Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoidal en rotation permanente.

Autor: Putnis, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9292

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente

Par A. Putnis, Riga

§ 1. D'après M. Wavre nous appellerons astre un fluide parfait soumis à l'influence des attractions newtoniennes de ses propres particules.

Supposons que la surface libre de l'astre à pression constante soit un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation permanente autour de son axe polaire.

D'après le théorème classique de Stokes[1]), étendu par M. Dive[2]) aux rotations permanentes et que M. Wavre[3]) a entièrement généralisé, le potentiel newtonien dû à un astre est déterminé à l'extérieur par la connaissance des éléments stokiens.

Dans notre problème les éléments stokiens sont : la masse totale M, la vitesse angulaire ω, le demi-axe polaire s et l'excentricité linéaire e de la surface libre.

Supposant ces éléments donnés, nous formerons l'expression du potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

§ 2. L'équation de l'hydrodynamique pour la surface libre en rotation permanente s'écrit :

$$f \cdot dU_s + \frac{\omega^2}{2} dl_s^2 = 0 , \tag{1}$$

où f est la constante de la gravitation, U_s le potentiel newtonien de l'astre en un point de la surface libre, l_s la distance de ce point à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de ce point.

Employons des coordonnées r, ϑ, φ liées aux coordonnées cartésiennes par les équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi . \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 4, 1849.

[2]) Rotations internes des astres fluides, Thèse, Blanchard, Paris 1930.

[3]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1447, 1932.

En prenant x dans la direction de l'axe de rotation, l'équation (1) s'écrit en r et ϑ.

$$(3) \qquad f\,dU_s + \omega^2\,[r\sin^2\vartheta\,dr + (r^2+e^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta] = 0\,.$$

D'après (2) nous avons

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2+z^2}{r^2+e^2} = 1\,.$$

C'est-à-dire que l'équation $r = s =$ const. détermine un ellipsoïde de révolution aplati de demi-axe polaire s et d'excentricité linéaire e.

Pour la surface libre ellipsoïdale d'un astre l'équation (3) s'écrit alors

$$f\cdot dU_s + \omega^2(s^2+e^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = 0$$

ou

$$(4) \qquad \frac{dU_s}{d\cos^2\vartheta} = \frac{s^2+e^2}{2f}\,\omega^2\,.$$

§ 3. Supposons la rotation permanente de la surface libre symétrique par rapport è l'équateur.

Alors le développement de ω^2 en polynômes de Legendre s'écrit

$$(5) \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n}\,P_{2n}(\cos\vartheta)$$

où m est un entier positif, ou $m = \infty$; ω_{2n} sont des constantes déterminées et P_{2n} le $2n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre :

$$(6) \qquad P_{2n}(\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} a_{2n,2k}\cos^{2k}\vartheta$$

avec

$$(7) \qquad a_{2n,2k} = (-1)^{n-k}\frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{(2n)\,!}\,\frac{2n\,(2n-1)\cdots(2k+1)}{2\cdot 4\cdots 2(n-k)\cdot(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+2k+1)}$$

pour $k < n$,

$$a_{2n,2n} = \frac{1\cdot 3\cdots(4n-1)}{(2n)\,!} \text{ et } a_{0,0} = 1\,.$$

Substituons dans (5) les P_{2n} exprimés par (6), et supposons que, dans le cas $m = \infty$, la série ainsi obtenue

$$(8) \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \omega_{2n} a_{2n,2k} \cos^{2k} \vartheta$$

est absolument et uniformément convergente. Ce qui revient à demander que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} | \omega_{2n} a_{2n,2k} |$$

soit convergente.

D'après (4) et (5) on a

$$\frac{dU_s}{d \cos^2 \vartheta} = \frac{s^2 + e^2}{2f} \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} P_{2n} (\cos \vartheta) ,$$

et le potentiel newtonien sur la surface libre s'écrit

$$(9) \qquad U_s = \frac{s^2 + e^2}{2f} \left\{ \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} \int P_{2n} (\cos \vartheta) \, d \cos^2 \vartheta + F_0 \right\} ,$$

où F_0 est une constante d'intégration.

Un calcul à partir de (9) donne

$$(10) \qquad U_s = \frac{s^2 + e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} P_{2p} (\cos \vartheta) ,$$

où

$$(11) \qquad F_{2p} = \sum_{n=p-1}^{m} \omega_{2n} b_{2n,2p} \quad \text{pour } p = 1 , 2 , 3 , \cdots ;$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} b_{2n,2p} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4p-1)} \Big\{ & \frac{a_{2n,2p-2}}{p} + \frac{a_{2n,2p}}{p+1} \frac{(2p+1)(2p+2)}{2 \cdot (4p+3)} + \\ & + \frac{a_{2n,2p+2}}{p+2} \frac{(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}{2 \cdot 4 \cdot (4p+3)(4p+5)} + \cdots \Big\} ; \end{aligned}$$

(12) est une somme dont les coefficients $a_{2n,2p-2}$, $a_{2n,2p} \cdots a_{2n,2n}$ sont donnés par l'expression (7).

Si la convergence de (8) est assurée, l'expression

$$(13) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} | F_{2p} |$$

est aussi une série convergente.

§ 4. Formons l'expression

$$U = \frac{s^2 + e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right)}{Q_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)} P_{2p}(\cos\vartheta) , \tag{14}$$

où $i = \sqrt{-1}$ et r, ϑ sont des coordonnées d'un point extérieur à l'astre. Q_{2p} est la $2p^{\text{ième}}$ fonction sphérique de seconde espèce. Pour $\frac{e}{r} < 1$ elle s'écrit en série hypergéométrique convergente

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{(2p)!}{1\cdot 3\cdots(4p+1)} \frac{1}{i^{2p+1}}\left[\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+1} - \frac{(2p+1)(2p+2)}{2\cdot(4p+3)}\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+3} + \cdots\right].$$

Démontrons que (14) représente le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

En effet, les fonctions

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{2p}(\cos\vartheta) \quad \text{où } p = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

sont harmoniques à l'extérieur[4]), nulles à l'infini et atteignent leur plus grande valeur absolue sur la surface libre de l'astre et au point $\vartheta = 0$.

Alors (14) est une fonction harmonique qui a la valeur de (10) sur la surface libre et s'annule à l'infini. C'est la solution du problème extérieur de Dirichlet pour la condition aux limites (10).

Si la série (13) est convergente, la série (14) pour $m = \infty$ l'est aussi.

Pour déterminer la constante F_0, considérons l'expression générale du potentiel newtonien.

$$U = \int \frac{dm}{R} \tag{15}$$

où R est la distance du point potentié au point potentiant. Il est possible avec les coordonnées (2) de développer $\frac{1}{R}$ en une série de fonctions sphériques.[5])

---

[4]) *Wangerin*, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 2e Vol. P. 185.

[5]) *Wangerin*, l. c., 189.

En transportant ce développement dans (15) on trouve

$$F_0 = \frac{2if}{e(e^2+s^2)} M Q_0\left(\frac{is}{e}\right), \tag{16}$$

où M est la masse totale de l'astre.

L'expression (14) donne le potentiel newtonien en tout point à l'extérieur de l'astre. Les coefficients F_{2p} de cette expression sont déterminés par (11) pour $p = 1, 2, 3, \cdots$ et par (16) pour $p = 0$.

Si l'aplatissement de l'astre est petit, on peut, comme dans la théorie classique des figures d'équilibre, considérer $\frac{e^2}{s^2}$ comme une quantité de premier ordre et négliger $\frac{e^4}{s^4}$, $\frac{e^6}{s^6}$, $\cdots$

Dans ce cas $\frac{e^2}{s^2} = 2\varepsilon$, où ε est l'aplatissement de l'astre et l'on a:

$$U = \frac{s^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{s^{2p+1}}{r^{2p+1}} [1 + \varepsilon K_p] P_{2p}(\cos\vartheta) \tag{17}$$

où

$$K_p = \frac{4p^2+6p+2}{4p+3}\left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) + 2 .$$

L'expression (17) peut être utile dans les applications.

Je remercie vivement M. Wavre pour la bienveillante attention avec laquelle il a guidé mes recherches.

(Reçu le 20 juillet 1935.)