Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbures est constant.

Autor: Plancherel, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9299

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbures est constant

Par M. PLANCHEREL, Zurich

1. Un problème de la théorie de l'élasticité a conduit mon collègue, M. le prof. Ritter, à me poser la question suivante:

Trouver tous les systèmes orthogonaux de courbes planes pour lesquels le rapport des courbures en un point arbitraire (des deux courbes du système passant par ce point) est constant.

La réponse est très simple. Appelons isogonale (ω) d'une famille de courbes planes, une courbe coupant les courbes de la famille sous l'angle ω. q^2 désignant le rapport constant des carrés des courbures et ω étant défini par

$$\operatorname{cotg} \omega = \pm q\,, \tag{1}$$

la solution générale de la question est donnée par le système des isogonales (ω) *et* $\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$ *d'une famille arbitraire de droites.* Cette propriété est un cas particulier d'une proposition générale concernant les systèmes isogonaux de courbes, que nous établirons ci-dessous.

Nous dirons de deux familles monoparamétriques de courbes F_1, F_2 qu'elles forment un système isogonal d'angle θ, lorsque les courbes de la famille F_2 sont les isogonales (θ) de la famille F_1. Introduisons un sens de rotation positif dans le plan et convenons de prendre pour θ l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente à une courbe de F_1 doit tourner autour de son point de contact P pour se superposer à la tangente en P à la courbe de F_2 passant par ce point. Désignons encore par $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ les courbures respectives des courbes de F_1 et de F_2 et par q^2 le rapport $\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2$. On a alors le théorème:

Tout système isogonal d'angle θ, pour lequel le rapport des carrés des courbures $\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 = q^2$ est constant, est formé par les isogonales (ω), $(\omega + \theta)$ d'une famille de droites où ω est déterminé par

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \theta}{\pm q - \cos \theta}\,. \tag{2}$$

Réciproquement, les isogonales (ω), $(\omega+\theta)$ *d'une famille arbitraire de droites ont leurs courbures en rapport constant :*

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 = \left(\frac{\sin(\omega+\theta)}{\sin\omega}\right)^2 . \tag{3}$$

Etant donnés une courbe L, différente d'une droite, une constante $q^2 \geqq 0$ et un angle $\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, on peut chercher à déterminer un système isogonal F_1F_2, d'angle θ, tel que L soit une courbe de la famille F_1 et pour lequel le rapport des carrés des courbures soit égal à q^2. Le théorème ci-dessus donne une construction géométrique simple d'un tel système. Il montre de plus que si $q^2 > 0$, il y a deux systèmes isogonaux répondant à la question. Il y a de même deux systèmes isogonaux d'angle $-\theta$ répondant aux mêmes conditions pour L et q^2; ils coincident avec les précédents si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Si $q = 0$, F_2 est une famille de droites; il n'y a qu'un seul système isogonal d'angle θ et un seul système d'angle $-\theta$, pour lesquels L est une courbe de F_1; ces deux systèmes sont identiques lorsque $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Le cas particulier où la famille de droites est un faisceau donne le système isogonal formé de deux familles de spirales logarithmiques.

2. Pour éviter des confusions, nous affecterons, là où cela sera utile, de l'indice 1 les grandeurs se rapportant à la famille F_1 et de l'indice 2 celles se rapportant à la famille F_2. Si

$$y_1' = f(x, y_1) \tag{4}$$

est l'équation différentielle de la famille F_1, les courbes de F_2 coupant celles de F_1 sous l'angle θ auront pour équation différentielle

$$y_2' = \frac{f(x, y_2) + \tau}{1 - \tau f(x, y_2)} ,$$

en notant $\operatorname{tg}\theta = \tau$. Par suite,

$$y_1'' = f_x(x, y_1) + f_y(x, y_1)\, f(x, y_1) ,$$

$$y_2'' = \frac{1+\tau^2}{[1-\tau f(x, y_2)]^3}\Big[f_x(x, y_2)\,(1-\tau f(x, y_2)) + f_y(x, y_2)\,(f(x, y_2+\tau))\Big] .$$

Les courbures $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ au même point (x, y) auront donc les valeurs

$$\varkappa_1 = \pm \frac{y_1''}{(1 + y_1'^2)^{3/2}} = \pm \frac{f_x + f f_y}{(1 + f^2)^{3/2}} ,$$

$$\varkappa_2 = \pm \frac{y_2''}{(1 + y_2'^2)^{3/2}} = \pm \frac{f_x(1 - \tau f) + f_y(f - \tau)}{\sqrt{1 + \tau^2}\,(1 + f^2)^{3/2}} .$$

En égalant à q^2 le carré des rapports de ces courbures, on aura

$$f_x(1 - \tau f) + f_y(f + \tau) = \pm q \sqrt{1 + \tau^2}\,(f_x + f f_y) .$$

q^2 étant donné, q n'est déterminé qu'au signe près; il suffira donc de traiter la première des deux équations précédentes.

3. Le problème est donc réduit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles suivante pour $z = f(x, y)$

$$(1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z)\frac{\partial z}{\partial x} + (\tau + z(1 - q\sqrt{1 + \tau^2}))\frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \qquad (5)$$

L'intégration du système différentiel de ses caractéristiques

$$\frac{dx}{1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z} = \frac{dy}{\tau + z(1 - q\sqrt{1 + \tau^2})} = \frac{dz}{0}$$

donne sa solution générale sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= [1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z_0(v)]\frac{u}{\tau} + x_0(v) , \\ y &= [\tau + z_0(v)(1 - q\sqrt{1 + \tau^2}]\frac{u}{\tau} + y_0(v) , \\ z &= z_0(v) , \end{aligned} \qquad (6)$$

dans laquelle $x_0(v)$, $y_0(v)$, $z_0(v)$ sont des fonctions arbitraires du paramètre v. La surface réglée que ces formules représentent a ses génératrices parallèles au plan xy et passe par la courbe

$$x = x_0(v), \; y = y_0(v), \; z = z_0(v).$$

Lorsque $z_0(v)$ est une constante a, la surface est le plan $z = a$ et l'équation différentielle (4) est celle d'une famille de droites parallèles.

Le système isogonal est alors formé de deux familles de droites parallèles et le rapport des courbures est indéterminé.

Lorsque $z_0(v)$ n'est pas une constante, l'intersection du plan $z = z_0(v)$ et de la surface (6) est une droite faisant avec l'axe des x l'angle a donné par

$$\operatorname{tg} a = \frac{\tau + z_0(v)\,(1 - q\sqrt{1+\tau^2})}{1 - q\sqrt{1+\tau^2} - \tau z_0(v)} .$$

Introduisons l'angle ω donné par

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\tau}{q\sqrt{1+\tau^2} - 1} = \frac{\sin\theta}{q - \cos\theta} .$$

On a

$$\operatorname{tg} a = \frac{z_0 + \operatorname{tg}\omega}{1 - z_0 \operatorname{tg}\omega} ,$$

d'où

$$z_0(v) = tg\,(a + \omega) .$$

Substituons aux paramètres u, v les paramètres a, t définis par

$$\operatorname{tg}\,(a + \omega) = z_0(v) , \quad t = u + \frac{\tau x_0(v)}{1 - q\sqrt{1+\tau^2} + \tau z_0(v)} .$$

La surface (6) est alors représentée sous la forme

$$\begin{aligned} x &= (1 - q\sqrt{1+\tau^2} + \tau \operatorname{tg}\,(a+\omega))\frac{t}{\tau} , \\ y &= ((1 - q\sqrt{1+\tau^2})\operatorname{tg}(a+\omega) - \tau)\frac{t}{\tau} + \Phi(a) , \\ z &= \operatorname{tg}\,(a+\omega) , \end{aligned} \tag{7}$$

où

$$\Phi(a) = y_0(v) - x_0(v)\operatorname{tg} a$$

est une fonction arbitraire de a. La famille de droites

$$y = x \operatorname{tg} a + \Phi(a) \tag{8}$$

représente les projections des génératrices de la surface (7) sur le plan $z = 0$.

Revenons à l'équation différentielle (4). La condition nécessaire et suffisante pour que la famille F_1 qu'elle représente et la famille F_2 de ses

isogonales (θ) aient leurs courbures en rapport constant est que $z = f(x, y)$ soit de la forme (7). Considérons la courbe intégrale qui passe par un point arbitraire du plan et menons la droite (8) qui passe par ce point. L'angle de cette courbe intégrale avec l'axe des x est $\alpha + \omega$, et celui de cette droite (8) avec l'axe est α. La courbe intégrale coupe donc la droite (8) sous l'angle ω. Elle est, par conséquent, une isogonale (ω) de la famille de droites (8).

Il est ainsi établi qu'à tout système isogonal de courbes planes pour lequel le rapport des courbures est constant correspond une famille de droites et réciproquement; il est formé par les isogonales (ω) et ($\omega + \theta$) de cette famille.

La réciproque du théorème démontré peut aussi se vérifier directement en calculant la courbure d'une isogonale (ω) de la famille (8). Un calcul élémentaire donne pour cette courbure

$$\varkappa(\omega) = \pm \frac{\cos\alpha \sin\omega}{x + \Phi'(\alpha)\cos^2\alpha} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\varkappa(\omega+\theta)}{\varkappa(\omega)}\right)^2 = \frac{\sin^2(\omega+\theta)}{\sin^2\omega}.$$

En construisant l'enveloppe de la famille (8) et en désignant par l la distance d'un point (x, y) d'une droite (8) au point de contact de cette droite et de l'enveloppe, on démontre que $l \cos\alpha = x + \Phi'(\alpha)\cos^2\alpha$. Par suite, $\varkappa(\omega) = \pm \frac{\sin\omega}{l}$. Cette formule donne une construction simple du cercle de courbure des isogonales d'une famille de droites, construction due à G. Scheffers (Leipziger Berichte, 50, 1898, p. 276). Elle montre aussi que les isogonales qui passent par un point fixe arbitraire ont en ce point des cercles de courbure qui ont un second point commun. Cette dernière propriété est d'ailleurs, comme l'a remarqué E. Cesàro (Geometria intrinseca, 1896, p. 115, édition allemande, p. 147—148) encore vraie lorsque la famille de droites est remplacée par une famille de courbes.

(Reçu le 21 octobre 1935).