Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoidal en rotation permanente.

Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente

Par A. Putnis, Riga

§ 1. D'après M. Wavre nous appellerons astre un fluide parfait soumis à l'influence des attractions newtoniennes de ses propres particules.

Supposons que la surface libre de l'astre à pression constante soit un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation permanente autour de son axe polaire.

D'après le théorème classique de Stokes[1]), étendu par M. Dive[2]) aux rotations permanentes et que M. Wavre[3]) a entièrement généralisé, le potentiel newtonien dû à un astre est déterminé à l'extérieur par la connaissance des éléments stokiens.

Dans notre problème les éléments stokiens sont : la masse totale M, la vitesse angulaire ω, le demi-axe polaire s et l'excentricité linéaire e de la surface libre.

Supposant ces éléments donnés, nous formerons l'expression du potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

§ 2. L'équation de l'hydrodynamique pour la surface libre en rotation permanente s'écrit :

$$f \cdot dU_s + \frac{\omega^2}{2} dl_s^2 = 0 \,, \tag{1}$$

où f est la constante de la gravitation, U_s le potentiel newtonien de l'astre en un point de la surface libre, l_s la distance de ce point à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de ce point.

Employons des coordonnées r, ϑ, φ liées aux coordonnées cartésiennes par les équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi \,. \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 4, 1849.

[2]) Rotations internes des astres fluides, Thèse, Blanchard, Paris 1930.

[3]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1447, 1932.

En prenant x dans la direction de l'axe de rotation, l'équation (1) s'écrit en r et ϑ.

$$(3) \qquad f\,d\,U_s + \omega^2\,[r \sin^2\vartheta\, d\,r + (r^2 + e^2) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\,\vartheta] = 0\,.$$

D'après (2) nous avons

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2+z^2}{r^2+e^2} = 1\,.$$

C'est-à-dire que l'équation $r = s =$ const. détermine un ellipsoïde de révolution aplati de demi-axe polaire s et d'excentricité linéaire e.

Pour la surface libre ellipsoïdale d'un astre l'équation (3) s'écrit alors

$$f\cdot d\,U_s + \omega^2 (s^2+e^2) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = 0$$

ou

$$(4) \qquad \frac{d\,U_s}{d\cos^2\vartheta} = \frac{s^2+e^2}{2f}\,\omega^2\,.$$

§ 3. Supposons la rotation permanente de la surface libre symétrique par rapport è l'équateur.

Alors le développement de ω^2 en polynômes de Legendre s'écrit

$$(5) \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} P_{2n}(\cos\vartheta)$$

où m est un entier positif, ou $m = \infty$; ω_{2n} sont des constantes déterminées et P_{2n} le $2n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre :

$$(6) \qquad P_{2n}(\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} a_{2n,2k} \cos^{2k}\vartheta$$

avec

$$(7) \quad a_{2n,2k} = (-1)^{n-k} \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{(2n)!} \; \frac{2n\,(2n-1)\cdots(2k+1)}{2\cdot 4\cdots 2(n-k)\cdot(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+2k+1)}$$

pour $k < n$,

$$a_{2n,2n} = \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{(2n)!} \text{ et } a_{0,0} = 1\,.$$

Substituons dans (5) les P_{2n} exprimés par (6), et supposons que, dans le cas $m = \infty$, la série ainsi obtenue

$$(8) \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \omega_{2n} a_{2n,2k} \cos^{2k} \vartheta$$

est absolument et uniformément convergente. Ce qui revient à demander que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} | \omega_{2n} a_{2n,2k} |$$

soit convergente.

D'après (4) et (5) on a

$$\frac{dU_s}{d\cos^2\vartheta} = \frac{s^2+e^2}{2f} \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} P_{2n}(\cos\vartheta),$$

et le potentiel newtonien sur la surface libre s'écrit

$$(9) \qquad U_s = \frac{s^2+e^2}{2f} \left\{ \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} \int P_{2n}(\cos\vartheta)\, d\cos^2\vartheta + F_0 \right\},$$

où F_0 est une constante d'intégration.

Un calcul à partir de (9) donne

$$(10) \qquad U_s = \frac{s^2+e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} P_{2p}(\cos\vartheta),$$

où

$$(11) \qquad F_{2p} = \sum_{n=p-1}^{m} \omega_{2n} b_{2n,2p} \quad \text{pour } p = 1, 2, 3, \cdots;$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} b_{2n,2p} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots(2p)}{1\cdot3\cdot5\cdots(4p-1)} \left\{ \frac{a_{2n,2p-2}}{p} + \frac{a_{2n,2p}}{p+1} \frac{(2p+1)(2p+2)}{2\cdot(4p+3)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{2n,2p+2}}{p+2} \frac{(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}{2\cdot4\cdot(4p+3)(4p+5)} + \cdots \right\}; \end{aligned}$$

(12) est une somme dont les coefficients $a_{2n,2p-2}$, $a_{2n,2p}$ $\cdots$ $a_{2n,2n}$ sont donnés par l'expression (7).

Si la convergence de (8) est assurée, l'expression

$$(13) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} | F_{2p} |$$

est aussi une série convergente.

§ 4. Formons l'expression

$$U = \frac{s^2 + e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right)}{Q_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)} P_{2p}(\cos\vartheta)\,, \tag{14}$$

où $i = \sqrt{-1}$ et r, ϑ sont des coordonnées d'un point extérieur à l'astre. Q_{2p} est la $2p^{\text{ième}}$ fonction sphérique de seconde espèce. Pour $\frac{e}{r} < 1$ elle s'écrit en série hypergéométrique convergente

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{(2p)!}{1\cdot 3 \cdots (4p+1)} \frac{1}{i^{2p+1}}\left[\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+1} - \frac{(2p+1)\,(2p+2)}{2\cdot(4p+3)}\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+3} + \cdots\right].$$

Démontrons que (14) représente le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

En effet, les fonctions

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{2p}(\cos\vartheta) \quad \text{où } p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

sont harmoniques à l'extérieur[4]), nulles à l'infini et atteignent leur plus grande valeur absolue sur la surface libre de l'astre et au point $\vartheta = 0$.

Alors (14) est une fonction harmonique qui a la valeur de (10) sur la surface libre et s'annule à l'infini. C'est la solution du problème extérieur de Dirichlet pour la condition aux limites (10).

Si la série (13) est convergente, la série (14) pour $m = \infty$ l'est aussi.

Pour déterminer la constante F_0, considérons l'expression générale du potentiel newtonien.

$$U = \int \frac{dm}{R} \tag{15}$$

où R est la distance du point potentié au point potentiant. Il est possible avec les coordonnées (2) de développer $\frac{1}{R}$ en une série de fonctions sphériques.[5])

---

[4]) *Wangerin,* Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 2e Vol. P. 185.

[5]) *Wangerin,* l. c., 189.

En transportant ce développement dans (15) on trouve

$$F_0 = \frac{2if}{e(e^2+s^2)} M Q_0\left(\frac{is}{e}\right), \tag{16}$$

où M est la masse totale de l'astre.

L'expression (14) donne le potentiel newtonien en tout point à l'extérieur de l'astre. Les coefficients F_{2p} de cette expression sont déterminés par (11) pour $p = 1, 2, 3, \cdots$ et par (16) pour $p = 0$.

Si l'aplatissement de l'astre est petit, on peut, comme dans la théorie classique des figures d'équilibre, considérer $\frac{e^2}{s^2}$ comme une quantité de premier ordre et négliger $\frac{e^4}{s^4}, \frac{e^6}{s^6}, \cdots$

Dans ce cas $\frac{e^2}{s^2} = 2\varepsilon$, où ε est l'aplatissement de l'astre et l'on a :

$$U = \frac{s^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{s^{2p+1}}{r^{2p+1}} [1 + \varepsilon K_p] P_{2p}(\cos\vartheta) \tag{17}$$

où

$$K_p = \frac{4p^2+6p+2}{4p+3}\left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) + 2 \, .$$

L'expression (17) peut être utile dans les applications.

Je remercie vivement M. Wavre pour la bienveillante attention avec laquelle il a guidé mes recherches.

(Reçu le 20 juillet 1935.)