Über die Dirichlet'schen Reihen für $\zeta^{\varrho}(s)$, $L^{\varrho}(s)$

Von Alfred Kienast, Küsnacht (Zürich)

Unter den gewöhnlichen Dirichlet'schen Reihen zeichnen sich diejenigen für $\zeta^{\varrho}(s)$, $L^{\varrho}(s)$ und analoge in ähnlicher Weise aus, wie unter den Potenzreihen die binomische. Während man die Eigenschaften der letzteren sehr eingehend studiert hat, sind die ersteren wenig beachtet worden, indem sich hier das Interesse vorwiegend der Approximation der summatorischen Funktionen von ζ^{-1}, L^{-1} usw. zuwandte. Im vorliegenden Aufsatze leite ich auf elementarem Wege einige fundamentale Ergebnisse über die Reihen $\zeta^{\varrho}(1+it)$, $L^{\varrho}(1+it)$ ab. Daß diese Ergebnisse unabhängig von der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln bewiesen werden können, beruht darauf, daß dies für die Tatsache $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\zeta(1+\varepsilon+it)\neq 0$, $t \gtreqless 0$ möglich ist, wie ich in dem Aufsatze: „Über die Unabhängigkeit des Beweises des Primzahlsatzes vom Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln", Com. Math. Helv. 8 (1935), 130, gezeigt habe. Ich verweise auf diesen Aufsatz durch I.

Zweitens wird ein Satz verwendet, analog zu einem Landau'schen Grenzwertsatze: E. Landau, Rend. Palermo 34 (1912), 121—31; A. Kienast, Math. Ann. 95 (1925), 427—445, § 1.

Die Form des „Fehlergliedes", die in nachstehenden Formeln auftritt, habe ich zunutze gezogen in dem Aufsatz: „Die Umkehrung eines Cesàro'schen Satzes über die Multiplikation von Reihen", Journal London Math. Soc. 9 (1934), 254—258.

Um Wiederholungen, die die Formulierung von Sätzen mit sich bringen würde, zu sparen, hebe ich die Ergebnisse in § 2 und § 3 hervor durch fetten Druck.

§ 1.

Es sei k eine ganze positive Zahl. Dann erhält man durch Multiplikation

$$\zeta^{k}(s) = \left(\sum n^{-s}\right)^{k} = \sum a(k,n)\, n^{-s}\,,$$

wo $a(k,n)$ eine ganze positive Zahl ist und die Reihe für $R(s) > 1$ absolut konvergiert, da sie das Produkt im gleichen Gebiet absolut konvergierender Reihen ist. Bildet man das Produkt $\zeta^{\varrho}\zeta^{\tau} = \zeta^{\varrho+\tau}$, wo ϱ, τ ganze positive Zahlen sind, so ergibt sich die Relation

$$\sum_{k\cdot\lambda=n} a(\varrho, k)\, a(\tau, \lambda) = a(\varrho+\tau, n) \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$a(\varrho, n)\, a(\varrho, m) = a(\varrho, m \cdot n)\,, \text{ wenn } (n, m) = 1. \tag{2}$$

Der Beweis verläuft ebenso, wie im Spezialfalle $\tau = 1$, also $a(\tau, \lambda) = 1$. Letzterer ist ausgeführt in E. Landau, Handbuch der Primzahlen, S. 427—428.

Die Eigenschaft (2) ergibt, wenn $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_\nu^{a_\nu}$

$$a(\varrho, n) = a(\varrho, p_1^{a_1}) \cdots a(\varrho, p_\nu^{a_\nu})\,. \tag{3}$$

Es bleibt also übrig, $a(\varrho, p^a)$ zu bestimmen. Nach (1) hat man

$$a(\varrho + 1, p^a) = a(\varrho, 1) + a(\varrho, p) + \cdots + a(\varrho, p^a)\,.$$

Hieraus folgt für $a = 1$,

$$1 + a(\varrho, p) = a(\varrho + 1, p)\,.$$

Diese Differenzengleichung in ϱ hat die Lösung

$$a(\varrho, p) = \binom{\varrho}{1} + P(\varrho)\,,$$

wo $P(\varrho)$ eine periodische Funktion von ϱ mit der Periode 1 ist. $\varrho = 1$ gibt $P(1) = 0$, also $P(n) = 0$.

Für $a = 2$ entsteht die Differenzengleichung

$$1 + \binom{\varrho}{1} + a(\varrho, p^2) = a(\varrho + 1, p^2)$$

und diese hat die Lösung

$$a(\varrho, p^2) = \binom{\varrho + 1}{2} + P(\varrho)\,,$$

wo $P(\varrho)$ wieder eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist. $\varrho = 1$ gibt $P(1) = 0$, also $P(n) = 0$.

So gelangt man Schritt um Schritt zu

$$a(\varrho, p^a) = \binom{\varrho + a - 1}{a}\,. \tag{4}$$

Durch (3) und (4) ist $a(\varrho, n)$ für beliebige ganze positive n und ϱ ermittelt. Dieser Ausdruck behält seine Bedeutung: 1. wenn n nicht eine Zahl, sondern ein Ideal ist; 2. wenn ϱ eine beliebige komplexe Größe ist.

Spezialfälle, z. B. wenn $\varrho = -1$, wenn für n ein Ideal $\mathfrak{a}$ genommen wird, sind von E. Landau definiert worden.

Es werde nun die Reihe

$$f(\varrho, s) = \sum_{1}^{\infty} a(\varrho, n)\, n^{-s}$$

betrachtet, wenn $\varrho = b + ic$ komplex ist. Um eine Aussage über die Konvergenz zu gewinnen, wird eine Majorante gebildet. $a(\varrho, n)$ ist das Produkt von Faktoren

$$\binom{b + ic + a - 1}{a} = \frac{b + ic}{1} \cdots \frac{b + ic + a - 1}{a}\,.$$

Nun ist

$$\left|\frac{b + \nu - 1}{\nu} + i\frac{c}{\nu}\right| = \left(\left(\frac{b + \nu - 1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{c}{\nu}\right)^2\right)^{1/2} < \nu^{-1}\left((b^2 + c^2)^{1/2} + \nu - 1\right);$$

denn

$$b^2 + (\nu - 1)^2 + 2(\nu - 1)\, b + c^2 < b^2 + c^2 + 2(\nu - 1)\,(b^2 + c^2)^{1/2} + (\nu - 1)^2\,.$$

Bezeichnet man jetzt die größte ganze Zahl kleiner als $|\varrho| = (b^2 + c^2)^{1/2}$ mit $r - 1$, so ist

$$\left|\frac{b + \nu - 1 + ic}{\nu}\right| \leqq \frac{r + \nu - 1}{\nu}$$

und daher

$$\text{abs.}\binom{b + ic + a - 1}{a} \leqq \binom{r + a - 1}{a}$$

und

$$\text{abs.}\ a(b + ic, p^a) \leqq a(r, p^a)\,.$$

Dies zeigt, daß die Reihe mit nur positiven Termen

$$\sum_{1}^{\infty} a(r, n)\, n^{-s} = \zeta^r(s)$$

eine Majorante von $f(\varrho, s)$ ist. Letztere Reihe konvergiert daher ebenfalls für $R(s) > 1$ absolut.

Die Identität (1) besteht auch wenn ϱ, τ komplexe Größen bedeuten; denn die beiden Seiten sind Polynome in ϱ und τ.

Somit besteht die aus den Untersuchungen über die binomische Reihe geläufige Funktionalgleichung

$$f(\varrho,s)\ f(\tau,s) = f(\varrho+\tau,s)$$

für jedes Paar komplexer ϱ,τ. Hieraus schließt man für reelle ϱ und τ in der seit Euler und Cauchy bekannten Weise

$$f(\varrho,s) = (f(1,s))^{\varrho} = \zeta^{\varrho}(s)\,,$$

wobei unter ζ^{ϱ} der Hauptwert zu verstehen ist.

Zum selben Resultat gelangt man für komplexes ϱ, indem man ein Verfahren anwendet, das für die binomische Reihe ausgearbeitet worden ist; vergleiche Goursat, Cours d'Analyse Math. § 275; Bromwich, Infinite series, Art. 89. Dabei verwendet man die mittels (4) zu gewinnende Formel

$$\lg \zeta(s) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-1}\{\zeta^{\varrho}(s) - 1\} = \sum \frac{\Lambda(n)}{\lg n}\, n^{-s}\,, \tag{5}$$

wo $\Lambda(n)$ die in der Primzahltheorie übliche Bedeutung hat.

Bezeichnet $\chi(n)$ einen Charakter mod. k, und geht man von der Reihe aus

$$g(\varrho,s) = \sum_{1}^{\infty} \chi(n)\, a(\varrho,n)\, n^{-s}$$

so folgt

$$g(\varrho,s)\, g(\tau,s) = g(\varrho+\tau,s)$$

für jedes Paar komplexer ϱ, τ und $R(s) > 1$. Die erwähnte Methode von Bromwich und die hier (5) entsprechende Formel geben

$$g(\varrho,s) = (g(1,s))^{\varrho} = L^{\varrho}(s,\chi)$$

Analog findet man für die Reihe

$$h(\varrho,s) = \sum a(\varrho,\mathfrak{a})\, N\mathfrak{a}^{-s}$$

wo $\mathfrak{a}$ alle Ideale eines algebraischen Körpers durchläuft

$$h(\varrho,s) = (h(1,s))^{\varrho} = \zeta_k^{\varrho}(s)\,,$$

wo $\zeta_k(s)$ die zum algebraischen Körper gehörende Zetafunktion bedeutet.

§ 2.

Es sei $0 < \varrho$; dann ist $a(\varrho,n) > 0$ und

$$((s-1)\,\zeta(s))^{\varrho} = (s-1)^{\varrho} \sum a(\varrho,n)\, n^{-s} \to 1 \text{ für } s \to 1.$$

Der Satz von G. H. Hardy und J. E. Littlewood über Reihen mit positiven Termen, z. B. Acta Mat. 41 (1918), Lemma 2.113, p. 128, folgert hieraus die asymptotische Beziehung

$$\sum_1^x (\varrho,n)\, n^{-1} \sim \Gamma^{-1}(1+\varrho) \lg^{\varrho} x \text{ für } x \to \infty\,. \tag{6}$$

Das Produkt $\zeta\zeta^{\varrho} = \zeta^{\varrho+1}$ ergibt

$$\begin{aligned} \Psi_{\varrho+1}(x) &= \sum_1^x a(\varrho+1,n) = \sum_1^x a(\varrho,n)\left[\frac{x}{n}\right] \\ &= x\sum_1^x a(\varrho,n)\, n^{-1} + \sum_1^x a(\varrho,n)\, O(1)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Da für $0 < \varrho < 1$, $0 < a(\varrho,n) < 1$, so folgt

$$\Psi_{\varrho+1}(x) \sim \Gamma^{-1}(1+\varrho)\, x \lg^{\varrho} x \quad (0 < \varrho < 1)\,. \tag{8}$$

Jetzt benutzt man die von E. Landau eingeführte Funktion

$$u(s) = \zeta'(s) + \zeta^2(s) - 2E\,\zeta(s) = \sum e_n n^{-s}\,,$$

wo E die Euler'sche Konstante ist; für ihre summatorische Funktion gilt

$$\left|\sum_1^x e_n\right| = 5\, x^{1/2}\,.$$

Bildet man $\zeta^{\varrho-1}u(s)$ für $0 < \varrho < 1$ und beachtet, $|a(\varrho-1,\nu)| \leqq 1$, so erhält man

$$\varrho^{-1} \sum_1^x a(\varrho,\nu) \log \nu = \Psi_{\varrho+1}(x) + O(x)$$

also, mit (8), für $x \to \infty$

$$\sum_1^x a(\varrho,\nu) \lg \nu \sim \Gamma^{-1}(\varrho)\, x \lg^{\varrho} x\,,\quad 0 < \varrho < 1\,.$$

Partielle Summation ergibt für $x \to \infty$

$$\Psi_\varrho(x) = \sum_1^x a(\varrho,\nu) \sim \Gamma^{-1}(\varrho)\, x \lg^{\varrho-1} x\,, \quad 0 < \varrho < 1\,. \tag{9}$$

(7) und (9) ergeben nun Schritt um Schritt, daß (9) **für alle** $0 < \varrho$ **Gültigkeit besitzt.**

Schließlich folgt aus (7) und (9)

$$\begin{aligned} \sum_1^x a(\varrho,n)\, n^{-1} &\sim \Gamma^{-1}(1+\varrho) \lg^\varrho x \quad \text{für } -\tfrac{1}{2} < \varrho < 0 \\ &= O(\lg^{-\varrho-1} x) \qquad \text{für } -1 < \varrho \leqq -\tfrac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Die asymptotische Beziehung (10) zeigt, daß (6) auch gilt für $-\frac{1}{2} < \varrho$.

Man kann hier noch die Bemerkung anfügen, daß (10) das bestmögliche ist, was sich heute elementar beweisen läßt. Denn aus (10) für $-\frac{1}{2} < \varrho < 0$ folgt die Konvergenz dieser Reihe für $-1 < \varrho < 0$. Würde somit (10) mit dem Äquivalenz-Zeichen auch für $\varrho = -\frac{1}{2}$ gelten, so entstände ein elementarer Beweis für die Konvergenz von $\sum \mu(n)\, n^{-1}$ und ein solcher scheint mit so einfachen Mitteln nicht möglich zu sein.

Analoge Resultate bestehen für die entsprechenden Reihen, in denen $\chi_1(n)$ (der Hauptcharakter mod k) enthalten ist und für diejenigen, die mit $\zeta_k(s)$ zusammenhängen.

§ 3.

Das Ziel dieses Paragraphen ist, die *Konvergenz der Reihe* $\sum a(\varrho,n) n^{-1-it}$, $-1 < \varrho < 1$, zu beweisen. Hierzu geht man aus von der Formel

$$\sum_1^x k^{-1-it} = (-it)^{-1} x^{-it} + f(t) + O(x^{-1})\,, \tag{11}$$

worin t eine reelle von null verschiedene Größe ist. Man kann sie aus der Euler-Maclaurin'schen Formel ableiten. Sie ist auch in einer für die Zetafunktion fundamental verwendeten Formel enthalten, aus der sich ergibt:

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \zeta(1+\varepsilon+it)\,,$$

wobei man bloß die Definition $\zeta(s) = \sum n^{-s}$, $s = \sigma + it$ für $\sigma > 1$, braucht.

Eine fundamentale Eigenschaft der Zetafunktion ist $f(t) \neq 0$ für $t \gtrless 0$ und ich habe in I gezeigt, daß man dies Resultat ohne Funktionentheorie beweisen kann und ohne die Zetafunktion über den Bereich $\sigma > 1$ hinaus fortzusetzen.

Jetzt liefert das Produkt

$$\sum_1^x a(\varrho+1,n)\, n^{-1-it} = \sum_1^x a(\varrho,k)\, k^{-1-it} \sum^{x/k} \lambda^{-1-it} \tag{12}$$

$$= -(it)^{-1} x^{-it} \sum_1^x a(\varrho,k)\, k^{-1} + f(t) \sum_1^x a(\varrho,k)\, k^{-1-it} + O\left(x^{-1} \sum_1^x |\, a(\varrho,k)\,|\right).$$

Da $f(t)$ beschränkt ist, folgt gleichmäßig im Intervall $0 < \varepsilon \leqq |t| \leqq T$

$$\sum_1^x a(\varrho+1,n)\, n^{-1-it} = O(\lg^\varrho x)\,, \qquad 0 < \varrho < 1\,. \tag{13}$$

Zweitens betrachtet man das Produkt

$$\zeta^{\varrho-1} u(s) = \varrho^{-1} (\zeta^\varrho)' + \zeta^{\varrho+1} - 2E\,\zeta^\varrho = \zeta^{\varrho-1} \sum e_n n^{-s}\,.$$

Da $u(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert und da für $0 < \varrho < 1$

$$|\, a(\varrho-1,k)\,| \leqq a(1-\varrho,k) < 1\,, \quad \text{so ist}$$

$$\sum_{k\lambda \leqq x} \frac{a(\varrho-1,k)}{k^{1+it}} \cdot \frac{e_\lambda}{\lambda^{1+it}} = \sum_1^x \frac{a(\varrho-1,k)}{k^{1+it}} \sum_1^{x/k} \frac{e_\lambda}{\lambda^{1+it}}$$

$$= O\left(\sum_1^x a(1-\varrho,k) k^{-1}\right) = O(\lg^{1-\varrho} x)\,.$$

Somit folgt unter Benutzung von (13)

$$\begin{aligned} \sum_1^x a(\varrho,k) \lg k\; k^{-1-it} &= O(\lg^\varrho x) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \varrho < 1 \\ &= O(\lg^{1-\varrho} x) \text{ für } 0 < \varrho < \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Jetzt ergibt partielle Summation, wenn $q = \varrho$ für $\frac{1}{2} \leqq \varrho < 1$
$\qquad = 1 - \varrho$ für $0 < \varrho < \frac{1}{2}$

$$\sum_m^n a(\varrho,k) k^{-1-it} = O\big(\lg^{q-1}(m-1)\big) + \sum_m^{n-1} O(\lg^q \nu)\, \big(\lg^{-1}\nu - \lg^{-1}(\nu+1)\big) + O(\lg^{q-1} n)\,.$$

Es folgt, daß die Reihe $\zeta^\varrho(1+it)$, $0 < \varrho < 1$, konvergiert, gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leqq |\, t\,| \leqq T$.

Da $\sum\limits_{m}^{n-1} k^{-1} \lg^{q-2} k < \int\limits_{m+1}^{n} t^{-1} \lg^{q-2} t \, dt = \frac{1}{1-q} \left(\lg^{q-1}(m+1) - \lg^{q-1} n \right)$,

so kann man das Resultat, genauer, durch die Formel ausdrücken:

$$\sum_{1}^{x} a(\varrho, k)\, k^{-1-it} = \zeta^{\varrho}(1+it) + O(\lg^{q-1} x) \tag{15}$$

gleichmässig für $0 < \varepsilon \leqq |t| \leqq T$;
$0 < \varrho < 1$; q hat die oben angegebene Bedeutung.

Setzt man in (12) für ϱ einen Wert, der zwischen -1 und 0 liegt, so erhält man

$$\begin{aligned} f(t) \sum_{1}^{x} a(\varrho, k)\, k^{-1-it} &= \sum_{1}^{\infty} a(\varrho+1, k)\, k^{-1-it} + O(\lg^{\varrho} x) + \\ &+ O(\lg^{-\varrho-1} x), \ -1 < \varrho < 0 . \end{aligned} \tag{16}$$

Da $f(t) \neq 0$, so folgt, daß auch $\zeta^{\varrho}(1+it)$, $-1 < \varrho < 0$, **konvergiert, gleichmäßig für** $0 < \varepsilon \leqq |t| \leqq T$.

M. Riesz, C. R. 148 (1909), 1658—60, schließt die Konvergenz der Reihen ζ^{ϱ}, $\varrho < 1$, auf der Geraden $\sigma = 1$ (mit Ausnahme von $s = 1$ für $0 < \varrho$) aus einem allgemeinen Satz. Unter den Voraussetzungen dieses Satzes ist die Bedingung enthalten, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion $F(s)$ für $R(s) \geqq 1$ regulär ist, mit Ausnahme isolierter Stellen auf $\sigma = 1$. Die in den Formeln (15), (16) enthaltenen Aussagen sind bewiesen, ohne daß man über die Eigenschaften der Funktion $F(s)$ etwas zu wissen braucht. Außerdem enthalten sie eine Abschätzung der Größenordnung des Restes, über den der Riesz'sche Satz keine Angabe enthält.

§ 4. Ein Grenzwertsatz.

1. Satz. Es sei

a) $0 \leqq c_k$; $\sum c_k k^{-1} = C$ konvergent; $\sum\limits_{1}^{x} c_k = O(x \lg^{-1} x)$;

b) $|U(x)| = O\left(\sum\limits_{1}^{x} c_k \right)$;

c) $\left| \sum\limits_{1}^{x} f(n) \right| = O\left(\sum\limits_{1}^{x} |f(n)| \right) = O(x \lg^{-\varrho} x)$; $0 < \varrho$

dann ist

$$\left| \sum_{1}^{x} f(n)\, U(xn^{-1}) \right| = O(x \lg^{-\varrho} x) .$$

Dieser Satz macht eine Aussage über eine Summe, wie sie als summatorische Funktion des Produktes zweier gewöhnlicher Dirichletreihen auftritt. Auf dieselbe Summe bezieht sich der in der Einleitung erwähnte Grenzwertsatz von Landau. Es scheint nicht möglich, Satz 1 durch das Landau'sche Verfahren zu beweisen.

Beweis. Es existiert, nach Voraussetzung (b), eine positive Konstante C, so daß

$$\left|\sum_1^x f(n)\, U(xn^{-1})\right| \leq C \sum_1^x |f(n)| \sum_1^{x/n} c_k = C \sum_{k\cdot\lambda\leq x} |f(k)|\, c_\lambda$$

$$= C \sum_1^{\sqrt{x}} |f(k)| \sum_1^{x/k} c_\lambda + C \sum_1^{\sqrt{x}} c_\lambda \sum_1^{x/\lambda} |f(k)| - C \sum_1^{\sqrt{x}} |f(k)| \sum_1^{\sqrt{x}} c_\lambda$$

$$= \quad T_1 \quad + \quad T_2 \quad - \quad T_3$$

Nun folgt

$$T_1 = O\left(x \lg^{-1} x\right) \sum_1^{\sqrt{x}} |f(k)|\, k^{-1}$$

$$= O\left(x \lg^{-1} x\right) \left\{ \sum_1^{\sqrt{x}-1} k \lg^{-\varrho} k \left(k^{-1} - (k+1)^{-1}\right) + 2^\varrho \lg^{-\varrho} x \right\} = O(x \lg^{-\varrho} x)$$

$$T_2 = O\left(x \lg^{-\varrho} x \sum_1^{\sqrt{x}} c_k\, k^{-1}\right) = O(x \lg^{-\varrho} x)$$

$$T_3 = O(x^{1/2} \lg^{-\varrho} x)\, O(x^{1/2} \lg^{-1} x) = O(x \lg^{-\varrho-1} x) \;,$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

§ 5.

Es sei χ nicht der Hauptcharakter mod. k. Die zu ihm gehörige L-Funktion sei $L(s)$, ohne Index, was hier keine Mißverständnisse geben kann. Ich beweise den Satz:

Die Reihe $\sum \chi(m)\, a(\varrho+n, m)\, (\lg^n m)\, m^{-1-it}$ ist für $0 < \varrho < 1$, $t \gtreqless 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ konvergent.

Zu diesem Zwecke sind einige Hilfssätze nötig.

. Die summatorische Funktion der Dirichlet'schen Reihe für

$$(-1)^\nu D_s^\nu \left(L(s+it)\right)^{\varrho+q-1}$$

sei
$$R_{q,\nu}(x, \varrho) = \sum_1^x \chi(m)\, a(\varrho+q-1, m)\, m^{-it} \lg^\nu m \;.$$

Lemma. Es sei $0 < \varrho < 1$, $t \gtreqless 0$. Wenn dann

$$R_{n,n}(x,\varrho) = O(x \lg^{-\varrho} x),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

so folgt

$$R_{q,k}(x,\varrho) = O\left(x(\lg x)^{-\varrho-q+k}\right),\ k = 0, 1, \ldots (q-1);$$

also mindestens $R_{q,k}(x,\varrho) = O\left(x(\lg x)^{-\varrho-1}\right)$.

Dies folgt durch partielle Summation.

Die Reihe, $0 \leqq r$ und ganzzahlig,

$$L^{(r)}(s+it) = \sum \chi(n)(-1)^r \lg^r n\, n^{-s-it}$$

ist für $R(s) > 0$ konvergent. Für ihre summatorische Funktion gilt

$$\sum_1^x \chi(n)\, n^{-it} \lg^r n = O(\lg^{r+1} x).$$

2. **Satz.** Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$R_{n,n}(x,\varrho) = O(x \lg^{-\varrho} x).$$

Beweis. Ich nehme an, die Behauptung gelte für $n = 0, 1, 2, \ldots, q$, und zeige, daß sie dann auch für $n = q+1$ richtig ist. Man hat

$$(L^{\varrho+q})^{(q+1)} = (\varrho+q)\,(L^{\varrho+q-1}L')^{(q)} = (\varrho+q)\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(L^{\varrho+q-1})^{(k)}\,L^{(q-k+1)}.$$

Die summatorische Funktion $R_{q+1,q+1}(x,\varrho)$ der linken Seite ergibt sich hieraus als Summe der summatorischen Funktionen der Terme rechts. Letztere sind Summen der Form des Satzes 1. Man erhält die zum Index k gehörende aus ihm, indem man für $U(x)$ setzt

$$\sum_1^x \chi(n)\, n^{-it}(\lg n)^{q-k-1} = O(\lg^{q-k} x)$$

und für $f(n)$ setzt

$$\chi(n)\, a(\varrho+q-1, n)\, n^{-it} \lg^k n$$

wobei nach Voraussetzung und Lemma

$$R_{q,k}(x,\varrho) = \sum_1^x \chi(n)\, a(\varrho+q-1,n)\, n^{-it} \lg^k n = O(x \lg^{-\varrho-q+k} x).$$

Somit ergibt Satz 1 für die summatorische Funktion von $(L^{\varrho+q-1})^{(k)} L^{(q-k+1)}$ die Abschätzung: $O(x \lg^{-\varrho-q+k} x)$; daher ist

$$R_{q+1,q+1}(x,\varrho) = (\varrho+q)\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k} O(x \lg^{-\varrho-q+k} x) = O(x \lg^{-\varrho} x)$$

und dies ist die Behauptung.

Nun gilt diese Approximation für $n = 0$; denn nach (9) ist

$$R_{0,0}(x,\varrho) = \sum_1^x \chi(k)\, a(\varrho - 1, k)\, k^{-it} = O\left(\sum_1^x a(1-\varrho, k)\right) = O(x \lg^{-\varrho} x)\,.$$

Somit gilt sie für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Damit ist die Induktion vollständig.

3. Satz. Wenn χ nicht Hauptcharakter ist, $0 < \varrho < 1$, $t \gtrless 0$, dann ist die Reihe $D_s^n\,(L(1+it))^{\varrho+n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, konvergent und genauer

$$\sum_1^x \chi(k)\, a(\varrho+n, k)\, k^{-1-it} \lg^n k = (-1)^n\, \left(L^{\varrho+n}(1+it)\right)^{(n)} + O(\lg^{-\varrho} x)$$

Beweis. Man berechnet mit Hilfe von Satz 2, indem man zur Abkürzung schreibt $R_{n+1,n+1}(\nu, \varrho) = R_\nu$,

$$\begin{aligned}
T_m &= \sum_m^\infty \chi(\lambda)\, a(\varrho+n, \lambda) \lg^n \lambda\, \lambda^{-1-it} \\
&= \sum_m^\infty (R_\lambda - R_{\lambda-1})\, \lambda^{-1} \lg^{-1} \lambda \\
&= -R_{m-1} m^{-1} \lg^{-1} m + \sum_m^\infty R_\lambda \left(\lambda^{-1} \lg^{-1} \lambda - (\lambda+1)^{-1} \lg^{-1}(\lambda+1)\right) \\
&= O(\lg^{-1-\varrho} m) + \sum_m^\infty \lg^{-\varrho} \lambda \left(\lg^{-1}\lambda - \lg^{-1}(\lambda+1)\right) + \sum_m^\infty (\lambda+1)^{-1} \lg^{-\varrho}\lambda \lg^{-1}(\lambda+1) \\
&= O\left\{ \lg^{-1-\varrho} m + \sum_{m+1}^\infty \lambda^{-1} \lg^{-1-\varrho} \lambda \right\}\,.
\end{aligned}$$

Da $\displaystyle\sum_m^\infty (k+1)^{-1} (\lg(k+1))^{-1-\varrho} \leq \int_m^\infty v^{-1} (\lg v)^{-1-\varrho}\, dv = \varrho^{-1} \lg^{-\varrho} m$,

so folgt die Behauptung.

§ 6.

In der Identität

$$\sum_1^x \chi(n)\, a(-\varrho+1, n)\, n^{-1-it} = \sum_1^x \chi(n)\, a(-\varrho, n)\, n^{-1-it} \sum_1^{x/n} \chi(n)\, n^{-1-it}$$

ist für $0 < \varrho < 1$ die linke Seite aus Satz 3 bekannt; die innere Summe auf der rechten Seite ist Teilsumme einer für $R(s) > 0$ konvergierenden Dirichletreihe; man erhält somit

$$L^{1-\varrho}(1+it)+O(\lg^{\varrho-1}x)$$
$$=\sum_{1}^{x}\chi(n)\,a(-\varrho,n)\,n^{-1-it}\,\bigl(L(1+it)+O(x^{-1}n)\bigr)$$
$$=L(1+it)\sum_{1}^{x}\chi(n)\,a(-\varrho,n)\,n^{-1-it}+O\,\Bigl(x^{-1}\sum_{1}^{x}a(\varrho,n)\Bigr)$$

somit wegen (9)

$$\sum_{1}^{x}\chi(n)\,a(-\varrho,n)\,n^{-1-it}=L^{-\varrho}(1+it)+O(\lg^{\varrho-1}x)\,. \tag{17}$$

Die Division mit $L(1+it)$ ist zulässig, da $L(1+it)\neq 0$, für $t \gtreqless 0$. Letzteres ist auf elementarem Wege, ohne Gebrauch der Funktionentheorie, bewiesen; vergleiche E. Landau, Handbuch der Primzahlen, Seite 460—462. Somit

4. Satz. Der Satz 3 gilt, mit dem Fehlerglied der Formel (17), auch für $n=0$; $-1<\varrho<0$.

Aus dem am Schlusse von § 3 erwähnten Satz von Riesz ergeben sich, wegen Satz 2, Sätze 3 und 4 ohne das Fehlerglied, falls man weiß, daß $D_s^n L^{\varrho+n}$, $n=0,1,2,\ldots$; $0<\varrho<1$ und L^{ϱ}, $-1<\varrho<0$, für $R(s)\geqq 1$ regulär sind. Der hier auf den Grenzwertsatz 1 sowie auf $L(1+it)\neq 0$ sich stützende Beweis erfordert geringere Kenntnisse und ergibt eine durch das Fehlerglied genauere Aussage.

Aus der Tatsache, daß die Reihe für $L^{-1/2}(1+it)$, $t\gtreqless 0$, konvergiert, folgt nach dem Cesàro'schen Satze, daß für die Produktreihe

$$\bigl(L^{-1/2}(1+it)\bigr)^2=\sum\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-1-it}$$

das logarithmische Mittel einem Grenzwert zustrebt. Ist $\omega^{-\gamma}C_\nu^{\gamma}(\omega)$ dieses Mittel, nach der Bezeichnungsweise, die die Herren Hardy und Riesz in ihrem Cambridge Tract: „The general theory of Dirichlet's series" durchführen, so ergibt die Formel (1) S. 64 dieses „Tract", wenn man obiges genauere Ergebnis (17) einsetzt:

$$\omega^{-1}\,C_\nu^{(1)}(\omega)=L^{-1}(1+it)+O(\omega^{-1/2})$$

wobei $\lg m=\omega$. Dies ist aber weniger als die Umkehrung des Cesàro'schen Satzes zu erschließen gestattet. Denn letztere ergibt

$$\omega^{-1}\,C_\nu^{(1)}(\omega)=L^{-1}(1+it)+O(\omega^{-1})\,,$$

wie ich in dem am Schlusse der Einleitung erwähnten Aufsatze angegeben habe.

(Eingegangen den 21. Oktober 1935.)