_0 - c)^+$; $(4,7)_1$ prouve que $l(s)$ est constant; donc d'après (2,8), l'une des quantités B, C est négative (l'autre est négative ou nulle); l'une des équations $(4,7)_2$, $(4,7)_3$ est impossible.

Supposons que nous ayons $b = b_2$; alors $b - b_0 \geqslant 0$; d'après $(4,7)_1$. $l(0) = b_2$; donc $\Psi[l(s)]$ atteint son minimum pour $s = 0$; ce minimum ne pouvant être π, il est impossible que $s_0 = \pi$; nous avons donc, d'après (2,8), $\mathsf{B} < 0$: $(4,7)_2$ ne peut pas être vérifiée. De même $(4,7)_3$ ne peut être vérifiée si $c = c_2$.

Considérons les solutions $[l(s), b, c]$ de (4,7) intérieures à D_2. Les obstacles correspondants constituent une famille bornée; d'après le théorème du paragraphe 16 les normes $\|l(s)\|_\nu$ sont donc bornées dans leur ensemble. Par suite les valeurs prises par B et C constituent un ensemble borné. Donc, en vertu de $(4,7)_2$, de $(4,7)_3$ et des inégalités définissant D_2 les valeurs prises par b et c sont bornées dans leur ensemble. Ainsi tout point de D_2 qui vérifie le système (4,7) appartient à la portion D de D_2 qui est intérieure à une certaine hypersphère

$$\|l(s)\|_\nu + |b| + |c| < \mathsf{C}^{\text{te}}.$$

L'indice total des solutions du problème, qui est l'indice total des solutions de (4,7) intérieures à D, est une constante indépendante de k, puisque le domaine D est borné et que sa frontière ne peut jamais contenir de solution de (4,7).

Déterminons cet indice en faisant dans (4,7) $k = 0$. La transformation fonctionnelle

$$\mathsf{V}\{\, l(s),\, k\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2},\, b_0 + (b-b_0)^+,\, c_0 - (c_0 - c)^+\}$$

est alors indépendante de $l(s)$ et les fonctionnelles

$$\mathsf{B}\left\{ l(s),\, k\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2}\right\},\quad \mathsf{C}\left\{ l(s),\, k\Psi[l] + (1-k)\frac{\pi}{2}\right\}$$

ont la valeur constante $-\sqrt{2}/2$; l'indice total des solutions de (4,7) est donc le degré topologique au point $b' = 0$, $c' = 0$ de la transformation

$$b' = -\sqrt{2}/2 + (b_0 - b)^+,\quad c' = -\sqrt{2}/2 + (c - c_0)^+,$$

envisagée sur le domaine à deux dimensions

$$b < b_2,\ c_2 < c,\ b < c.$$

L'image de la portion de ce domaine comprise hors de l'angle $0 < b_0 - b$ $0 < c - c_0$ fait partie des droites $b' = -\sqrt{2}/2$ et $c' = -\sqrt{2}/2$. L'angle $0 < b_0 - b$, $0 < c - c_0$ est transformé, par une translation suivie d'une symétrie, en l'angle $-\sqrt{2}/2 < b'$, $-\sqrt{2}/2 < c'$. Le point $b' = 0$, $c' = 0$ est donc recouvert une seule fois et le degré de la transformation y est -1.

Ainsi l'indice total des solutions de (4,7) intérieures à D est -1; D contient donc au moins une solution de (4,6). C. Q. F. D.

(A suivre)

(Reçu le 4 juillet 1935)