Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphies involutives.

Autor: Lardy, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9294

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphies involutives

Par Pierre Lardy, Zurich

INTRODUCTION

Position du problème et rappel des notions fondamentales

§ 1. Le problème

Le problème qui fait l'objet de ce travail a déjà été traité par M. *E. Cartan* dans les Annales de l'Ecole Normale, 3e série, tome 31, en 1914. C'est celui de la détermination de toutes les structures réelles de groupes simples, finis et continus correspondant à une structure simple complexe donnée. Notre but est d'appliquer une nouvelle méthode due à *M. Cartan* (voir § 2) aux structures réelles des quatre grandes classes de groupes simples (dont la détermination a été esquissée par M. Cartan), et principalement d'établir, dans le cas plus difficile des cinq groupes exceptionnels, les structures réelles correspondantes.

La structure d'un groupe est, comme on sait, définie par l'ensemble des constantes c_{ij}^k qui apparaissent lorsqu'on forme les crochets de Poisson de deux transformations infinitésimales. Deux groupes qui admettent le même système de constantes c_{ij}^k sont dits de même structure ou *isomorphes* (holoëdriquement ou mériëdriquement); on passe de l'un à l'autre par une substitution linéaire sur les transformations infinitésimales de base (substitution isomorphique). Plus généralement, en effectuant sur la base d'un groupe donné la substitution linéaire la plus générale, le tableau des c_{ij}^k se transforme en un nouveau tableau $\overset{*}{c}{}_{ij}^k$, et ces nouvelles constantes $\overset{*}{c}{}_{ij}^k$ définissent une structure qui n'est pas différente de la précédente et qui lui est équivalente.

Considérons deux groupes réels A et B, de même structure et de même ordre, de paramètres réels a_i et b_i. On peut établir entre ces deux groupes deux correspondances isomorphiques essentiellement différentes, suivant que l'on peut passer d'un groupe à l'autre par une substitution linéaire de

base à coefficients *complexes* (ce qui est toujours possible) ou à coefficients *réels*.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes réels de même structure, isomorphes du point de vue complexe, sans qu'ils le soient du point de vue réel. Nous dirons alors qu'ils appartiennent à des types réels différents (correspondant à la même structure complexe). En un mot, on ne pourra pas passer d'un groupe à l'autre par une substitution linéaire de base à coefficients réels.

L'étude de tels groupes sera grandement facilitée par la considération de la forme quadratique réelle $\varphi(e)$ attachée à ces groupes. Pour les groupes simples d'ordre r, $\varphi(e)$ est réductible à une somme de r carrés indépendants (voir § 2). D'autre part, $\varphi(e)$ étant un invariant du groupe adjoint Γ continu du groupe donné G (Cartan: Thèse, page 27), et Γ étant le plus grand groupe continu de substitutions isomorphiques (§ 2), nous voyons que $\varphi(e)$ reste invariante par toute substitution isomorphique. Un critère suffisant pour que deux groupes simples réels, de même structure et de même ordre, appartiennent à des types réels *différents* est donc que les formes $\varphi(e)$ respectives soient de *caractère* (différence entre le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs) *différent*, en vertu de la loi d'inertie des formes quadratiques réelles.

Un exemple simple va nous permettre d'éclairer ces considérations. Partons du groupe projectif unimodulaire de la droite projective:

$$\begin{aligned} x_1' &= a x_1 + b x_2 \\ x_2' &= c x_1 + d x_2 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Nous y supposons x_1, x_2; a, b, c, d complexes.

Considérons alors les deux sous-groupes suivants:

1. Le groupe linéaire unimodulaire à variables et à coefficients réels.
2. Le groupe linéaire unimodulaire qui laisse invariante la forme d'Hermite définie positive

$$H \equiv x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_2$$

Ce dernier groupe est réductible à la forme

$$\begin{aligned} x_1' &= a x_1 + b x_2 \\ x_2' &= -\bar{b} x_1 + \bar{a} x_2 \end{aligned} \qquad (a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

On peut donner aux symboles de Lie du premier des groupes considérés la forme:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2$$

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_1$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_1$$

avec les relations de structure

$(X_1 f, X_2 f) = -2 X_3 f$; $(X_1 f, X_3 f) = -2 X_2 f$; $(X_2 f, X_3 f) = -2 X_1 f$.

On y lit le tableau des constantes de structure:

$$\begin{array}{lll} c_{12}^1 = 0 & c_{12}^2 = 0 & c_{12}^3 = -2 \\ c_{13}^1 = 0 & c_{13}^2 = -2 & c_{13}^3 = 0 \\ c_{23}^1 = -2 & c_{23}^2 = 0 & c_{23}^3 = 0 \end{array}$$

les constantes non écrites étant nulles. L'équation caractéristique donne immédiatement la forme quadratique $\varphi(e)$ réductible à l'expression

$$\varphi(e) = e_1^2 + e_3^2 - e_2^2$$

et qui est une forme indéfinie de caractère $\delta = 1$.

Les symboles de Lie du second groupe sont

$$Y_1 f = i\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2\right)$$

$$Y_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_1$$

$$Y_3 f = i\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_1\right)$$

avec les relations de structure

$(Y_1 f, Y_2 f) = -2 Y_3 f$; $(Y_1 f, Y_3 f) = +2 Y_2 f$; $(Y_2 f, Y_3 f) = -2 Y_1 f$.

et le tableau des c_{ij}^k qui sont aussi réelles:

$$\begin{array}{lll} c_{12}^1 = 0 & c_{12}^2 = 0 & c_{12}^3 = -2 \\ c_{13}^1 = 0 & c_{13}^2 = +2 & c_{13}^3 = 0 \\ c_{23}^1 = -2 & c_{23}^2 = 0 & c_{23}^3 = 0 \end{array}$$

La forme $\varphi(e)$ est ici: $\varphi(e) = -(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$ de caractère $\delta = -3$. Les valeurs du caractère δ étant différentes pour les deux groupes, ils ne peuvent être isomorphes du point de vue *réel*, mais ils le sont du point de vue complexe. En effet, la substitution complexe de base:

$$\begin{aligned} Y_1 f &= i \cdot X_1 f \\ Y_2 f &= X_2 f \\ Y_3 f &= i \cdot X_3 f \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} e_1' &= i \cdot e_1 \\ e_2' &= e_2 \\ e_3' &= i \cdot e_3 \end{aligned}$$

fait passer d'un groupe à l'autre, et les symboles de Lie, les tableaux des c_{ij}^k et les formes $\varphi(e)$ se permutent d'un groupe à l'autre par l'isomorphisme complexe trouvé.

Les deux groupes considérés sont donc de même structure (du point de vue complexe), mais ils appartiennent à des types réels différents.

§ 2. Rappel des notions fondamentales

Ce paragraphe contient quelques indications, nécessairement incomplètes, sur les notions fondamentales et les résultats classiques de la théorie des groupes simples. Nous ferons dans la suite un usage fréquent des résultats qui se trouvent dans les nombreux travaux de M. *E. Cartan*. Citons spécialement la Thèse parue en 1894; „Les groupes réels simples, finis et continus" dans les Ann. de L'Ecole Norm., 3e série, t. 31, 1914; „Groupes simples clos et ouverts" dans le Journal de Math., t. VIII, 1929, fasc. I. On trouvera enfin des indications sur la théorie des groupes et la topologie dans le Mémorial des Sc. Math., fascicule 42. Les quelques définitions suivantes sont citées textuellement d'après *M. E. Cartan*.

A. Les groupes simples, finis et continus

Un groupe fini et continu d'ordre r est dit *simple*, s'il n'admet aucun sous-groupe *invariant* continu. D'après la théorie de *S. Lie*, ce groupe est engendré par r transformations infinitésimales linéairement indépendantes:

$$X_1 f, X_2 f, \cdots, X_r f.$$

Au point de vue de la réalité des paramètres, différents cas peuvent être envisagés. La transformation infinitésimale

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_r X_r f = \sum_i e_i X_i f$$

où $e_1, e_2, \cdots, e_r$ sont des paramètres *complexes* arbitraires, engendre un groupe fini à r paramètres complexes: ce sera *le groupe complexe de la structure donnée.*

Mais il peut arriver que par un choix convenable des r transformations infinitésimales de base, la transformation $\sum_i e_i X_i f$, où les e_i sont des paramètres *réels* arbitraires, engendre aussi un groupe qui sera alors à r paramètres *réels*. Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les constantes de structures qui entrent dans les formules fondamentales

$$(X_i f, X_j f) = \sum_k c_{ij}^k \cdot X_k f \tag{1}$$

soient toutes *réelles*. On a alors ce qu'on appelle une *forme réelle de la structure complexe donnée.*

On obtient une première classe de groupes simples réels, appartenant à une structure complexe donnée, de la manière suivante: à chaque type complexe de groupes simples d'ordre r, on pourra faire correspondre un type réel de groupes simple d'ordre $2r$ en regardant chacun des r paramètres complexes comme l'ensemble de deux paramètres réels. Mais à chaque type complexe de groupes simples d'ordre r correspondent aussi des structures réelles simples d'une autre nature, d'ordre r, celles précisément que nous avons définies par les formules (1), et qui seules nous occuperont dans notre travail.

Si S_a (de paramètres a_i) est une opération particulière d'un groupe G, S_u (de paramètres u_i) une opération variable, l'équation

$$S_{u'} = S_a S_u S_a^{-1}$$

définit une opération T_a faisant passer de S_u à la transformée $S_{u'}$ de S_u par S_a. Ces opérations T_a sont des *automorphies* du groupe, en ce sens que si S_u et S_v sont transformées en $S_{u'}$ et $S_{v'}$, le produit $S_u S_v$ est transformé en $S_{u'} S_{v'}$. Ces automorphies forment un groupe, le groupe *adjoint* de *Lie*. En particulier, elles laissent invariante la transformation identique et transforment entre elles linéairement les transformations infinitésimales; de ce point de vue, elles constituent le groupe adjoint linéaire Γ de G (les variables transformées par Γ sont les e_i). Les transformations infinitésimales de Γ sont données par:

$$E_i f = \sum_{s,k} e_s c_{si}^k \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

On arrive à *l'équation caractéristique* d'un groupe en cherchant une

transformation infinitésimale $\sum_k \lambda_k X_k f$, laissée invariante par la transformation infinitésimale la plus générale $\sum_i e_i X_i f$, ce qui veut dire:

$$(\sum_i e_i X_i f, \sum_k \lambda_k X_k f) = \omega \cdot \sum_k \lambda_k X_k f.$$

ω est déterminée par l'équation suivante:

$$\begin{vmatrix} \sum e_i c_{i1}^1 - \omega, & \sum e_i c_{i2}^1, & \cdots, & \sum e_i c_{ir}^1 \\ \sum e_i c_{i1}^2, & \sum e_i c_{i2}^2 - \omega, & \cdots, & \sum e_i c_{ir}^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \sum e_i c_{i1}^r, & \sum e_i c_{i2}^r, & \cdots, & \sum e_i c_{ir}^r - \omega \end{vmatrix} = \Delta(\omega) = 0$$

qui est dite l'équation caractéristique du groupe. Les coefficients du déterminant $\Delta(0)$ se retrouvent dans les transformations infinitésimales du groupe adjoint. Nous poserons

$$(-1)^r \cdot \Delta(\omega) = \omega^r - \psi_1(e) \cdot \omega^{r-1} + \psi^2(e) \cdot \omega^{r-2} - \cdots + (-1)^r \cdot \psi_{r-1}(e) \cdot \omega.$$

Les coefficients $\psi_i(e)$ sont des polynômes homogènes en $e_1, e_2, \cdots, e_r$ de degré i. Ces coefficients, et par suite les racines de l'équation caractéristique, sont des *invariants* du groupe adjoint, et le nombre de ceux des $\psi_i(e)$ qui sont *indépendants* est appelé le *rang* du groupe. Pour un groupe simple, le rang est égal au nombre des racines identiquement nulles de son équation caractéristique.

Soulignons l'importance très grande de l'expression

$$\varphi(e) = \psi_1^2(e) - 2\psi_2(e) = \sum_{i,j,k,h} e_i e_j c_{ik}^h c_{jh}^k = \sum_s \omega_s^2$$

qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique, et qui caractérisera par la valeur de son caractère δ les structures simples réelles que nous établirons. $\psi_1(e)$ étant identiquement nul pour un groupe simple, $\varphi(e)$ se réduit à $-2\,\psi_2(e)$ et peut se mettre sous la forme d'une somme de r carrés indépendants (Thèse, page 51—52).

B. Les groupes simples clos

La notion de groupe clos est à la base de la méthode que M. *E. Cartan* a développée dans un article paru dans le Journal de Mathématiques, t. VIII, 1929, fascicule I, et qui permet de retrouver toutes les structures

simples réelles. Le but de ce travail est d'appliquer cette méthode aux quatre grandes classes de groupes simples (dont la détermination a été esquissée dans l'article cité) et de retrouver les structures simples réelles des cinq types exceptionnels.

Nous dirons qu'un groupe est *clos*, si tout ensemble infini de transformations du groupe admet au moins une transformation limite appartenant au groupe. Dans le cas contraire, le groupe est dit ouvert.

Pour les groupes linéaires clos, il existe un théorême fondamental dû à M. *Weyl:* Tout groupe linéaire clos laisse invariante au moins une forme d'Hermite définie positive (respectivement une forme quadratique définie positive). Une conséquence immédiate de ce théorème est que les coefficients a_{ij} des substitutions linéaires d'un groupe clos sont nécessairement bornés. On en déduit que les racines de l'équation caractéristique de la substitution infinitésimale génératrice $\Sigma\, e_i\, X_i f$ sont nulles ou purement imaginaires. Dès lors, la forme $\varphi(e)$ est définie négative (ou semi-définie négative), et inversement, si ceci a lieu, le groupe est clos. Dans le cas où $\varphi(e)$ est indéfinie, le groupe est ouvert.

Nous utiliserons dans la suite implicitement le théorème qui dit que si un groupe linéaire est *borné et algébrique* (à coefficients bornés qui satisfont à des relations algébriques entières), il est clos. Ajoutons enfin que les groupes linéaires clos ont tous leurs multiplicateurs (coefficients de substitution du groupe ramenée à sa forme canonique) de module égal à *1*.

C. Les méthodes de M. E. Cartan pour déterminer les structures simples réelles

M. *Cartan* a déterminé dans les Ann. de L'Ecole Norm., t. 31, 1914, toutes les structures simples réelles en se basant essentiellement sur les formules de structure et sur l'équation caractéristique de chaque type complexe de groupe simple. Il a notamment montré que les groupes simples réels d'ordre r qui correspondent à un même type complexe se classent complètement d'après le caractère de leur forme $\varphi(e)$. Bien plus! Les groupes réels (appartenant au même type complexe) dont la forme $\varphi(e)$ a la même valeur du caractère sont tous isomorphes entre eux dans le réel.

Parmi toutes les structures simples réelles appartenant au même type complexe, il y en a pour chaque type une, dite *unitaire*, pour laquelle la forme $\varphi(e)$ est définie négative, qui donc est *close* et telle que δ est égal à

l'ordre changé de signe. C'est la considération de cette structure close qui fournit à M. Cartan l'élément essentiel de sa nouvelle méthode qui va nous guider dans la suite.

Le théorème fondamental

La recherche des groupes réels ouverts d'une structure simple donnée revient à celle des substitutions involutives isomorphiques du groupe clos de la structure donnée.

On appelle substitution isomorphique toute substitution linéaire effectuée sur les transformations infinitésimales de base d'un groupe qui conservera ses constantes de structure c_{ij}^k. Comme le groupe adjoint général est le plus grand groupe de substitutions isomorphiques d'un groupe donné (*Cartan :* Journ. de Math., t. VIII, 1929, fasc. I), une substitution isomorphique involutive $\boldsymbol{R}$ appartient au groupe adjoint et vérifie l'égalité

$$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{E}$$

($\boldsymbol{E}$: transformation identique.) Elle peut être représentée par une matrice diagonale, les n premiers éléments étant égaux à $+1$, les p derniers à -1 ($n + p = r$).

Précisons le théorème fondamental en mettant en évidence la relation entre les substitutions isomorphiques involutives $\boldsymbol{R}$ d'une part, et la recherche des groupes simples ouverts d'autre part. Soit R une telle opération du groupe clos G_u. On peut la représenter par les équations

$$(1) \qquad X'_i f = X_i f\,, \quad X'_{n+j} f = -X_{n+j} f\,. \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, n. \\ j = 1, 2, \cdots, p. \end{cases}$$

En exprimant que les constantes de structure ne sont pas changées, on voit que les seules constantes non nulles sont celles qui contiennent 0 ou 2 indices supérieurs à n. En posant alors

$$(2) \qquad Y_i f = X_i f\,, \quad Y_{n+j} f = i\,.\ X_{n+j} f \qquad (i = \sqrt{-1})$$

on voit que les constantes de structures de la base (Y) sont *réelles*, ce qui donne un groupe réel G de même structure complexe que G_u, mais avec une forme $\varphi(e)$ qui contient p carrés positifs et n carrés négatifs. Le groupe obtenu est donc ouvert. La substitution (2), qui fournit une structure réelle ouverte, est donc en relation très simple avec l'opération R; il

suffit en effet de remplacer dans cette dernière, donnée par les équations (1), les multiplicateurs — 1 par i. Les transformations infinitésimales de base de même indice dans les deux groupes sont donc ou *égales*, ou *dans le rapport* i (correspondance isomorphique *normale*; voir l'exemple au § 1).

Donnons enfin un court aperçu sur le chemin que nous suivrons dans la détermination effective des structures réelles ouvertes, pour laquelle nous avons à notre disposition deux méthodes essentiellement différentes.

La première méthode opère, non dans le groupe adjoint, mais dans le groupe même, réalisé par un groupe linéaire approprié. A l'opération R du groupe adjoint correspond alors dans le groupe clos au moins une transformation que nous noterons G_R. L'égalité $R^2 = E$ a comme conséquence $G_R^2 = S$, où S est une transformation *échangeable* avec toutes les opérations du groupe. Une telle transformation S multiplie, dans le cas où le groupe est irréductible ou complètement réductible, toutes les variables sur lesquelles opère le groupe par un même facteur (Journ. de Math., loc. cit). Dès lors, les opérations R seront déterminées au moyen des opérations correspondantes G_R. Dans l'ensemble des opérations G_R ainsi obtenues, on ne retiendra que celles qui ne sont pas *homologues* entre elles dans le groupe adjoint (les opérations G_R homologues conférant au caractère δ la même valeur et définissant par conséquent le même type de structure réelle). Une dernière remarque: L'ensemble des transformations communes au groupe clos G_u et au groupe G constituent un *sous-groupe* g qui est *clos*, engendré par les transformations infinitésimales $X_1 f, \cdots, X_n f$ (formules (1)). Par conséquent, chaque transformation de g est échangeable avec l'opération G_R qui correspond à R; c'est évident, puisque chaque transformation de la base (X_i) de g n'est pas altérée par l'opération R:

$$X_i = R(X_i) \rightarrow X_i = G_R X_i G_R^{-1} \rightarrow X_i G_R = G_R X_i .$$

L'ordre n de g nous donne immédiatement la valeur du caractère δ. On a en effet $n + p = r$ et $\delta = p - n = r - 2n$. Cette méthode, par le fait même qu'elle opère sur des réalisations des structures données, est beaucoup plus intuitive et pénètre plus profondément dans le mécanisme des groupes obtenus que la seconde méthode, liée uniquement à la structure abstraite de chaque type simple, et dont il sera question un peu plus loin. La détermination du sous-groupe clos g, qui fait le pont entre la structure close et la structure ouverte correspondante; celle des invariants des structures ouvertes ou toute autre propriété caractéristique des groupes

obtenus sont des résultats que la première méthode fournit au moyen de calculs sinon toujours simples, du moins suffisamment intéressants pour légitimer son emploi.

La seconde méthode opère directement dans *le groupe adjoint clos* de la structure close. L'équation caractéristique ne contient alors que des *racines nulles ou purement imaginaires*, et on connaît les relations entre les racines pour chaque type de groupe simple (Thèse et Ann. de L'Ecole Norm., 1914); en particulier, si le *rang* du groupe est égal à l, l de ces racines sont identiquement nulles, et les autres s'expriment au moyen de l d'entre elles, dites fondamentales. Partons de la forme canonique du groupe adjoint infinitésimal:

$$\frac{\delta x'_k}{x'_k} = i \cdot \omega_k \cdot \delta t. \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \cdots, r \\ \omega_k \text{ réelle} \end{matrix} \right).$$

En intégrant ces équations, on obtient la forme canonique pour une transformation finie du groupe adjoint:

$$x'_k = e^{i \omega_k \cdot t} \cdot x_k$$

ou, en posant $t = 1$: $\qquad x'_k = e^{i \omega_k} \cdot x_k.$

Pour que cette transformation soit involutive, il faut et il suffit que l'on ait, en vertu de $R^2 = E$:

$$e^{i \omega_k} = + 1.$$

$$e^{\frac{i \omega_k}{2}} = \pm 1.$$

Les relations classiques entre les racines permettent de résoudre les équations précédentes dans chaque cas, à l'exception, bien entendu, où l'opération R n'appartient pas au groupe adjoint continu, ce qui a lieu pour les groupes du type (A), du type (D) et du type (E) *de rang* 6. En même temps que l'opération R, on obtient le caractère δ.

La première partie de ce travail est consacrée aux quatre grandes classes de groupes simples, la seconde traitera des cinq types exceptionnels.

PREMIERE PARTIE

Les quatre grandes classes de groupes simples

I. Groupes du type (A)

Ces groupes sont de rang $l (l \geqq 1)$ et d'ordre $l(l+2)$. Le groupe clos dont nous partons est le groupe linéaire unimodulaire à $l+1$ variables complexes x_i qui laisse invariante la forme définie positive d'Hermite

$$H \equiv x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_{l+1} \bar{x}_{l+1}.$$

Le groupe adjoint général est *mixte* et contient deux familles distinctes que l'on obtient en transformant les opérations du groupe soit par une homographie (groupe adjoint continu proprement dit), soit par une anti-homographie (homographie combinée avec le changement de x_i en sa complexe conjuguée $\bar{x}_i$). Nous aurons à distinguer les deux cas suivant que l'opération R appartient à l'une ou l'autre des deux familles.

1er cas. L'opération R appartient au groupe adjoint continu et provient d'une homographie G_R. Il suffit, d'après le § 2 de l'introduction, de trouver les homographies $G_R^2 = S$ échangeables avec chaque opération du groupe et telles qu'elles multiplient toutes les variables x_i par un même facteur. Toute transformation du groupe est réductible à la forme canonique suivante (voir l'introduction):

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = e^{i\alpha_1} x_1 \\ x_2' = e^{i\alpha_2} x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{l+1}' = e^{i\alpha_{l+1}} x_{l+1} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{où l'on a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l+1} = 0 \\ \text{(condition} \\ \text{d'unimodularité).} \end{array}$$

La condition pour S donne immédiatement

$$e^{2i\alpha_1} = e^{2i\alpha_2} = \cdots = e^{2i\alpha_{l+1}}$$

et en vertu de $\sum_i \alpha_i = 0$ on aura $e^{i\alpha_1} \cdot e^{i\alpha_2} \cdot \cdots \cdot e^{i\alpha_{l+1}} = 1$. Les opérations G_R sont alors définies par les conditions

$$\begin{array}{ll} e^{i\alpha_k} = \pm e^{i\alpha_j} & \\ \prod_{k=1}^{l+1} e^{i\alpha_k} = 1. & (k, j = 1, 2, \cdots, l+1) \end{array}$$

On en déduit que les multiplicateurs $e^{i\alpha_k}$ sont, au signe près, tous égaux à une certaine racine $(l+1)$-ième, respectivement $2\,(l+1)$-ième de l'unité. En supprimant, en vertu de l'homogénéité des variables, ce facteur commun à toutes les équations, on peut donner à l'opération G_R la forme suivante:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ x'_M &= x_M \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \leqq M \leqq l+1) \\ x'_{M+1} &= -\,x_{M+1} \\ &\vdots \\ x'_{l+1} &= -\,x_{l+1} \end{aligned}$$

où le déterminant peut maintenant prendre les valeurs $\pm\,1$. Nous voyons de plus que G_R est elle-même involutive.

Nous allons montrer que l'entier M caractérise complètement un type de structure réelle. Il suffit de calculer la valeur du caractère δ de la forme $\varphi(e)$ correspondante. Or le sous-groupe clos g est celui qui transforme entre elles séparément les M premières, ainsi que les $l+1-M$ dernières variables, puisqu'il est constitué par l'ensemble des transformations échangeables avec l'opération G_R. Sa matrice a la forme particulière

$$\begin{array}{c} \\ M \\ \\ l+1-M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{M} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{l+1-M} \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \star \cdots \star \\ \vdots \quad \vdots \\ \star \cdots \star \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \star \cdots \cdots \cdots \star \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \star \cdots \cdots \cdots \star \end{matrix} \end{array}\right| \end{array}$$

qui permet de calculer facilement son ordre n. On trouve $n = (l+1-M)^2 + M^2 - 1$. L'entier p (voir § 2) vaut $p = l\,(l+2) - n = 2\,M + 2\,l\,M - 2\,M^2$ et on a finalement pour δ:

$$\delta = p - n = 1 - (l + 1 - 2\,M)^2.$$

Remarquons que δ ne change pas si on remplace M par $l+1-M$. Il suffit alors de faire varier M de 0 à $\dfrac{l+1}{2}$, si $l+1$ est pair et de 0 à

$\left[\frac{l+1}{2}\right]$, si $l+1$ est impair; en réunissant les deux cas, on fera varier M de 0 à $\left[\frac{l+1}{2}\right]$. A chaque valeur de M ainsi choisie correspond une valeur de δ différente, ce qui démontre bien que l'entier M caractérise les différents types réels. Ceux-ci sont au nombre de $\left[\frac{l+3}{2}\right]$. Ces structures peuvent être réalisées par des groupes linéaires et homogènes à $l+1$ variables complexes qui laissent invariante la forme d'Hermite indéfinie

$$H' \equiv x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_M \bar{x}_M - x_{M+1} \bar{x}_{M+1} - \cdots - x_{l+1} \bar{x}_{l+1}$$

comme on le vérifie immédiatement par le calcul.

2me cas. L'opération R n'appartient pas au groupe adjoint continu et provient d'une *antiinvolution* dont il existe deux types essentiellement différents: *antiinvolution de première espèce* (admettant une infinité de points doubles) et *antiinvolution de seconde espèce* (n'admettant aucun point double) (voir Cartan, Ann. de l'Ec. Norm., t. 44, 1927, pages 436—440 et 442—443). Précisons en quelques mots la manière dont une antihomographie transforme une homographie. L'antihomographie A est définie par

$$x'_i = \sum_k a_{ik} \bar{x}_k \quad (i = 1, \cdots, l+1) \quad \text{ou} \quad x' = A(\bar{x}).$$

Soit G une opération quelconque du groupe et formons la transformée G' de G par l'antihomographie A deux fois de suite. On obtient

$$G' = A\,\bar{G}\,A^{-1}$$

$$\text{et } G'' = A\,\bar{A}\,G\,(A\,\bar{A})^{-1}$$

où $\bar{G}$ est la matrice des éléments complexes conjugés de G. Or la transformation $\Gamma_{A\bar{A}}$ du groupe adjoint qui correspond à la transformation $A\bar{A}$ se réduit à l'identité pour les involutions cherchées, et l'homographie $A\bar{A}$ (produit de deux antihomographies) multiplie, toujours d'après le théorème sur les transformations échangeables, toutes les variables par un même facteur. On a donc $A\bar{A} = (m)$ où (m) est la matrice diagonale de coefficient m. A cause de la valeur du déterminant de A, on aura $m^{l+1} = 1$ et on montre de plus (Cartan, loc. cit.) que m est égal à ± 1, $+1$ caractérisant l'antiinvolution de première, -1 celle de seconde espèce.

L'antiinvolution de première espèce est réductible à la forme

$$\begin{aligned} x'_1 &= \bar{x}_1 \\ x'_2 &= \bar{x}_2 \\ &\vdots \\ x'_{l+1} &= \bar{x}_{l+1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Partons d'une transformation G donnée par sa matrice (g_{ik}) et formons sa transformée G' donnée par (g'_{ik}) au moyen de l'antiinvolution (1). On obtient $G' = \bar{G}$ ou $g'_{ik} = g_{ik}$, et l'on voit que l'opération R correspondante transforme les coefficients g_{ik} de G en leurs complexes conjugués $\bar{g}_{ik}$. Le sous-groupe clos g est défini par la relation

$$G' = G \to \bar{G} = G \to g_{ik} = \bar{g}_{ik}$$

et représente l'ensemble des transformations à cœfficients *réels* du groupe hermitien; c'est donc le groupe des transformations orthogonales réelles effectuées sur les variables x_i supposées réelles. Son ordre n est égal à $\frac{l(l+1)}{2}$ et on trouve pour le caractère δ de la structure ouverte correspondante $\delta = l$. Cette structure réelle peut être réalisée par le groupe linéaire unimodulaire des substitutions à cœfficients réels (groupe linéaire spécial de *Lie*); il est isomorphe au groupe projectif réel à $l + 1$ variables homogènes.

L'antiinvolution de seconde espèce, qui n'existe que pour $l + 1$ pair, peut être réduite à la forme

$$\begin{aligned} x'_1 &= -\bar{x}_2\,, & x'_3 &= -\bar{x}_4\,, & \cdots,\quad x'_l &= -\bar{x}_{l+1} \\ x'_2 &= \bar{x}_1\,, & x'_4 &= \bar{x}_3\,, & \cdots,\quad x'_{l+1} &= \bar{x}_l \end{aligned}$$

et conduit à l'opération transformée G' donnée par la matrice (g'_{ik}) suivante:

$$\begin{array}{llll} g'_{11} = \bar{g}_{22}\,, & g'_{12} = -\bar{g}_{21} & & g'_{1,l+1} = -\bar{g}_{2l}\,. \\ g'_{21} = -\bar{g}_{12}\,, & g'_{22} = \bar{g}_{11} & & g'_{2,l+1} = \bar{g}_{1l}\,. \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g'_{l1} = \bar{g}_{l+1,2}\,, & g'_{l2} = -\bar{g}_{l+1,1} & & g'_{l,l+1} = -\bar{g}_{l+1,l} \\ g'_{l+1,1} = -\bar{g}_{l,2}\,, & g'_{l+1,2} = \bar{g}_{l1} & & g'_{l+1,l+1} = \bar{g}_{l,l}\,. \end{array}$$

L'opération R est définie par ces équations. Le sous-groupe clos g est représenté par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} g_{11}, & -\bar{g}_{21} & & g_{1l}, & -\bar{g}_{2l} \\ g_{21}, & \bar{g}_{11} & & g_{2l}, & \bar{g}_{1l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ g_{l1}, & -\bar{g}_{l+1,1} & & g_{ll}, & -\bar{g}_{l+1,l} \\ g_{l+1,1}, & \bar{g}_{l1} & & g_{l+1,l}, & \bar{g}_{ll} \end{matrix} \right\| .$$

Son ordre n peut se calculer directement en tenant compte de l'invariance de la forme d'Hermite H; on a $n = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$ et $\delta = -l-2$. La réalisation de la structure ouverte est ici donnée par le groupe linéaire quaternionien à $\frac{l+1}{2}$ variables quaternioniennes ξ_i, ces variables étant formées au moyen des précédentes de la manière suivante

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + j \cdot \bar{x}_2 \\ \xi_2 &= x_3 + j \cdot \bar{x}_4 \\ &\vdots \\ \xi_{\frac{l+1}{2}} &= x_l + j \cdot \bar{x}_{l+1} \end{aligned}$$

où i, j, k sont les unités quaternioniennes satisfaisant aux conditions bien connues. Le sous-groupe g laisse alors invariante la forme d'Hermite quaternionienne définie positive $\Xi \equiv \xi_1 \bar{\xi}_1 + \cdots + \xi_{\frac{l+1}{2}} \bar{\xi}_{\frac{l+1}{2}}$. En exprimant l'invariance de la forme Ξ, on retrouve immédiatement l'ordre n de g.

II. Groupes du type (B)

Ces groupes, de rang $l (l \geqq 2)$, sont d'ordre $l(2l+1)$. Nous choisissons le groupe linéaire réel d'une forme *quadratique définie positive* à $2l+1$ variables *réelles* (groupe orthogonal réel). Le groupe adjoint est continu. Le groupe choisi étant clos et irréductible, le théorème sur les transformations échangeables est encore valable. Le point de départ est donné par la forme canonique à laquelle est réductible toute transformation orthogonale réelle (*Cartan*, Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann, pages 170—173):

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \cos\ a_1\, x_1 - \sin\ a_1\, x_2 \\
x'_2 &= \sin\ a_1\, x_1 + \cos\ a_1\, x_2 \\
&\ \vdots \\
x'_{2p-1} &= \cos\ a_p\, x_{2p-1} + \sin\ a_p\, x_{2p} \qquad (\varepsilon_i^2 = 1). \\
x'_{2p} &= \sin\ a_p\, x_{2p-1} + \cos\ a_p\, x_{2p} \\
x'_{2p+1} &= \varepsilon_1\, x_{2p+1} \\
x'_{2l+1} &= \varepsilon_{2l+1-2p}\, x_{2l+1}
\end{aligned}
$$

L'indice p varie, suivant les cas, de 0 à l. Le facteur par lequel $G_R^2 = S$ multiplie toutes les variables est égal à $+1$ en vertu de $\varepsilon_i^2 = +1$. On en conclut que $a_i = 0$ ou π. G_R pourra donc s'écrire (en permutant convenablement les indices):

$$x'_1 = -x_1\,, \cdots,\ x'_\sigma = -x_\sigma\,,\ x'_{\sigma+1} = x_{\sigma+1}\,, \cdots,\ x'_{2l+1} = x_{2l+1}$$

où σ est pair. En considérant tous les cas possibles, on voit que σ peut prendre les valeurs $0, 2, 4, \cdots, 2\,l$. A toute valeur de σ correspond alors une opération G_R bien définie, et ces opérations sont au nombre de $l+1$. Le sous-groupe clos g transforme entre elles les σ premières, ainsi que les $2\,l+1-\sigma$ dernières variables et laisse invariantes chacune des deux formes quadratiques $x_1^2 + \cdots + x_\sigma^2$ et $x_{\sigma+1}^2 + \cdots + x_{2l+1}^2$. L'ordre n est, en désignant $2\,l+1-\sigma$ par τ, égal à $\dfrac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \dfrac{\tau(\tau-1)}{2}$ et l'entier p vaut $\sigma\tau$. On en conclut pour le caractère $\delta = l - 2\,(l-\sigma)\,(l-\sigma+1)$, où $\sigma = 0, 2, 4, \cdots, 2\,l$, ou plus simplement

$$
\begin{aligned}
&\delta = l - 2\,m\,(m+1) \\
&(m = 0, 1, 2, \cdots, l)
\end{aligned}
$$

Le groupe ouvert est réalisé par le groupe linéaire orthogonal de la forme quadratique indéfinie à $2\,l+1$ variables réelles

$$x_1^2 + \cdots + x_\sigma^2 - x_{\sigma+1}^2 - \cdots - x_{2l+1}^2\,.$$

III. Groupes du type (D)

Parmi les groupes du type (D), de rang $l\,(l \geqq 4)$ et d'ordre $l\,(2\,l-1)$, nous choisissons le groupe linéaire orthogonal à $2\,l$ variables réelles de la forme *quadratique définie positive* $F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2l}^2$. Les calculs sont analogues à ceux du type (B). Le résultat différera cependant de

celui du chapitre précédent en vertu du fait que le groupe adjoint est composé de deux familles distinctes obtenues en transformant les opérations du groupe par des substitutions de déterminant $+1$ ou -1, ce qui permet de distinguer deux cas. La forme canonique est celle du chapitre précédent et fournit les conditions

$$\sin 2\,\alpha_i = 0, \quad \cos 2\,\alpha_i = \pm 1$$

ou, en explicitant les deux possibilités

$$\text{a)} \left.\begin{array}{l} \sin 2\alpha_i = 0 \\ \cos 2\alpha_i = +1 \end{array}\right\} \to \alpha_i = 0 \text{ ou } \pi\,; \qquad \text{b)} \left.\begin{array}{l} \sin 2\alpha_i = 0 \\ \cos 2\alpha_i = -1 \end{array}\right\} \to \alpha_i = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}\,.$$

Le cas b) ne se présente que si l'on suppose dans les équations canoniques l'indice p égal à l.

a) En supposant G_R de déterminant $+1$, on arrive à la forme suivante:

$$x'_1 = -x_1 \cdots, \; x'_\sigma = -x_\sigma, \; x'_{\sigma+1} = x_{\sigma+1}, \cdots, \; x'_{2l} = x_{2l}$$

σ est pair et prend les valeurs $0, 2, \cdots, 2\,l$. On trouve pour δ la valeur $l - 2\,(l-\sigma)^2$; cette expression ne change pas si on y remplace σ par $2\,l - \sigma$; par conséquent, on prendra pour σ les valeurs

$$\sigma = \begin{cases} 0, 2, 4, \cdots, l & \text{pour } l \text{ pair} \\ 0, 2, 4, \cdots, l-1 & \text{pour } l \text{ impair.} \end{cases}$$

Les réalisations correspondantes sont données par les groupes linéaires orthogonaux d'une forme quadratique indéfinie à $2\,l$ variables réelles.

Si le déterminant de G_R est égal à -1 (seconde famille du groupe adjoint), on peut réduire cette opération à la forme

$$x'_1 = -x_1, \cdots, \; x'_{\sigma'} = -x_{\sigma'}, \; x'_{\sigma'+1} = x_{\sigma'+1}, \cdots, \; x'_{2l} = x_{2l}$$

l

où σ' est impair et prend les valeurs $1, 3, \cdots, 2\,l - 1$. Le caractère δ' vaut $1 - 2\,(l-\sigma')^2$. La même remarque que plus haut permet de donner à σ' es valeurs

$$\sigma' = \begin{cases} 1, 3, \cdots, l-1 & \text{pour } l \text{ pair} \\ 1, 3, \cdots, l & \text{pour } l \text{ impair.} \end{cases}$$

Les réalisations de ces structures sont analogues aux précédentes. En réunissant les deux cas, on voit, qu'il existe $l + 1$ types distincts de structures réelles de caractère

$$\delta = l - 2\,m^2$$
$$(m = 0, 1, \cdots, l)$$

b) $a_i = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ et le déterminant a le signe plus. G_R est donnée par les équations

$$x'_1 = -x_2\,, \cdots, x'_{2l-1} = -x_{2l}\,.$$
$$x'_2 = \quad x_1\,, \cdots, x'_{2l} \quad = \quad x_{2l-1}\,.$$

Le sous-groupe clos g est alors défini par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\,, & -a_{21} & & \\ a_{21}\,, & a_{11} & & \\ & \vdots & & \cdots \\ a_{2l-1,1}\,, & & -a_{2l,1} & \\ a_{2l,1}\,, & & a_{2l-1,1} & \end{matrix} \right\|$$

Son ordre n se détermine comme dans le cas du groupe du type (A) qui provenait d'une antiinvolution de seconde espèce; on trouve $n = l^2$ et $\delta = -l$. On vérifie immédiatement que g laisse invariantes les deux variétés planes

$$x_1 + i\,x_2 = \cdots = x_{2l-1} + i\,x_{2l} = 0$$
$$x_1 - i\,x_2 = \cdots = x_{2l-1} - i\,x_{2l} = 0$$

en vertu de la forme particulière des cœfficients de sa matrice. Le groupe ouvert G est ici le groupe linéaire à $2\,l$ variables complexes ξ_i (ou $4\,l$ variables réelles) qui laisse invariantes à la fois la forme quadratique $F^* \equiv \xi_1\,\xi_2 + \xi_3\,\xi_4 + \cdots + \xi_{2l-1}\,\xi_{2l}$ et la forme d'Hermite indéfinie $\Phi \equiv \xi_1\,\bar{\xi}_1 - \xi_2\,\bar{\xi}_2 + \cdots + \xi_{2l-1}\,\bar{\xi}_{2l-1} - \xi_{2l}\,\bar{\xi}_{2l}$. En supposant dans ce groupe les variables ξ_i liées par les relations $\xi_2 = \bar{\xi}_1$, $\xi_4 = \bar{\xi}_3$, $\cdots$, $\xi_{2l} = \bar{\xi}_{2l-1}$, on retrouve le groupe orthogonal de départ, car la forme F^* devient réelle et définie positive et coïncide avec F. Quant à la forme d'Hermite, elle disparaît identiquement. Le groupe g est réalisé de deux manières différentes suivant qu'on le considère comme sous-groupe du groupe clos orthogonal ou du groupe ouvert G. Le pont est fait entre les deux réalisations par les relations

$$\xi_2 = \bar{\xi}_1\,,\ \xi_4 = \bar{\xi}_3\,, \cdots, \xi_{2l} = \bar{\xi}_{2l-1}\,.$$

IV. Groupes du type (C)

Nous choisissons comme groupe clos de la structure (C), de rang $l(l \geqq 3)$ et d'ordre $l(2\,l+1)$, le groupe linéaire et homogène à $2\,l$ variables complexes, laissant invariantes à la fois la forme d'Hermite définie positive

$$\Phi \equiv x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_{2l} \bar{x}_{2l} \tag{1}$$

et la forme *quadratique extérieure*

$$F \equiv [\, x_1 x_2 \,] + [\, x_3 x_4 \,] + \cdots + [\, x_{2l-1} x_{2l} \,] \tag{2}$$

où l'on a par définition $[\, x_i x_k \,] = -[\, x_k x_i \,]$, $[\, x_i x_i \,] = 0$ et $[\, x_i x_k \,] = x_i y_k - x_k y_i$. Une transformation générale de ce groupe peut être représentée par la matrice A suivante:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\,, & -\bar{a}_{21} & \cdots & a_{1,2l-1}\,, & -\bar{a}_{2,2l-1} \\ a_{21}\,, & \bar{a}_{11} & & a_{2,2l-1}\,, & \bar{a}_{1,2l-1} \\ \vdots & & \cdots & \vdots & \\ a_{2l-1,1}\,, & -\bar{a}_{2l,1} & \cdots & a_{2l-1,2l-1}\,, & -\bar{a}_{2l,2l-1} \\ a_{2l,1}\,, & \bar{a}_{2l-1,1} & \cdots & a_{2l,2l-1}\,, & \bar{a}_{2l-1,2l-1} \end{matrix} \right\|$$

où les a_{ij} vérifient les relations d'invariance de la forme Φ (voir matrice analogue au chap. I). On vérifie en effet que ces matrices engendrent un groupe qui laisse invariante la forme (2) et qui est d'ordre $l(2\,l+1)$. Quant à la forme canonique d'une transformation quelconque du groupe, l'invariance de la forme d'Hermite donne tout d'abord (chap. I)

$$x'_k = e^{i\alpha_k} x_k \qquad (k = 1\,, \cdots, 2l)\,.$$

Pour que cette transformation laisse invariante la forme quadratique extérieure (2), il faut de plus $e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} = 1$, $e^{i\alpha_3} e^{i\alpha_4} = 1$, $\cdots$ ce qui peut s'écrire $e^{i\alpha_2} = e^{-i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_4} = e^{-i\alpha_3}$, $\cdots$, $e^{i\alpha_{2l}} = e^{-i\alpha_{2l-1}}$. On est alors conduit à la forme canonique

$$x'_1 = e^{i\alpha_1} x_1\,,\ x'_3 = e^{i\alpha_2} x_3\,,\ \cdots,\ x'_{2l-1} = e^{i\alpha_l} x_{2l-1}\,.$$

$$x'_2 = e^{-i\alpha_1} x_2\,,\ x'_4 = e^{-i\alpha_2} x_4\,,\ \cdots,\ x'_{2l} = e^{-i\alpha_l} x_{2l}\,.$$

Ici également, $G_R^2 = S$ multiplie toutes les variables par un même facteur et on a $e^{2i\alpha k} = e^{-2i\alpha_k}$ $(k = 1, \cdots, l)$ ou encore

$$e^{2i\alpha k} = \pm 1$$

ce qui conduit, suivant le signe, à deux cas essentiellement différents.

1er cas. $e^{2i\alpha k} = +1$ et $e^{i\alpha k} = \pm 1$. L'opération G_R est réductible à la forme

$$x_1' = -x_1, \cdots, x_{2s}' = -x_{2s}, x_{2s+1}' = x_{2s+1}, \cdots, x_{2l}' = x_{2l}.$$

Le sous-groupe g transforme séparément les variables $x_1, \cdots, x_{2s}$ et $x_{2s+1}, \cdots, x_{2l}$ et laisse invariantes deux formes d'Hermite et deux formes quadratiques extérieures formées avec les deux lots de variables précédents. Son ordre est dès lors $n = s(2s+1) + q(2q+1)$ où $q = l - s$, et $\delta = -l - 2(l-2s)^2$ avec $s = 0, 1, \cdots, l$. δ ne change pas quand on remplace s par $l - s$. En combinant alors les deux cas où l est pair et impair, on voit qu'il suffit de prendre pour s les valeurs comprises entre 0 et $\left[\frac{l}{2}\right]$. En posant $l - 2s = m$, on a la formule

$$\delta = -l - 2m^2$$
$$\left(m = l, l-2, \cdots, l - 2 \cdot \left[\frac{l}{2}\right]\right).$$

Ces structures ouvertes, au nombre de $\left[\frac{l+2}{2}\right]$, sont les groupes linéaires à $2l$ variables complexes laissant invariantes à la fois la forme quadratique extérieure $F \equiv [x_1 x_2] + \cdots + [x_{2l-1} x_{2l}]$ et la forme d'Hermite indéfinie.

$$\Phi \equiv x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_{2s} \bar{x}_{2s} - x_{2s+1} \bar{x}_{2s+1} - \cdots - x_{2l} \bar{x}_{2l}.$$

2me cas. $e^{2i\alpha_k} = -1$ et $e^{i\alpha_k} = \pm i$. Ici l'opération G_R est réductible à la forme unique

$$x_1' = i x_1, \quad , x_{2l-1}' = i x_{2l-1}.$$
$$\cdots$$
$$x_2' = -i x_2, \quad , x_{2l}' = -i x_{2l}.$$

Le sous-groupe g peut être représenté, en partant de la matrice A qui caractérise notre groupe, par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, 0 & & a_{1,2l-1} & 0 \\ 0, \bar{a}_{11} & & 0 & \bar{a}_{1,2l-1} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{2l-1,1}, 0 & & a_{2l-1,2l-1}, & 0 \\ 0, \bar{a}_{2l-1,1} & & 0 & , \bar{a}_{2l-1,2l-1} \end{matrix} \right\| .$$

Son ordre n vaut l^2, et $\delta = l$. Cette structure est réalisée par le groupe linéaire et homogène à $2\,l$ variables *réelles* laissant invariante la forme quadratique extérieure *réelle*

$$F \equiv [\, x_1\, x_2 \,] + \cdots + [\, x_{2l-1}\, x_{2l} \,].$$

Remarquons que la forme particulière de la matrice A va nous servir au chapitre VII, où le groupe qui en fait l'objet est un sous-groupe du groupe du type (C).

V. La seconde méthode

Nous allons retrouver les résultats précédents en appliquant la seconde méthode esquissée dans l'introduction. Il s'agit donc de déterminer les involutions du groupe adjoint continu pour chacune des quatre classes considérées. Cette méthode, n'opérant que dans la famille continue du groupe adjoint, ne fournit pas pour le type (A) les deux structures qui provenaient d'antiinvolutions, ni les structures du type (D) attachées aux transformations de déterminant négatif. Pour ces calculs, nous choisirons les systèmes des racines tels qu'ils sont donnés par M. Cartan dans les Ann. de l'Ecole Norm., t. 31, 1914. Remarquons encore que par cette méthode, la valeur du caractère δ s'obtient avec une grande facilité.

Groupes du type (A)

Le système des racines est donné par:

l racines identiquement nulles;

$l(l+1)$ racines de la forme $\pm\, i(\omega_\alpha - \omega_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, l+1)$, les quantités ω_α étant reliées par la relation $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{l+1} = 0$. La transformation identique $R^2 = E$ donne les conditions

$$e^{\pm i(\omega_\alpha - \omega_\beta)} = 1$$

ou, comme on voit facilement

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = 2\,\pi\,(k_\alpha - k_\beta)$$

où il suffit de donner aux entiers k_α les valeurs 0 et 1. L'involution R a par conséquent l multiplicateurs $+1$ (provenant des racines nulles) et $l(l+1)$ multiplicateurs ± 1 de la forme $e^{\pm i\pi(k_\alpha - k_\beta)}$. Le problème est donc simplement ramené aux différents choix possibles des entiers k_α. Le tableau suivant contient, à côté des opérations R ainsi déterminées, l'ordre n du sous-groupe g correspondant (égal au nombre des multiplicateurs $+1$), l'entier p (nombre des multiplicateurs -1) et enfin le caractère δ.

k_1	k_2	$\cdots$	k_{l-1}	k_l	k_{l+1}	$+1$	$e^{\pm i\pi(k_\alpha - k_\beta)}$	n	p	δ
0	0	$\cdots$	0	0	0	l fois	$+1: l(l+1)$ fois	$l(l+2)$	0	$-l(l+2)$
0	0	$\cdots$	0	0	1	l	$+1: l(l-1)$ $-1: 2l$	l^2	$2l$	$1-(l-1)^2$
0	0	$\cdots$	0	1	1	l	$+1: l^2-3l+4$ $-1: 4(l-1)$	l^2-2l+4	$4(l-1)$	$1-(l-3)^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$

Le tableau ci-dessus contiendra toutes les opérations R possibles dès que le nombre des k_α égaux à 1 aura atteint la valeur $\left[\frac{l+1}{2}\right]$. Les valeurs du caractère δ sont bien celles du chapitre I.

Groupes du type (B)

Les racines sont ici:

l racines identiquement nulles.

$2l$ racines de la forme $\pm i\,\omega_\alpha$

$2l(l-1)$ racines de la forme $i(\pm\omega_\alpha \pm \omega_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, l)$.

On en tire les conditions suivantes pour la transformation identique $R^2 = E$:

$$e^{\pm i\omega_\alpha} = 1\,, \quad e^{i(\pm\omega_\alpha \pm \omega_\beta)} = 1\,.$$

Il s'en suit

$$\omega_\alpha = 2\,k_\alpha\,\pi.$$

L'opération R aura les multiplicateurs suivants: l multiplicateurs $+1$, $2l$ de la forme $e^{\pm i k_\alpha \pi}$, $2l(l-1)$ enfin de la forme $e^{i\pi(\pm k_\alpha \pm k_\beta)}$. On obtient alors un tableau analogue au précédent qui contient toutes les

involutions R possibles en donnant aux entiers k_α les valeurs 0 et 1 et en augmentant le nombre des k_α égaux à 1 jusqu'à la valeur l. On retrouve les $l+1$ types réels et leurs caractères δ déterminés au chapitre II.

Groupes du type (D)

On ne retrouvera que les types réels attachés aux transformations de déterminant $+1$. Le système des racines est ici:

l racines identiquement nulles.
$2\,l(l-1)$ racines de la forme $i\,(\pm\,\omega_\alpha \pm\,\omega_\beta)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, l)$.

L'involution R est déterminée par les conditions suivantes:

$$\omega_\alpha = k_\alpha\,\pi$$

où les entiers k_α vérifient la condition

$$k_\alpha + k_\beta = \text{pair pour } \alpha \neq \beta = 1, \cdots, l.$$

Les k_α prennent les valeurs 0 et 2 jusqu'à ce que le nombre de ceux égaux à 2 ait atteint $\left[\frac{l}{2}\right]$ (chap. II, cas a) pour le déterminant $+1$), et finalement une possibilité est donnée en choisissant tous les k_α égaux à 1 (cas b) du chap. II). Les résultats coïncident avec ceux du chapitre II, exception faite pour les types mentionnés plus haut.

Groupes du type (C)

Les racines sont:

l racines identiquement nulles.
$2\,l$ racines de la forme $2\,i\,\omega_\alpha$
$2\,l(l-1)$ racines de la forme $i\,(\pm\,\omega_\alpha \pm\,\omega_\beta)$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, l)$

ce qui conduit aux conditions:

$$\omega_\alpha = k_\alpha\,\pi$$
$$\text{et } k_\alpha + k_\beta = \text{pair}.$$

Ici également, les k_α prennent les valeurs 0 et 2 jusqu'à ce que le nombre de ceux égaux à 2 ait atteint la valeur $\left[\frac{l}{2}\right]$ (chap. IV, 1er cas); en choisissant finalement tous les k_α égaux à 1, on retombe sur le 2me cas du chap. IV. Tous les résultats sont ainsi retrouvés par la seconde méthode.

DEUXIEME PARTIE

Les cinq structures exceptionnelles

Ces cinq structures sont les suivantes:

1. *Structure du type (G), de rang 2 et d'ordre 14.*
2. *Structure du type (E), de rang 7 et d'ordre 133.*
3. *Structure du type (E), de rang 8 et d'ordre 248.*
4. *Structure du type (F), de rang 4 et d'ordre 52.*
5. *Structure du type (E), de rang 6 et d'ordre 78.*

A part les deux méthodes vues jusqu'ici, et dont nous utiliserons dans la suite tantôt l'une, tantôt l'autre, et même les deux simultanément combinées, il en existe pour les structures exceptionnelles une troisième qui provient du fait que chacune de ces structures est contenue comme sous-groupe dans une structure simple appartenant à une des quatre grandes classes qui font l'objet de la première partie. L'idée est la suivante: Il suffit de chercher les opérations G_R parmi celles, déjà déterminées, du groupe qui contient la structure exceptionnelle considérée comme sous-groupe. Ce dernier admettant, en plus des invariants du groupe qui le contient, encore un ou plusieurs invariants qui le caractérisent, les opérations G_R cherchées seront donc celles qui n'altéreront pas ces nouveaux invariants. Ce procédé est comparable à un triage effectué parmi les opérations G_R, ne retenant que celles qui satisfont aux nouveaux invariants du sous-groupe. Cette méthode, plus indirecte que la première, conduit cependant assez rapidement au résultat, exception faite pour les structures (3) et (4) (les invariants de ces deux structures sont difficiles à établir; il faudrait pour cela calculer certains coefficients de l'équation caractéristique). Un point délicat subsiste: deux opérations G_R, homologues dans le groupe total, peuvent fort bien ne plus l'être dans le sous-groupe considéré; il reste alors à trancher la question d'homologie, respectivement de non-homologie.

VI. Groupes du type (G) de rang 2 et d'ordre 14

Ce groupe est contenu comme sous-groupe dans la structure du type (*B*) de rang 3 et d'ordre 21. Choisissons comme groupe clos la réalisation donnée par le plus grand groupe linéaire et homogène qui transforme les sept unités complexes des *octaves* de *Cayley* et *Graves* sans changer leur

loi de multiplication. Quelques indications sur ces nombres et sur ce groupe nous semblent nécessaires.

On appelle *octave* un nombre hypercomplexe en huit unités $e_0, e_1, e_2, \cdots, e_7$, dont la première est égale à 1; on l'écrira

$$A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_7 e_7$$

où les a_i sont des nombres réels ordinaires. Les lois de multiplication des unités entre elles sont les suivantes:

1. $e_k^2 = -1$.

2. $e_k e_l = -e_l e_k$.

3. On peut grouper les sept unités e_i en sept *triades*, contenant chacune trois unités et soumises aux règles de calcul suivantes: en partant de la triade $(e_i e_j e_k)$, on aura $e_i e_j = e_k$, $e_j e_k = e_i$, $e_k e_i = e_j$. Les sept triades sont

$$(e_1 e_2 e_4),\ (e_2 e_3 e_5),\ (e_3 e_4 e_6),\ \cdots,\ (e_7 e_1 e_3)$$

(on les obtient par permutation circulaire à partir de la première).

Le produit de deux octaves n'est en général ni commutatif, ni associatif, mais dans tous les cas distributif.

Le groupe envisagé sera représenté, en faisant correspondre aux indices 1, 2, $\cdots$, 7 les lettres a, b, c, d, f, g, h, par des équations de la forme

$$\begin{aligned} e_1' &= a_1 e_1 + \cdots + a_7 e_7 \\ e_2' &= b_1 e_1 + \cdots + b_7 e_7 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ e_7' &= h_1 e_1 + \cdots + h_7 e_7 \end{aligned}$$

les coefficients $a_i, b_k, \cdots$ étant des nombres réels ordinaires. Les lois de calcul 1. et 2. fournissent immédiatement les conditions d'orthogonalité bien connues. Les lois 3. donnent lieu à des conditions moins simples et d'une autre nature. On les obtient, en partant par exemple de la triade $(e_1 e_2 e_4)$, en exprimant que $e_1 e_2 = e_4$ doit entraîner $e_1' e_2' = e_4'$. Ces conditions sont

$$(a_5 b_6 - a_6 b_5) + (a_2 b_4 - a_4 b_2) + (a_3 b_7 - a_7 b_3) = d_1$$

etc. par permutation circulaire.

$$(a_4 b_5 - a_5 b_4) + (a_1 b_3 - a_3 b_1) + (a_2 b_6 - a_6 b_2) = d_7$$

auxquelles s'ajoutent toutes celles par rapport aux autres triades. Elles sont naturellement compatibles avec les conditions d'orthogonalité précédentes, comme on peut le vérifier immédiatement par le calcul. Les résultats obtenus sont capables d'une interprétation vectorielle fort simple. En considérant les cœfficients a_i, b_k, $\cdots$ comme les composantes de sept vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ dans un espace à sept dimensions, les conditions 1. et 2. nous disent déjà que ces vecteurs sont unitaires et perpendiculaires deux à deux. Les conditions 3. déterminent le vecteur $\mathfrak{d}$ au moyen des deux vecteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ par une opération que l'on pourrait regarder comme une généralisation du produit extérieur ordinaire de deux vecteurs et que nous noterons symboliquement par un crochet; soit $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{d}$, ce qui entraîne $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}] = \mathfrak{a}$ et $[\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{b}$. Il s'en suit qu'on aura généralement

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{d},\ [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = \mathfrak{f},\ \cdots,\ [\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{c}.$$

Ce sont les conditions 3. sous forme symbolique; elles vont nous permettre de vérifier très simplement que le groupe considéré contient bien 14 paramètres. Chaque transformation du groupe est représentée par un lot de sept vecteurs $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots, \mathfrak{h}$. Les conditions 1. et 2. signifient que ces sept vecteurs forment un 7-èdre de vecteurs unitaires et perpendiculaires deux à deux. Les conditions 3. sous forme symbolique montrent alors que trois vecteurs (le choix n'est pas complètement arbitraire) p. ex. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ déterminent univoquement les quatre autres $\mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Construisons alors le 7-*èdre* en partant du vecteur $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ étant *unitaire* a 6 degrés de liberté et dépend de 6 paramètres. Continuons par le vecteur $\mathfrak{b}$ qui satisfait aux deux conditions $\mathfrak{b}^2 = 1$ et $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}) = 0$ et dépend donc de 5 paramètres. $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ déterminent $\mathfrak{d}$. En continuant par le vecteur $\mathfrak{c}$, on voit qu'il satisfait à $\mathfrak{c}^2 = 1$, $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) = 0$, $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = 0$, $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = 0$ et qu'il dépend par conséquent de 3 paramètres. D'après la remarque faite plus haut, les autres vecteurs du 7-*èdre* sont complètement déterminés, et le nombre total des paramètres est bien 14.

La méthode la plus simple est ici de rechercher les opérations G_R parmi celles du groupe du type (B) dont notre groupe est sous-groupe. En nous reportant au chapitre II, nous voyons que l'opération G_R est de la forme

$$e_k' = a_k\, e_k \ (k = 1, \cdots, 7) \text{ et } a_k^2 = 1$$

où le nombre des multiplicateurs négatifs est pair. Exprimons alors que l'opération G_R respecte les lois de calcul des octaves. Les lois 1. et 2. sont vérifiées identiquement. La loi 3. par rapport aux triades nous conduit, en

considérant p. ex. la triade $(e_1\, e_2\, e_4)$, aux conditions $a_1\, a_2 = a_4$, $a_2\, a_4 = a_1$, $a_4\, a_1 = a_2$, et à des conditions analogues pour les autres triades. Le problème consiste dont à résoudre le système d'équations en $a_1, a_2, \cdots, a_7$. On en tire les règles suivantes qui se résument en deux possibilités: Les trois a_k d'une même triade sont tous positifs ou deux des a_k de la même triade sont négatifs, le troisième positif. On obtient alors le tableau suivant qui contient tous les cas possibles.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
J_0	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
J_1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1
J_2	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1
J_3	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
J_4	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$
J_5	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1
J_6	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
J_7	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$

où l'on a désigné par $J_0, J_1, \cdots, J_7$ les différentes opérations G_R. J_0 donne lieu au groupe clos dont nous sommes partis. Quant aux autres, elles sont toutes homologues entre elles. En effet, on passe de J_1 à J_2 par la formule $J_2 = A\, J_1\, A^{-1}$ où A est la substitution

$$e_1' = e_7,\ e_2' = e_1,\ e_3' = e_2,\ \cdots,\ e_7' = e_6$$

qui appartient au groupe puisque elle est une permutation circulaire. Il en est de même pour les autres. Soit J_1 le représentant choisi. Le sous-groupe g correspondant transforme séparément entre elles les variables e_1, e_2, e_4 et e_3, e_5, e_6, e_7. Pour calculer son ordre n, on peut appliquer la méthode qui nous a permis de vérifier que l'ordre du groupe total était 14. On trouve $n = 6$ et le caractère de la structure ouverte correspondante $\delta = 2$. Une réalisation en est donnée par le groupe linéaire à sept variables réelles laissant invariante une forme quadratique indéfinie en même temps qu'un système de sept équations bilinéaires alternées.

Esquissons, à simple titre d'exemple, les deux autres méthodes qui sont à notre disposition. La première qui opère dans le groupe même, est liée à la forme canonique qui est celle du chap. II et qui se réduit dans ce cas à:

$$
\begin{aligned}
e_1' &= e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi \\
e_2' &= e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi \\
e_3' &= e_3 \cos\varphi - e_6 \sin\varphi \\
e_6' &= e_3 \sin\varphi + e_6 \cos\varphi \\
e_4' &= e_4 \\
e_5' &= e_5 \\
e_6' &= e_6
\end{aligned}
$$

L'opération $G_R^2 = S$ multipliant toutes les variables par le facteur $+1$, on retrouve bien l'involution que nous avions notée J_4 dans le tableau précédent. La troisième méthode enfin, qui opère dans le groupe adjoint, est liée au système des racines suivant:

2 racines identiquement nulles.
6 racines de la forme $\pm i\,\omega_\alpha$.
6 racines de la forme $\pm i\,(\omega_\alpha - \omega_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$

avec la condition $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Les calculs sont ceux du chapitre V. On trouve les conditions : $\omega_\alpha = 2\,k_\alpha\,\pi$ et $\omega_\alpha - \omega_\beta = 2\,\pi\,(k_\alpha - k_\beta)$, où il suffit de prendre pour les entiers k_α les valeurs 0 et 1. On obtient ainsi deux opérations R, la première correspondant à la structure close et pour laquelle les k_α sont tous nuls, la seconde fournissant la structure ouverte obtenue tout-à-l'heure et correspondant aux entiers $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$; on vérifie de plus que le caractère δ est bien égal à 2.

VII. Groupes du type (E) de rang 7 et d'ordre 133

Cette structure est contenue comme sous-groupe dans le groupe du type (C) de rang 28 et d'ordre 1596. Le groupe irréductible clos dont nous partons est donné par le groupe linéaire et homogène à 56 variables complexes $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 8)$, telles que $x_{\beta\alpha} = -x_{\alpha\beta}$, $y_{\beta\alpha} = -y_{\alpha\beta}$. Ce groupe laisse invariantes à la fois: la forme d'Hermite définie positive

$$
(1) \qquad \sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}\,\bar{x}_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta}\,\bar{y}_{\alpha\beta}\,,
$$

la forme quadratique extérieure

$$
(2) \qquad \sum_{\alpha\beta} [x_{\alpha\beta}\,y_{\alpha\beta}]
$$

et la forme *biquadratique*

(3)

$$
\sum_{\alpha,\ldots,\delta} x_{\alpha\beta}\,x_{\gamma\delta}\,y_{\alpha\delta}\,y_{\beta\gamma} + \sum_{\alpha,\ldots,\tau} (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varrho\,\sigma\,\tau)\,\{x_{\alpha\beta}\,x_{\gamma\delta}\,x_{\varepsilon\varrho}\,x_{\sigma\tau} + y_{\alpha\beta}\,y_{\gamma\delta}\,y_{\varepsilon\varrho}\,y_{\sigma\tau}\}
$$

où $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\vartheta\,\varepsilon\,\varrho\,\sigma\,\tau) = \pm 1$ suivant que la permutation des indices est paire ou impaire. Nous utiliserons pour la recherche des opérations G_R la méthode directe qui opère dans le groupe même. En nous reportant au chapitre IV, nous voyons que les équations de la forme canonique du groupe seront du type

$$x'_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}}\, x_{\alpha\beta}$$
$$y'_{\alpha\beta} = e^{-i\varphi_{\alpha\beta}}\, y_{\alpha\beta}\,.$$

Notons pour abréger $e^{i\varphi_{\alpha\beta}} = \lambda_{\alpha\beta}$; il s'en suit $\lambda_{\beta\alpha} = \lambda_{\alpha\beta}$ ($|\lambda_{\alpha\beta}| = 1$). Pour avoir la forme canonique définitive, il faut exprimer que les équations précédentes respectent l'invariance de la forme biquadratique (3). Ceci nous conduit, vu les termes de nature différente qui composent cette forme, aux deux catégories de conditions

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lambda_{\alpha\beta}\,\lambda_{\gamma\delta}\,\bar{\lambda}_{\alpha\delta}\,\bar{\lambda}_{\beta\gamma} = 1 \\ \text{(b)} & \lambda_{\alpha\beta}\,\lambda_{\gamma\delta}\,\lambda_{\varepsilon\varrho}\,\lambda_{\sigma\tau} = 1 \end{array} \qquad (\alpha, \beta, \cdots, \tau = 1, 2, \cdots, 8)$$

qui vont nous permettre de trouver une propriété remarquable des multiplicateurs $\lambda_{\alpha\beta}$ et d'établir très simplement la forme canonique du groupe. Les conditions (a) peuvent s'écrire $\frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\delta}} \cdot \frac{\lambda_{\gamma\delta}}{\lambda_{\gamma\beta}} = 1$ ou encore $\frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\delta}} = \frac{\lambda_{\gamma\beta}}{\lambda_{\gamma\delta}}$. En faisant parcourir alors à l'indice de gauche toutes les valeurs possibles, on peut réduire les conditions (a) aux sept systèmes suivants

$$\begin{array}{l} \frac{\lambda_{\gamma\alpha}}{\lambda_{\gamma\beta}} = \cdots = \frac{\lambda_{x\alpha}}{\lambda_{x\beta}}\,(x \neq \alpha, \beta) \\ \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\gamma}} = \cdots = \frac{\lambda_{x\beta}}{\lambda_{x\gamma}}\,(x \neq \beta, \gamma) \\ \qquad\vdots \\ \frac{\lambda_{\alpha\sigma}}{\lambda_{\alpha\tau}} = \cdots = \frac{\lambda_{x\sigma}}{\lambda_{x\tau}}\,(x \neq \sigma, \tau) \end{array}$$

les conditions non écrites dépendant linéairement des précédentes. On voit que les quotients figurant dans la même ligne sont égaux à une quantité de module un qui ne dépend que de deux indices. Dès lors, on peut définir au moyen du système précédent sept quantités $A^{\alpha}_{\beta}, A^{\beta}_{\gamma}, \cdots, A^{\sigma}_{\tau}$ qui satisfont aux relations suivantes:

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 1\,,\quad A^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{A^{\alpha}_{\beta}}\,,\quad A^{\beta}_{\delta} = A^{\beta}_{\gamma}\,A^{\gamma}_{\delta}\,.$$

On obtient ainsi toutes les quantités A^{i}_{j} qui correspondent aux équations

(a). La simplification prévue plus haut découle du fait que l'on peut écrire pour les A^{α}_{β}:

$$A^{\alpha}_{\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$$

où les λ_i sont, comme nous le verrons, de module un. La nouvelle notation respecte toutes les relations entre les A^i_j et fournit la solution la plus générale du système d'équations (a). Pour le voir, il suffit de partir des λ_i et de constater que les relations ainsi obtenues pour les A^i_j sont les mêmes que précédemment. En partant des deux équations $\frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\gamma}} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\gamma}$ et $\frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\delta}} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\delta}$, on voit que l'on a $\lambda_{\alpha\beta} = \varrho_\alpha \cdot \lambda_\beta$ et $\lambda_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \cdot \lambda_\beta$ d'où l'on tire $\sigma_\alpha = \varrho_\alpha$; on aura donc $\lambda_{\alpha\beta} = \varrho_\alpha \cdot \lambda_\beta$. D'autre part, de $\frac{\lambda_{\beta\alpha}}{\lambda_{\beta\gamma}} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\gamma}$ on tire $\lambda_{\beta\alpha} = \varrho_\beta \cdot \lambda_\alpha$ et enfin $\varrho_\alpha \lambda_\beta = \varrho_\beta \lambda_\alpha$ qui permet de poser $\varrho_\alpha = \mu \lambda_\alpha$, le facteur μ étant le même pour tous les indices; on peut le choisir égal à un en vertu de l'homogénéité des variables. Or, comme $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right| = \left|A^i_k\right| = 1$, il s'en suit $|\lambda_i| = |\lambda_k|$; d'autre part *on a* $|\lambda_{ik}| = |\lambda_i| \cdot |\lambda_k| = |\lambda_i|^2 = 1$ et enfin $|\lambda_i| = 1$. On a dès lors le résultat remarquable suivant:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta .$$

Avec cette notation, les conditions (a) sont vérifiées identiquement et les conditions (b) se résument en une seule équation:

$$\prod_{i=1}^{8} \lambda_i = 1 .$$

La forme canonique cherchée est alors

$$x'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta x_{\alpha\beta} .$$
$$y'_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta y_{\alpha\beta} .$$

La recherche des opérations G_R est maintenant très simple. Le facteur qui multiplie toutes les variables est donné par la condition $\lambda^2_\alpha \lambda^2_\beta = \bar{\lambda}^2_\alpha \bar{\lambda}^2_\beta$. Il est égal à $\lambda^2_\alpha \lambda^2_\beta = \pm 1$, les deux signes permettant de distinguer deux cas essentiellement différents.

Ier cas. $\lambda^2_\alpha \lambda^2_\beta = +1$.

Les égalités $\lambda^2_\alpha \lambda^2_\beta = 1$, $\lambda^2_\alpha \lambda^2_\gamma = 1$, $\cdots$ ont comme conséquence $\lambda^2_\alpha = \lambda^2_\beta = \cdots = \lambda^2_\tau$, ce qui conduit à $\lambda^4_\alpha = 1$ et $\lambda^2_\alpha = \pm 1$.

a) $\lambda_\alpha^2 = +1$ et $\lambda_\alpha = \pm 1$. La condition (b) montre que le nombre des λ_α négatifs est pair, soit 0, 2, 4, 6, 8; pour 0 et 8, l'opération G_R correspondante est l'identité. Les cas 2 et 6 fournissent, à l'ordre des indices près, la même opération. En définitive, nous avons les deux cas 2 et 4, donnant lieu à deux opérations que nous noterons J_2 et J_4. Remarquons que ces deux opérations contienent le même nombre de multiplicateurs négatifs; nous verrons plus loin qu'elles sont homologues. Il va sans dire que toutes les opérations G_R qui ne diffèrent que par le choix des λ_α négatifs sont homologues; on passe de l'une à l'autre par une certaine permutation des variables. J_2 et J_4 sont données par:

$$\begin{aligned} x'_{\alpha\beta} &= \lambda_\alpha \lambda_\beta x_{\alpha\beta} \\ y'_{\alpha\beta} &= \lambda_\alpha \lambda_\beta y_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad \begin{cases} \lambda_\alpha = \lambda_\beta = -1, \lambda_\varrho = +1 \ (\varrho \neq \alpha, \beta) : J_2. \\ \lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma = \lambda_\delta = -1, \lambda_\varrho = +1 \ (\varrho \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta) : J_4. \end{cases}$$

b) $\lambda_\alpha^2 = -1$ et $\lambda_\alpha = \pm i$.

Ce cas ne diffère pas du précédent; les multiplicateurs sont simplement changés de signe et le résultat est le même.

IIme cas. $\lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^2 = -1$.

On a de nouveau $\lambda_\alpha^2 = \lambda_\beta^2 = \cdots = \lambda_\tau^2$, ce qui nous donne $\lambda_\alpha^4 = -1$ et $\lambda_\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}(2k_\alpha+1)}$. La condition (b) conduit à la relation suivante: $\sum_{\alpha=1}^{8} k_\alpha = 4l$, à laquelle s'ajoute, en vertu de $\lambda_\alpha^2 = \lambda_\beta^2$, la condition supplémentaire $k_\alpha - k_\beta = 2m$. Les entiers k_α, qu'il suffit de prendre mod. (4), seront soit tous pairs, soit tous impairs. Les calculs montrent que l'on peut se borner à donner à l les trois valeurs 0, 1, 2, et que les opérations cherchées sont au nombre de trois; elles correspondent aux trois systèmes d'entiers k_α suivants:

$$k_1, k_2, \cdots, k_8 = \begin{cases} 0, 0, 0, & \cdots, 0. \\ 2, 2, 0, & \cdots, 0. \\ 2, 2, 2, 2, 0, & \cdots, 0. \end{cases}$$

Au premier système appartient l'opération I, définie par les équations

$$\begin{aligned} x'_{\alpha\beta} &= i\, x_{\alpha\beta}. \\ y'_{\alpha\beta} &= -i\, y_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Le second définit l'opération IJ_2 (produit de I par J_2) au moyen des équations

$$\begin{aligned} x'_{\alpha\beta} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \, i \, x_{\alpha\beta} \\ y'_{\alpha\beta} &= - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \, i \, y_{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad (\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1, \varepsilon_\varrho = +1, \varrho \neq \alpha, \beta).$$

Le troisième enfin fournit l'opération IJ_4 (produit de I par J_4) donnée par les équations

$$\begin{aligned} x'_{\alpha\beta} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \, i \, x_{\alpha\beta} \\ y'_{\alpha\beta} &= - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \, i \, y_{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad (\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\delta = -1, \varepsilon_\varrho = +1, \varrho \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

On a donc finalement, à part l'identité, les cinq opérations J_2, J_4, I, IJ_2, IJ_4.

Il s'agit maintenant de trancher la question d'homologie entre ces cinq opérations. Notre groupe étant sous-groupe d'un groupe du type (C) (chapitre IV), nous voyons qu'aucune des trois dernières opérations ne peut être homologue à une des deux premières, puisque ceci n'a pas lieu dans le groupe (C). Dès lors, la question peut être traitée séparément pour les deux premières et les trois dernières opérations. La méthode la plus simple est ici de faire le détour par le groupe adjoint.

Le système des racines de l'équation caractéristique est donné par:

7 racines identiquement nulles.

56 racines de la forme $\pm i(\omega_\alpha - \omega_\beta)$

70 racines de la forme $i(\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta)$ $\quad (\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, \cdots, 8)$

les quantités ω_α étant liées par la relation $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_8 = 0$. La considération de la transformation identique $R^2 = E$ conduit aux conditions:

$$\omega_\alpha = \lambda \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k_\alpha \text{ et } \sum_{\alpha=1}^{8} k_\alpha = -2\lambda$$

et détermine les multiplicateurs:

7 multiplicateurs $+1$.

56 multiplicateurs $e^{\pm i\pi(k_\alpha - k_\beta)}$

70 multiplicateurs $e^{i\pi(\lambda + k_\alpha + k_\beta + k_\gamma + k_\delta)}$

avec la condition $\sum_{\alpha=1}^{8} k_\alpha = -2\lambda$. Il suffit de prendre les k_α mod. (2), de même que λ. On arrive alors au tableau suivant, dans lequel sont indiquées, à côté des valeurs de λ, des k_α et des multiplicateurs, celles de n (ordre du sous-groupe g correspondant), du nombre p si souvent considéré,

et enfin du caractère δ. Les involutions obtenues sont désignées par les lettres A, B, C, respectivement AB, AC.

	λ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	$e^{\pm i\pi(k_\alpha - k_\beta)}$	$e^{i\pi(\lambda + k_\alpha + \ldots + k_\delta)}$	$+1$	n	p	δ
A	1	−2	0	0	·	·	·	·	0	+1: 56 fois	−1: 70 fois	7	63	70	7
B	0	1	−1	0	·	·	·	·	0	+1: 32 ,, −1: 24 ,,	+1: 30 ,, −1: 40 ,,	7	69	64	−5
AB	1	−1	−1	0	·	·	·	·	0	+1: 32 ,, −1: 24 ,,	+1: 40 ,, −1: 30 ,,	7	79	54	−25
C	0	1	1	−1	−1	0	·	·	0	+1: 24 ,, −1: 32 ,,	+1: 38 ,, −1: 32 ,,	7	69	64	−5
AC	1	1	−1	−1	−1	0	·	·	0	+1: 24 ,, −1: 32 ,,	+1: 32 ,, −1: 38 ,,	7	63	70	7

Ce tableau fournit trois valeurs différentes pour δ. Dès lors, des cinq opérations G_R considérées, il n'y en a que trois à retenir, chacune des deux restantes étant nécessairement homologue à une de ces trois. Une simple remarque va nous permettre d'établir la correspondance entre les cinq opérations J_2, J_4, I, IJ_2, IJ_4, et celles du groupe adjoint A, B, C, AB, AC. Or cette correspondance est biunivoque. En effet, supposons que les deux opérations J' et J'' correspondent à la même opération du groupe adjoint. On a alors, si G est une transformation quelconque du groupe, les deux relations $G' = J'GJ'$ et $G' = J''GJ''$ et par suite $(J'\,J'')G = G(J'\,J'')$, ce qui signifie que $(J'\,J'')$ serait échangeable avec toutes les transformations du groupe; mais ceci est impossible, puisque, comme on le voit immédiatement, $(J'\,J'')$ est de nouveau une opération G_R. Dès lors, le nombre des opérations G_R de chaque type doit se retrouver dans les opérations R du groupe adjoint, et on peut dire que deux catégories d'opérations, l'une dans le groupe, l'autre dans le groupe adjoint, ne se correspondent que si elles contiennent le même nombre d'opérations. La répartition en catégories est la suivante:

Les opérations J_2 sont au nombre de $\binom{8}{2} = 28$, celles B au nombre de 28
Les opérations J_4 sont au nombre de $\binom{8}{4} = 70$, celles C au nombre de 70
Les opérations I sont au nombre de 1, celles A au nombre de 1
Les opérations IJ_2 sont au nombre de 28, celles AB au nombre de 28
Les opérations IJ_4 sont au nombre de 70, celles AC au nombre de 70

Une indétermination subsiste; il y a, d'après la remarque faite plus haut, les possibilités suivantes de correspondance:

$$J_2 \to B \text{ ou } AB; \quad J_4 \to C \text{ ou } AC.$$

Quant à l'opération I, on a $I \to A$.

Il y a donc, à première vue, quatre correspondances possibles:

(1) $J_2 \to B$	(2) $J_2 \to B$	(3) $J_2 \to AB$	(4) $J_2 \to AB$
$J_4 \to C$	$J_4 \to AC$	$J_4 \to C$	$J_4 \to AC$
$I \to A$	$I \to A$	$I \to A$	$I \to A$
$IJ_2 \to AB$	$IJ_2 \to AB$	$IJ_2 \to B$	$IJ_2 \to B$
$IJ_4 \to AC$	$IJ_4 \to C$	$IJ_4 \to AC$	$IJ_4 \to C$

Le tableau montre que B et C sont homologues, de même que A et AC; ceci élimine les correspondances (2), (3) et (4), puisque J_2 ne peut être homologue à IJ_4, etc. Il reste donc la correspondance (1) et l'on a les relations d'homologie cherchées:

$$J_4 \sim J_2, \quad IJ_4 \sim I.$$

Les opérations G_R définitives sont J_2, I, IJ_2, qui déterminent trois structures ouvertes.

1. La structure ouverte définie par J_2 contient le sous-groupe clos g qui transforme séparément les variables pour lesquelles le multiplicateur correspondant est égal soit à -1, soit à $+1$. Il laisse en particulier invariantes deux formes d'Hermite qui contiennent respectivement les variables transformées séparément. Le groupe ouvert est le groupe linéaire et homogène à 56 variables complexes qui, à côté des formes (2) et (3) considérées au début de ce chapitre, laisse invariante la forme d'Hermite indéfinie

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{8} \lambda_\alpha \lambda_\beta (x_{\alpha\beta} \bar{x}_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta} \bar{y}_{\alpha\beta}) \; ; \; \lambda_\alpha = \lambda_\beta = -1 \, , \, \lambda_\varrho = +1 \; (\varrho \neq \alpha \, , \, \beta) \, .$$

2. Le sous-groupe clos g de la structure ouverte définie par I transforme séparément les variables $x_{\alpha\beta}$ et $y_{\alpha\beta}$. En considérant variables et paramètres comme réels, on arrive à la réalisation donnée par le groupe linéaire et homogène à 56 variables réelles qui laisse invariantes les deux formes (2) et (3), toutes deux à variables réelles.

3. La structure définie par IJ_2 contient le sous-groupe clos g qui transforme séparément les variables de multiplicateur $-i$ et celles de multiplicateur $+i$. Les variables de multiplicateur $-i$ seront désignées symboliquement par $x^1_{\alpha\beta}$ (au nombre de 12), $y^2_{\alpha\beta}$ (au nombre de 16), et celles de multiplicateur $+i$ par $x^2_{\alpha\beta}$ (au nombre de 16), $y^1_{\alpha\beta}$ (au nombre de 12). On peut alors donner à la matrice de g la forme suivante:

(I)

	$12\,x^1$	$16\,x^2$	$12\,y^1$	$16\,y^2$
$12\,x^{1\prime}$		0	0	
$16\,x^{2\prime}$	0			0
$12\,y^{1\prime}$	0			0
$16\,y^{2\prime}$		0	0	

où seuls les rectangles hachurés contiennent des cœfficients différents de zéro. On peut envisager le sous-groupe g d'un autre point de vue. Partons à cet effet de la matrice qui représente une transformation générale quelconque du groupe total. En nous rappelant l'expression trouvée pour une matrice du groupe du type (C) au chapitre IV, on peut écrire la matrice suivante, où les cœfficients ne sont indiqués qu'en bloc, se rapportant aux indices symboliques 1 et 2 introduits tout à l'heure et étant supposés vérifier les relations d'invariance qui sont à la base de notre groupe:

A_1	A_2	$-\overline{B}_1$	$-\overline{B}_2$
A_3	A_4	$-\overline{B}_3$	$-\overline{B}_4$
B_1	B_2	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$
B_3	B_4	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$

Recherchons parmi toutes les matrices de cette forme celles qui respectent les relations

$$(*) \qquad y_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \overline{x}_{\alpha\beta}\,. \quad (\lambda_\alpha = \lambda_\beta = -1\,,\ \lambda_\varrho = +1,\ \varrho \neq \alpha\,,\beta)$$

ou, au moyen de notre notation symbolique

$$(*) \qquad \begin{aligned} y^1_{\alpha\beta} &= -\bar{x}^1_{\alpha\beta} \\ y^2_{\alpha\beta} &= +\bar{x}^2_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ecrivons les équations de transformation du groupe sous une forme abrégée, en supprimant les signes $\sum$:

$$\begin{aligned} x^{1\prime} &= A_1 x^1 + A_2 x^2 - \overline{B}_1 y^1 - \overline{B}_2 y^2. \\ x^{2\prime} &= A_3 x^1 + A_4 x^2 - \overline{B}_2 y^1 - \overline{B}_4 y^2. \\ y^{1\prime} &= B_1 x^1 + B_2 x^2 + \overline{A}_1 x^1 + \overline{A}_2 y^2. \\ y^{2\prime} &= B_3 x^1 + B_4 x^2 + \overline{A}_3 y^1 + \overline{A}_4 y^2. \end{aligned}$$

En y introduisant les relations (*), on trouve les conditions $A_2 = A_3 = B_1 = B_4 = 0$, et la matrice prend la forme (I), ce qui montre bien que l'on a affaire au même sous-groupe g, réalisé d'un autre point de vue. Cette nouvelle interprétation de g permet de faire le pont entre la structure close et la structure ouverte definié par IJ_2 et conduit à la réalisation donnée par le groupe linéaire et homogène à 56 variables $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$ liées par les relations (*) et qui laisse invariantes les formes (2) et (3). Ces trois structures sont respectivement de caractère — 5, 7 et — 25.

VIII. Groupes du type (E) de rang 8 et d'ordre 248

Ce groupe est contenu comme sous-groupe dans le groupe du type (D) de rang 124 et d'ordre 30628. Nous partirons de la réalisation donnée par le groupe adjoint linéaire et homogène clos de la structure donnée et opérerons par la seconde méthode. Le système des racines est ici le suivant:

8 racines identiquement nulles.
72 racines de la forme $\pm i(\omega_\alpha - \omega_\beta)$
168 racines de la forme $\pm i(\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma)$ $\qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, 9)$

les quantités ω_α étant liées par la condition $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_9 = 0$. La marche à suivre étant toujours la même, nous indiquerons simplement le résultat. On obtient pour les ω_α les valeurs $\omega_\alpha = \lambda \cdot \frac{2\pi}{3} + 2\pi k_\alpha$ $(\lambda = 0, 1, 2;\ k_\alpha = 0, 1)$ avec la condition supplémentaire $\sum_{\alpha=1}^{9} k_\alpha = -3\lambda$.

Les calculs montrent que l'on peut se borner à la valeur zéro pour λ et à un choix très restreint pour les k_α. Le tableau des involutions R est alors:

	$k_1, k_2, \cdots\cdots\cdots, k_9$	$e^{\pm i\pi(k_\alpha - k_\beta)}$	$e^{\pm i\pi(\lambda + k_\alpha + k_\beta + k_\gamma)}$	$+1$	n	p	δ
E	0, 0 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 0	$+1$: 72 fois	$+1$: 168 fois	8	248	0	-248
R_1	1, -1, 0 $\cdots\cdots\cdots$ 0	$+1$: 44 ,, -1: 28 ,,	$+1$: 84 ,, -1: 84 ,,	8	136	112	-24
R_2	1, 1, -1, -1, 0,$\cdots$,0	$+1$: 32 ,, -1: 40 ,,	$+1$: 80 ,, -1: 88 ,,	8	120	128	$+8$

A part l'identité, il existe seulement deux opérations R donnant lieu à deux structures ouvertes réalisées par les deux groupes adjoints correspondants, chacun à 248 variables et respectivement de caractère 8 et -24.

IX. Groupes du type (F) de rang 4 et d'ordre 52

Ce groupe est contenu comme sous-groupe dans le groupe du type (D) de rang 13 et d'ordre 325. Ici également, la seconde méthode conduit rapidement au résultat. Les racines caractéristiques sont données par le système:

4 racines identiquement nulles.
8 ,, de la forme $\pm\, i\,\omega_\alpha$
24 ,, ,, ,, ,, $i\,(\pm\,\omega_\alpha \pm \omega_\beta)$ $\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$
16 ,, ,, ,, ,, $\frac{i}{2}\,(\pm\,\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4)$.

On trouve les conditions $\omega_\alpha = k_\alpha\,\pi$ et $\pm\,k_1 \pm k_2 \pm k_3 \pm k_4 = 2\,m$. Indiquons simplement le tableau des involutions R.

	k_1	k_2	k_3	k_4	$e^{\pm i k_\alpha \pi}$	$e^{i\pi(\pm k_\alpha \pm k_\beta)}$	$e^{\frac{i\pi}{2}(\pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 \pm k_4)}$	$+1$	n	p	δ
E	0	0	0	0	$+1$: 8 fois	$+1$: 24 fois	$+1$: 16 fois	4	52	0	-52
R_1	2	0	0	0	$+1$: 8 ,,	$+1$: 24 ,,	-1: 16 ,,	4	36	16	-20
R_2	1	1	0	0	$+1$: 4 ,, -1: 4 ,,	$+1$: 8 ,, -1: 16 ,,	$+1$: 8 ,, -1: 8 ,,	4	24	28	$+4$

La structure de caractère $\delta = +4$ peut être réalisée par le *groupe normal* (Cartan, Thèse, pages 145—146) à 26 variables complexes. Les

deux structures restantes donnent lieu à des réalisations qui découlent du groupe normal en y liant les 26 variables complexes par certaines relations. Le groupe de caractère — 52 réalise la structure close; il laisse en particulier invariante une forme quadratique définie positive à 26 termes.

X. Groupes du type (E) de rang 6 et d'ordre 78

Ce groupe est contenu comme sous-groupe dans le groupe du type (A) de rang 26 et d'ordre 728. Le groupe adjoint est *mixte* et contient deux familles; nous aurons par conséquent à distinguer deux cas essentiellement différents, suivant que l'opération R appartient ou non au groupe adjoint continu.

La structure close dont nous partons est donnée par le groupe linéaire et homogène à 27 variables complexes qui laisse invariantes les deux formes:

1. Une forme cubique

$$F \equiv \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta z_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha,\ldots,\mu} (\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu)\, z_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} z_{\lambda\mu} . \tag{1}$$

2. Une forme d'Hermite définie positive

$$H \equiv \sum_{\alpha} x_\alpha \bar{x}_\alpha + \sum_{\beta} y_\beta \bar{y}_\beta + \sum_{\alpha,\beta} z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

les variables étant x_α, y_β, $z_{\alpha\beta}$, ces dernières vérifiant l'égalité $z_{\beta\alpha} = -z_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, \cdots, 6)$.

Ier cas. L'opération R appartient au groupe adjoint continu. Nous utiliserons la première méthode qui opère dans le groupe lui-même. Une transformation finie quelconque du groupe peut être réduite à la forme canonique suivante (voir chapitre I):

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= \varrho_\alpha x_\alpha \\ y'_\beta &= \sigma_\beta y_\beta \\ z'_{\alpha\beta} &= \omega_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &|\varrho_\alpha| = |\sigma_\beta| = |\omega_{\alpha\beta}| = 1 , \ \omega_{\beta\alpha} = \omega_{\alpha\beta} , \\ &\qquad \prod_{\alpha,\beta} \varrho_\alpha \sigma_\beta \omega_{\alpha\beta} = 1; \ (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 6) . \end{aligned} \right.$$

où les multiplicateurs ϱ_α, σ_β, $\omega_{\alpha\beta}$ sont reliés par certaines relations que nous allons établir. L'invariance de la forme (1) nous fournit une première catégorie de conditions qui sont

$$\varrho_\alpha \sigma_\beta \omega_{\alpha\beta} = 1 \rightarrow \omega_{\alpha\beta} = \bar{\varrho}_\alpha \bar{\sigma}_\beta .$$

$$\varrho_\beta \sigma_\alpha \omega_{\beta\alpha} = 1 \rightarrow \omega_{\alpha\beta} = \bar{\varrho}_\beta \bar{\sigma}_\alpha .$$

Il s'en suit : $\varrho_\alpha \sigma_\beta = \varrho_\beta \sigma_\alpha \rightarrow \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} = \frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha}$

et enfin : $\varrho_\alpha = \lambda \varrho_\alpha$, $\sigma_\beta = \lambda \varrho_\beta$, $\cdots$

(le cœfficient λ est le même pour tous les indices). Ceci conduit aux relations suivantes pour les multiplicateurs

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \lambda \varrho_\beta \\ \omega_{\alpha\beta} &= \bar{\lambda}\, \bar{\varrho}_\alpha\, \bar{\varrho}_\beta \,. \end{aligned}$$

La seconde partie de la forme (1) nous donne une deuxième catégorie de relations, à savoir $\omega_{\alpha\beta}\, \omega_{\gamma\delta}\, \omega_{\lambda\mu} = 1$, ce qui fixe la quantité λ par la condition

$$\lambda^3 = \bar{\varrho}_\alpha\, \bar{\varrho}_\beta\, \bar{\varrho}_\gamma\, \bar{\varrho}_\delta\, \bar{\varrho}_\lambda\, \bar{\varrho}_\mu \,.$$

La forme canonique cherchée est alors

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= \varrho_\alpha x_\alpha \\ y'_\beta &= \lambda \varrho_\beta y_\beta \\ z'_{\alpha\beta} &= \bar{\lambda}\, \bar{\varrho}_\alpha\, \bar{\varrho}_\beta z_{\alpha\beta} \,. \end{aligned}$$

Le groupe étant irréductible, la recherche du facteur relatif à G_R^2 conduit aux conditions

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_\beta^2 = \cdots = \lambda^2 \varrho_\alpha^2 = \lambda^2 \varrho_\beta^2 = \cdots = \bar{\lambda}^2 \bar{\varrho}_\alpha^2 \bar{\varrho}_\beta^2 = \cdots ,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha &= \pm \varrho_k \,. \\ \varrho_\alpha^2 &= \lambda^2 \varrho_\alpha^2 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1 \,. \\ \varrho_\alpha^2 &= \bar{\lambda}^2 \bar{\varrho}_\alpha^2\, \bar{\varrho}_\beta^2 = \bar{\varrho}_\alpha^4 \rightarrow \varrho_\alpha^6 = 1 \,. \end{aligned}$$

En désignant par ε une sixième racine quelconque de l'unité, on obtient les multiplicateurs sous la forme

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha &= \pm \varepsilon \\ \sigma_\beta &= \pm \varepsilon \\ \omega_{\alpha\beta} &= \pm \varepsilon \,, \; (\omega_{\alpha\beta} = \pm \bar{\varepsilon}^2 = \pm \varepsilon^4 = \pm \varepsilon^3 \cdot \varepsilon = \pm \varepsilon) \,. \end{aligned}$$

Les variables étant homogènes, on peut supprimer le facteur ε et donner l'opération G_R par des multiplicateurs ± 1. Dans ce cas, le déterminant peut aussi devenir négatif et les opérations G_R sont complètement déter-

minées par l'unique condition $\varrho_\alpha \varrho_\beta \varrho_\gamma \varrho_\delta \varrho_\lambda \varrho_\mu = \lambda^3 = \pm 1$, $(\varrho_k = \pm 1)$, celle-ci permettant de distinguer deux cas suivant le signe attribué à λ:

$$1. \qquad \prod_1^6 \varrho_k = +1 \rightarrow \sigma_k = \varrho_k\,, \quad \omega_{\alpha\beta} = \varrho_\alpha \varrho_\beta\,.$$

$$2. \qquad \prod_1^6 \varrho_k = -1 \rightarrow \sigma_k = -\varrho_k\,, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\varrho_\alpha \varrho_\beta\,.$$

Le tableau suivant contient les opérations G_R, désignées par $J_0, J_1, J_2, \cdots$, où l'indice indique le nombre des ϱ_k négatifs; les multiplicateurs qui n'y figurent pas sont égaux à $+1$. La colonne à droite indique enfin le nombre N des multiplicateurs négatifs.

$J_0 \equiv E$	tous les multiplicateurs sont égaux à $+1$	0
J_2	$\varrho_5 = \varrho_6 = \sigma_5 = \sigma_6 = -1$; $\omega_{5j} = \omega_{6j} = -1$; $(j = 1, 2, 3, 4)$	12
J_4	$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = -1$; $\omega_{5j} = \omega_{6j} = -1$; $(j = 1, 2, 3, 4)$	16
J_6	$\varrho_1 = \cdots = \varrho_6 = \sigma_1 = \cdots = \sigma_6 = -1$; $\omega_{ij} = +1$ $(i, j = 1, 2, \cdots, 6)$	12
J_1	$\varrho_6 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = -1$; $\omega_{ij} = -1$ sauf $\omega_{6j} = +1$ $(j = 1, \cdots, 5)$	16
J_3	$\varrho_4 = \varrho_5 = \varrho_6 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$; $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{45} = \omega_{46} = \omega_{56} = -1$	12
J_5	$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = \sigma_6 = -1$; $\omega_{ij} = -1$ sauf $\omega_{6j} = +1$ $(j = 1, \cdots, 5)$	16

Toutes les opérations G_R avec le même nombre N de multiplicateurs négatifs sont homologues entre elles; on a donc $J_2 \sim J_6 \sim J_3$ et $J_4 \sim J_1 \sim J_5$. On peut en effet déterminer pour chaque couple d'opérations homologues une transformation T du groupe telle que l'on ait $J_a = T\, J_b\, T^{-1}$. Par exemple, on passe de J_1 à J_5 par la transformation $x'_\alpha = y_\alpha$, $y'_\beta = -x_\beta$, $z'_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}$. Il en est de même pour les autres couples, mais les transformations T correspondant à ces derniers sont beaucoup moins simples que la précédente; nous renonçons par conséquent à les indiquer ici.

Le seconde méthode confirme les résultats obtenus et fournit en outre les valeurs du caractère δ qui sont -78, $+2$ et -14 pour les structures déterminées respectivement par les opérations J_0, J_6 et J_5, et qui peuvent être réalisées par des groupes linéaires et homogènes à 27 variables complexes, laissant invariantes la forme cubique (1) et en même temps une certaine forme d'Hermite: la forme définie positive (2) pour la structure appartenant à J_0 (groupe clos dont nous sommes partis), les formes d'Hermite indéfinies

$$\sum x_\alpha \bar{x}_\alpha + \sum y_\beta \bar{y}_\beta - \sum z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta},$$

$$\sum_1^5 x_\alpha \bar{x}_\alpha - x_6 \bar{x}_6 - \sum_1^5 y_\beta \bar{y}_\beta + y_6 \bar{y}_6 + \sum_1^5 z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} - \sum_1^5 z_{\alpha 6} \bar{z}_{\alpha 6}$$

pour les deux autres structures. On se rend compte que ces deux formes d'Hermite sont bien celles qui correspondent à nos deux structures ouvertes en considérant leurs sous-groupes clos g respectifs et en constatant la manière caractéristique dont ils transforment les variables.

IIme cas. L'opération R n'appartient pas au groupe adjoint continu.

Le groupe adjoint est *mixte* et se compose de deux familles dont une seule forme un groupe, le groupe adjoint proprement dit, considéré dans le paragraphe précédent. La seconde famille est définie par l'ensemble des opérations obtenues en transformant une homographie du groupe précédent au moyen d'une *antihomographie* qui laisse invariantes la forme d'Hermite définie positive

$$\sum_\alpha x_\alpha \bar{x}_\alpha + \sum_\beta y_\beta \bar{y}_\beta + \sum_{\alpha,\beta} z_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta}$$

en même temps que la *variété cubique*

$$\sum_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta z_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha,\ldots,\mu} (\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu) z_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} z_{\lambda\mu} = 0.$$

(*Cartan*, Bull. des Sciences math., 1925, t. 60.)

L'opération cherchée R sera dès lors une antiinvolution de première espèce (voir chapitre I), vu que le nombre des variables est impair.

Considérons tout d'abord une antihomographie générale du groupe. Celle-ci possèdera en général un certain nombre de points doubles et un certain nombre de couples de points conjugés, c'est-à-dire des points se permutant deux à deux par l'antihomographie. Désignons les variables pour un instant par $x_1, x_2, \cdots, x_{27}$. La forme canonique de l'antihomographie la plus générale aura alors la structure suivante:

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_1 \cdot \bar{x}_2 \\
x_2' &= a_2 \cdot \bar{x}_1 \\
&\vdots \\
x_{2p-1}' &= a_{2p-1} \cdot \bar{x}_{2p} \\
x_{2p}' &= a_{2p} \cdot \bar{x}_{2p-1} \\
x_{2p+1}' &= a_{2p+1} \cdot \bar{x}_{2p+1} \\
&\vdots \\
x_{27}' &= a_{27} \cdot \bar{x}_{27}.
\end{aligned} \qquad (|a_k| = 1)$$

où l'indice p caractérise le nombre de couples de points conjugés. Nous appellerons variables associées les couples (x_1, x_2), (x_3, x_4), $\cdots$, (x_{2p-1}, x_{2p}), qui caractérisent les couples de points conjugés. La difficulté consiste à attribuer à l'indice p toutes les valeurs possibles et, ceci fait, à déterminer les variables associées, étant données les trois catégories de variables x_α, y_β et $z_{\alpha\beta}$ et la facon peu symétrique dont elles interviennent dans la variété cubique. Un moyen de résoudre le problème consisterait à rechercher directement les variables associées en faisant intervenir uniquement la variété cubique à titre de principe de sélection. Mais les calculs sont très longs et fort compliqués et cette méthode, quelque peu primitive, ne se recommande guère. Aussi allons-nous suivre un chemin tout différent qui prend son point de départ dans une propriété remarquable de la forme canonique de l'antihomographie considérée un peu plus haut. Effectuons pour cela le produit de cette antihomographie par elle-même. On obtient alors l'homographie suivante:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= a_1 \bar{a}_2 x_1. \\
x'_2 &= a_2 \bar{a}_1 x_2. \\
&\vdots \\
x'_{2p-1} &= a_{2p-1} \cdot \bar{a}_{2p} x_{2p-1}. \\
x'_{2p} &= a_{2p} \cdot \bar{a}_{2p-1} x_{2p}. \\
x'_{2p+1} &= x_{2p+1}. \\
&\vdots \\
x'_{27} &= x_{27}.
\end{aligned}
$$

Il s'en suit la propriété annoncée plus haut, c'est que les multiplicateurs des variables associées sont complexes conjugués dans l'homographie ainsi construite, et que les multiplicateurs des variables correspondant aux points doubles se réduisent à 1. Il suffira dès lors de rechercher dans la forme canonique de l'homographie la plus générale de notre groupe tous les cas de multiplicateurs complexes conjugés deux à deux. A cet effet, nous transformerons légèrement la forme canonique du paragraphe précédent et la mettrons sous une forme plus symétrique. Il suffit pour cela de remplacer les quantités ϱ_α par $\sigma . R_\alpha$, où $\bar{\sigma}^2 = \lambda$, et l'on obtient:

$$
\text{(I)} \qquad \left.
\begin{aligned}
x'_\alpha &= \sigma R_\alpha x_\alpha . \\
y'_\beta &= \bar{\sigma} R_\beta y_\beta . \\
z'_{\alpha\beta} &= \bar{R}_\alpha \bar{R}_\beta z_{\alpha\beta} .
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 6) \\
&\quad |R_\alpha| = 1. \\
&\quad |\sigma| = 1. \\
&R_1 \cdot R_2 \cdots \cdot R_6 = 1.
\end{aligned}
$$

Remarquons que le facteur σ est, à la condition près d'être *de module un*, complètement *arbitraire*. Ceci veut dire que chaque homographie fait partie d'une famille de transformations obtenues en faisant varier le facteur σ. Dès lors, dans la suite de nos calculs, c'est la notion de cette famille qui remplacera l'homographie correspondante. On en tire la conclusion que σ ne dépend pas des quantités R_α, conclusion capitale dans les recherches qui vont suivre, car la détermination des variables associées reviendra à établir certaines relations entre les R_α seulement. Notre but est d'établir d'abord les antihomographies les plus générales du groupe et de passer ensuite, en donnant des valeurs particulières aux coefficients, aux antiinvolutions correspondantes.

Commençons par le cas extrême où l'indice p est égal à *zéro* et voyons s'il lui correspond une antihomographie. $p = 0$ signifie que l'antihomographie correspondante ne possède pas de couples de points conjugués, mais seulement des points doubles. Elle a la forme:

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= a_\alpha \bar{x}_\alpha \\ y'_\beta &= b_\beta \bar{y}_\beta \\ z'_{\alpha\beta} &= c_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} \,. \end{aligned}$$

On constate immédiatement qu'elle laisse invariantes la forme d'Hermite et la variété cubique (elle y change les termes en leurs conjugués). De plus, cette antihomographie est déjà une antiinvolution, car elle peut être réduite à la forme

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= \bar{x}_\alpha \\ y'_\beta &= \bar{y}_\beta \\ z'_{\alpha\beta} &= \bar{z}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(voir chapitre I de la première partie). La structure réelle ouverte correspondante est facile à déterminer. Le sous-groupe clos g est formé par l'ensemble des transformations du groupe à cœfficients réels, comme le montre immédiatement le calcul, et la structure ouverte est réalisée par le plus grand groupe linéaire et homogène aux 27 variables réelles x_α, y_β, $z_{\alpha\beta}$ qui laisse invariante la forme cubique réelle F. Cette structure est de caractère $\delta = 6$. (*Cartan*, Ann. Ec. Norm., t. 31, 1914, page 306).

Comme nous n'avons d'emblée aucune donnée pour l'indice p caractérisant d'autres antihomographies, nous nous laisserons guider pour la recherche d'autres antihomographies par la forme canonique (I), dans

laquelle il s'agit de trouver toutes les combinaisons possibles de multiplicateurs deux à deux conjugués complexes. Insistons encore une fois sur le fait que le facteur σ est complètement arbitraire (au module 1 près) et qu'il ne dépend pas des quantités R_α. En considérant alors la forme canonique (I), cela signifie que les $z_{\alpha\beta}$ ne peuvent être associés ni aux x_α, ni aux y_β, car ceci nécessiterait des relations entre σ et les R_α, et l'on peut dire d'emblée que les $z_{\alpha\beta}$ se transformeront en eux-mêmes et que les x_α seront associés aux y_β. Il y a plus. Les $z_{\alpha\beta}$ se transformant en eux-mêmes et étant au nombre de 15, il y aura forcément un des $z_{\alpha\beta}$ qui se transformera en son conjugué, soit p. ex. z_{12}. Ceci veut dire que dans la forme canonique (I), l'équation par rapport à z_{12} sera la suivante:

$$z'_{12} = z_{12}$$

et nous obtenons la relation

$$\overline{R}_1 \overline{R}_2 = 1 \text{ ou } R_2 = \overline{R}_1.$$

En introduisant pour R_2 la valeur trouvée dans les équations (I), on obtient en particulier:

$$x'_1 = \sigma R_1 x_1 \qquad y'_1 = \overline{\sigma} R_1 y_1$$
$$x'_2 = \sigma \overline{R}_1 x_2 \qquad y'_2 = \overline{\sigma} \overline{R}_1 y_2.$$

En comparant les multiplicateurs de ces équations, on voit que x_1 est associé à y_2 et x_2 à y_1, et on aura:

$$x'_1 = a_1 \overline{y}_2 \qquad x'_2 = a_2 \overline{y}_1$$
$$y'_2 = b_2 \overline{x}_1 \qquad y'_1 = b_1 \overline{x}_2$$

Considérons maintenant les trois termes de la forme cubique F:

$$z_{12} z_{34} z_{56}, \; z_{12} z_{35} z_{46} \text{ et } z_{12} z_{36} z_{45}.$$

Le relation: $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 = 1$ se réduit, en vertu de $R_1 R_2 = 1$, à $R_3 R_4 R_5 R_6 = 1$, ce qui veut dire que l'on ne pourra associer deux $z_{\alpha\beta}$ que si leurs indices sont différents. En appliquant ce résultat aux trois termes précédents, on voit qu'ils restent invariants. Examinons alors comment les variables de ces trois termes peuvent se transformer (abstraction faite de z_{12}). Il y a à première vue différentes possibilités, suivant que l'on considère les deux variables restantes de chaque terme comme invariantes ou comme associées. A cet effet, nous allons montrer

qu'il est impossible d'associer simultanément les deux variables restantes de chacun des trois termes considérés. Supposons qu'il en soit ainsi. Alors z_{34} se transforme en z_{56}, z_{35} en z_{46} et z_{36} en z_{45}, et le terme $(x_3 y_4 - x_4 y_3) \cdot z_{34}$ de la forme cubique se transforme en le terme $(x_5 y_6 - x_6 y_5) \cdot z_{56}$, d'après l'hypothèse sur z_{34}. Il s'en suit que l'on peut associer p. ex. x_3 à y_6, x_4 à y_5, x_5 à y_4 et x_6 à y_3. Examinons alors le terme $x_3 y_6 z_{36}$; il se transforme, d'après les hypothèses énoncées, en le terme $x_3 y_6 z_{45}$, ce qui est absurde, ce terme n'appartenant pas à la forme cubique F. On a donc, au choix des indices près:

$$z'_{34} = z_{34} \text{ et } z'_{56} = z_{56}$$

et les relations qui en découlent

$$R_4 = \overline{R}_3 \text{ et } R_6 = \overline{R}_5.$$

L'antihomographie cherchée est complètement déterminée par ces dernières relations, car, en les introduisant dans la forme canonique (I), on voit aisément que x_3 est associé à y_4, x_4 à y_3, x_5 à y_6 et x_6 à y_5. Quant aux $z_{\alpha\beta}$ restants, leur association découle immédiatement des relations trouvées entre les R_α. L'antihomographie la plus générale de notre groupe est dès lors d'indice $p = 12$ et peut être mise sous la forme:

$$\begin{aligned}
x'_{2\alpha-1} &= a_{2\alpha-1} \cdot \overline{y}_{2\alpha} & z'_{2\alpha-1,2\beta-1} &= c_{2\alpha-1,2\beta-1} \cdot \overline{z}_{2\alpha,2\beta} \\
y'_{2\alpha} &= b_{2\alpha} \cdot \overline{x}_{2\alpha-1} & z'_{2\alpha,2\beta} &= c_{2\alpha,2\beta} \cdot \overline{z}_{2\alpha-1,2\beta-1} \\
x'_{2\alpha} &= a_{2\alpha} \cdot \overline{y}_{2\alpha-1} & z'_{2\alpha-1,2\beta} &= c_{2\alpha-1,2\beta} \cdot \overline{z}_{2\beta-1,2\alpha} \\
y'_{2\alpha-1} &= b_{2\alpha-1} \cdot \overline{x}_{2\alpha} & z'_{2\beta-1,2\alpha} &= c_{2\beta-1,2\alpha} \cdot \overline{z}_{2\alpha-1,2\beta}
\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 6)$$
$$(z_{\beta\alpha} = -z_{\alpha\beta}).$$

Pour obtenir l'antiinvolution correspondante, il suffit de donner aux cœefficients a, b et c des valeurs particulières en se basant sur la forme cubique F, ce qui ne présente aucune difficulté. On aura donc finalement l'antiinvolution cherchée sous la forme:

$$\begin{aligned}
x'_{2\alpha-1} &= -\overline{y}_{2\alpha} & z'_{2\alpha-1,2\beta-1} &= \overline{z}_{2\alpha,2\beta} \\
y'_{2\alpha} &= -\overline{x}_{2\alpha-1} & z'_{2\alpha,2\beta} &= \overline{z}_{2\alpha-1,2\beta-1} \\
x'_{2\alpha} &= \overline{y}_{2\alpha-1} & z'_{2\alpha-1,2\beta} &= \overline{z}_{2\beta-1,2\alpha} \\
y'_{2\alpha-1} &= \overline{x}_{2\alpha} & z'_{2\beta-1,2\alpha} &= \overline{z}_{2\alpha-1,2\beta} \cdot
\end{aligned}$$

Il est clair à priori que cette antiinvolution ne peut être homologue à celle trouvée précédemment, l'une appartenant à une classe d'antihomographies pour laquelle l'indice p était égal à *zéro* (ces antihomographies étant en fait déjà des antiinvolutions), et l'autre provenant d'une classe d'antihomographies essentiellement différente pour laquelle l'indice p est égal à 12. Le problème est donc complètement résolu; indiquons encore la structure réelle ouverte déterminée par cette seconde antiinvolution. Elle est de caractère $\delta = -26$ et peut être réalisée par le plus grand groupe linéaire et homogène aux 27 variables complexes x_α, y_β et $z_{\alpha\beta}$ laissant invariante la *forme cubique* F, ces variables étant supposées liées par les relations suivantes qui ont une analogie intime avec les équations de l'antiinvolution correspondante:

$$\begin{aligned} x_{2\alpha-1} &= -\bar{y}_{2\alpha} & z_{2\alpha-1,2\beta-1} &= \bar{z}_{2\alpha,2\beta} \\ y_{2\alpha} &= -\bar{x}_{2\alpha-1} & z_{2\alpha,2\beta} &= \bar{z}_{2\alpha-1,2\beta-1} \\ x_{2\alpha} &= \bar{y}_{2\alpha-1} & z_{2\alpha-1,2\beta} &= \bar{z}_{2\beta-1,2\alpha} \\ y_{2\alpha-1} &= \bar{x}_{2\alpha} & z_{2\beta-1,2\alpha} &= \bar{z}_{2\alpha-1,2\beta} \end{aligned}$$

En suivant le chemin inverse qui consiste à déterminer le sous-groupe clos g à partir de l'antiinvolution trouvée, on retombe immédiatement sur les relations indiquées entre les variables.

(Reçu le 23 janvier 1935.)