Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen.

Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen

Von RUD. FUETER, Zürich

In zwei Abhandlungen habe ich die Theorie der rechts-, resp. linksregulären Funktionen $w = f(z) = \sum_{(k)} u_k i_k$ der Quaternionenvariablen $z = \sum_{(k)} x_k i_k$ entwickelt[1]). Diese enthält als Spezialfall die Theorie der gewöhnlichen analytischen Funktionen von einer oder zwei complexen Variablen. Im folgenden setze ich die Kenntnis dieser Arbeiten voraus. Es ist mir gelungen, den analytischen Ausdruck aller dieser Funktionen zu finden. Derselbe ist eine besondere Form der Taylor'schen Reihe, deren Koeffizienten dreifache Integrale über die Randwerte der Funktion sind, und die sich analytisch fortsetzen läßt. Damit ist z. B. auch der Ausdruck für alle ganzen rationalen regulären Funktionen gegeben.

Der Einfachheit wegen beschränke ich mich auf rechtsreguläre Funktionen. Es gilt jedoch alles entsprechend auch für die linksregulären Funktionen.

1. Es sei $F(z)$ eine im ganzen endlichen Hyperraume rechtsreguläre Funktion, deren Komponenten ganze rationale Formen n-ten Grades $(n > 0)$ der reellen Variablen x_k seien. Dann gilt der Euler'sche Satz:

$$n F(z) = \sum_{(k)} x_k F^{(k)}(z).$$

Da F rechtsregulär ist, muß:

$$\sum_{(k)} F^{(k)}(z) i_k = 0$$

sein. Somit folgt:

$$n F(z) = \sum_{k=1}^{3} F^{(k)}(z) (x_k - i_k x_0) . \tag{1}$$

Nun ist aber auch $F^{(k)}(z)$ rechtsregulär und eine Form $(n-1)$ten Grades. Also dürfen wir (1) auch auf $F^{(k)}(z)$ anwenden. Fährt man so n mal fort, so wird:

$$n!\,F(z) = \sum_{k_1=1}^{3} \sum_{k_2=1}^{3} \cdots \sum_{k_n=1}^{3} F^{(k_1 k_2 \cdots k_n)} (x_{k_1} - i_{k_1} x_0)(x_{k_2} - i_{k_2} x_0) \cdots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0).$$

---

1) *Rud. Fueter:* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comm. Math. Helv. Vol. 7, S. 307. Wird als Fueter I zitiert.

Rud. Fueter: Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Monatshefte f. Math. und Physik. Bd. 43, S. 69.

Die Größen $F^{(k_1 \cdots k_n)}$ sind als $n$te Ableitungen konstant. Ferner sind sie von der Reihenfolge der k unabhängig. Wir setzen jetzt:

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_r)} (x_{k_1} - i_{k_1} x_0)(x_{k_2} - i_{k_2} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)$$

wo: $$n_1 + n_2 + n_3 = n,$$

und n_1 die Zahl der 1, n_2 der 2 und n_3 der 3 unter den Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_n$, ist. Die Summe rechts ist über alle $\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$ von einander verschiedenen Permutationen der k_r zu erstrecken. Die $p(z)$ sind ganze rationale Formen $n$ten Grades der x_k. Die ersten Werte derselben sind:

$$\begin{aligned}
&p_{100} = x_1 - i_1 x_0,\ p_{010} = x_2 - i_2 x_0,\ p_{001} = x_3 - i_3 x_0\,,\\
&p_{200} = \frac{1}{2!}(x_1 - i_1 x_0)^2\,,\ p_{020} = \ldots\\
&p_{110} = x_1 x_2 - x_1 x_0 i_2 - x_2 x_0 i_1\,,\ p_{101} = \ldots\\
&p_{300} = \frac{1}{3!}(x_1 - i_1 x_0)^3\,,\ p_{030} = \ldots\\
&p_{210} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 x_2 - x_0^2 x_2 - 2 x_0 x_1 x_2 i_1 - x_1^2 x_0 i_2 + \frac{1}{3} x_0^3 i_2\right),\ p_{201} = \ldots\\
&p_{111} = x_1 x_2 x_3 - x_0 x_2 x_3 i_1 - x_0 x_1 x_3 i_2 - x_0 x_1 x_2 i_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wir setzen wegen später noch $p_{000} = 1\,(n = 0)$.

Somit wird:

$$F(z) = \sum_{(n_1+n_2+n_3=n)} F^{(\overbrace{11..1}^{n_1}\ \overbrace{2..2}^{n_2}\ \overbrace{3..3}^{n_3})}\, p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,. \tag{2}$$

Über die Polynome p gilt nun der

1. Hilfssatz: *Die Polynome $p(z)$ sind links- und rechtsreguläre Funktionen von z.*

Nach Definition ist nämlich:

$$n!\, p^{(0)}_{n_1 n_2 n_3} = -\sum_{(k_r)} \sum_{r=1}^{n} (x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_{r-1}} - i_{k_{r-1}} x_0)\, i_{k_r} (x_{k_{r+1}} - i_{k_{r+1}} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)\,,$$

$$\sum_{k=1}^{3} n!\, p^{(k)}_{n_1 n_2 n_3} i_k = \sum_{(k_r)} \sum_{r=1}^{n} (x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_{r-1}} - i_{k_{r-1}} x_0)(x_{k_{r+1}} - i_{k_{r+1}} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)\, i_{k_r}\,.$$

Durch Addition und Ausklammerung von x_0^{-1} erhält man:

$$\sum_{k=0}^{3} n!\, p_{n_1 n_2 n_3}^{(k)}\, i_k = x_0^{-1} \sum_{(k_r)} \sum_{r=1}^{n} \Big[(x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (- i_{k_r} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0) -$$
$$- (x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)(- i_{k_r} x_0) \Big],$$

wo im zweiten Gliede der zu k_r gehörige Faktor fehlt. Nun ist jedoch:

$$(x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots x_{k_r} \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0) - (x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)\, x_{k_r} = 0,$$

da x_{k_r} reell ist. Somit schreibt sich obige Formel so:

$$\sum_{k=0}^{3} n!\, p_{n_1 n_2 n_3}^{(k)}\, i_k = x_0^{-1} \sum_{(k_r)} \sum_{r=1}^{n} \Big[(x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_r} - i_{k_r} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0) -$$
$$- (x_{k_1} - i_{k_1} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0)(x_{k_r} - i_{k_r} x_0) \Big].$$

Da aber die Summe über alle Permutationen der k_r zu erstrecken ist, so muß die rechte Seite null sein. Da die p außerdem ganz rational in den x_k sind, so ist p im ganzen endlichen Raume rechtsregulär. Der Beweis für linksregulär ist entsprechend.

2. Nach früherm[2]) ist $\Delta_z(z^{n+2})$ eine rechtsreguläre Form $n$ten Grades der x_k. Dasselbe gilt auch für:

$$\Delta_z\big((z\zeta^{-1})^{n+2}\big) = n(\zeta)^{-1} \Delta_\tau(\tau^{n+2}), \text{ wo } \tau = z\zeta^{-1} \text{ ist}, \quad n \geqq 0,$$

und ζ ein von z unabhängiges Quaternion $\neq 0$ ist. Wir nehmen letztern Ausdruck für $F(z)$ und berechnen die $n$ten Ableitungen. Wir setzen

$$\zeta^{-1} \Delta_z \big((z\zeta^{-1})^{n+2}\big)^{(\overbrace{11..1}^{n_1}\, \overbrace{2..2}^{n_2}\, \overbrace{3..3}^{n_3})} = q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta), \quad n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Dann wird nach Formel (12)[3]):

$$q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) = -4n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1} \Big[(n+1) \sum_{(k)} i_{k_1}\zeta^{-1} \ldots i_{k_n}\zeta^{-1} + n \sum_{(k)} i_{k_1}\zeta^{-1} \ldots i_{k_{n-1}}\zeta^{-1}\, \overline{i_{k_n}\zeta^{-1}} +$$
$$+ \ldots + \sum_{(k)} \overline{i_{k_1}\zeta^{-1} \ldots i_{k_n}\zeta^{-1}} \Big],$$

wo die $k_1, k_2 \ldots k_n$ in den Summen a l l e $n!$ Permutationen der n_1 1, n_2 2 und n_3 3 durchlaufen. Daher wird:

$$\zeta^{-1} \Delta_z \big((z\zeta^{-1})^{n+2}\big) = \sum_{(n = n_1 + n_2 + n_3)} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z). \tag{3}$$

[2]) Siehe *Fueter* I, S. 316, Formel (12).

[3]) Siehe [2]).

Die ersten Werte der $q(\zeta)$ sind:

$$q_{000}(\zeta) = -4n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1}$$
$$q_{100}(\zeta) = -4n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1}(2i_1\zeta^{-1} + \overline{i_1\zeta^{-1}}), \ldots$$
$$q_{200}(\zeta) = -4n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1}(6i_1\zeta^{-1}i_1\zeta^{-1} + 4n(\zeta)^{-1} + 2(\overline{i_1\zeta^{-1}})^2), \ldots$$
$$q_{110}(\zeta) = -4n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1}(3(i_1\zeta^{-1}i_2\zeta^{-1}+i_2\zeta^{-1}i_1\zeta^{-1}) + (\overline{i_1\zeta^{-1}}\,\overline{i_2\zeta^{-1}}+\overline{i_2\zeta^{-1}}\,\overline{i_1\zeta^{-1}})),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es gilt der

2. Hilfssatz: *Die Funktionen $q_{n_1 n_2 n_3}(z)$ sind linksreguläre Funktionen von z.*

Der Beweis erfolgt wie für Hilfssatz 1.

3. Es sei jetzt $w = f(z)$ eine im Nullpunkt rechtsreguläre Funktion. Dann kann w um 0 in eine konvergente Reihe entwickelt werden[4]:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ \zeta^{-1} \Delta_z ((z\zeta^{-1})^{n+2}) .$$

Diese Integrale können aber berechnet werden mittels (3).

Es wird:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ \zeta^{-1} \Delta_z ((z\zeta^{-1})^{n+2}) = \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3}\, p_{n_1 n_2 n_3}(z) \ , \quad n = n_1 + n_2 + n_3 ,$$

wo:

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(H)} f(\zeta)\, dZ\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) \ . \tag{4}$$

Wegen Hilfssatz 2 kann H ein beliebiger Oberflächenraum sein, der 0 im Innern enthält, und in und auf dem w überall rechtsregulär ist. Somit findet man für w die Reihenentwicklung:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3}\, p_{n_1 n_2 n_3}(z) \qquad \mathrm{I.}$$

Wegen Hilfssatz 1 ist aber umgekehrt jede solche Reihe I, falls sie in einer Hyperkugel um 0 gleichmäßig konvergiert, auch rechtsregulär.

Satz: *Ist $w = f(z)$ in $z = 0$ rechtsregulär, so läßt sich w in eine gleichmäßig konvergente Reihe I entwickeln, deren Koeffizienten c durch (4)*

[4]) *Fueter* I, S. 323, Formel (14a). Der Einfachheit halber ist hier $c = 0$ gesetzt.

gegeben sind. Umgekehrt stellt jede in einer um 0 gelegenen Hyperkugel gleichmäßig konvergente Reihe I eine in 0 rechtsreguläre Funktion von z dar.

Damit kann für die rechtsregulären Funktionen die der Weierstraß'schen Theorie analoge Theorie entwickelt werden, indem I ein Funktionselement darstellt. Insbesondere ist durch eine endliche Reihe I der allgemeinste Ausdruck derjenigen rechtsregulären Funktionen gefunden, die *ganz und rational* in den x_k sind.

In der Reihe I ist die Reihenentwicklung der analytischen Funktion von zwei komplexen Variablen als Spezialfall enthalten. Man setzt:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_0 + i_1 x_1 = i_1(x_1 - i_1 x_0) \\ z_2 &= x_2 + i_1 x_3 = x_2 - i_2 x_0 + i_1(x_3 - i_3 x_0) \,. \end{aligned}$$

Wählt man jetzt alle c als komplexe Zahlen von i_1, die noch elementaren Bedingungen genügen (wie $c_{001} = i_1 c_{010}$, $c_{101} = i_1 c_{110}$, $c_{011} = i_1 c_{020} = -i_1 c_{002}, \ldots$), so entsteht die Potenzreihe nach z_1, z_2.

Setzt man in I für $f(z)$ die Funktion $p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z)$, wo $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ feste natürliche Zahlen sind, so ergibt Formel (4):

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(H)} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta)\, dZ\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) = \begin{cases} 1, \ \nu_k = n_k, & k = 1, 2, 3. \\ 0, \ \nu_k \neq n_k, & \text{für wenigstens ein } k. \end{cases} \tag{5}$$

Ferner sieht man aus der Definition der $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$, daß:

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} + \cdots \,,$$

wo in allen übrigen Gliedern wenigstens ein Faktor x_k durch x_0 ersetzt ist. Daher ist

$$\frac{\partial^n p_{n_1 n_2 n_3}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} = 1 \,, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \,.$$

Dagegen ist:

$$\frac{\partial^n p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} = 0, \ \text{für } x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0 \,, \ \text{falls ein } \nu_k \neq n_k \,.$$

Daraus folgt, daß man die c in I. auch so berechnen kann:

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \left(\frac{\partial^{n_1 + n_2 + n_3} f(z)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right)_{\substack{x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0}} \tag{6}$$

Man sieht übrigens leicht aus der Definition, daß die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_1} = p_{n_1-1 n_2 n_3}(z)\,, \qquad \frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_2} = p_{n_1 n_2-1 n_3}(z)\,,$$

$$\frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_3} = p_{n_1 n_2 n_3-1}(z)\,.$$

4. Weiter ist:

$$\Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \zeta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_z\left((z\zeta^{-1})^{n+2}\right)\,, \quad |z| < |\zeta|\,,$$

also nach (3):

$$\Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,.$$

Anderseits ist nach dem II. Hauptsatz[5]), falls K eine Kugel um 0 ist:

$$w = f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right)\,.$$

Hier setze man für $f(\zeta)$ die Entwicklung I ein:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, dZ\, \Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right)\,.$$

Setzt man für $\Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right)$ die obige Entwicklung ein, so wird nach (5):

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, dZ\, \Delta_z\left((\zeta - z)^{-1}\right) = p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,.$$

Anderseits ist aber auch:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z\left((z\zeta^{-1})^{n+2}\right) = p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,,$$

wegen (3) und (5). Somit darf man setzen:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z\left((z\zeta^{-1})^{n+2}\right)\,.$$

---

[5]) *Fueter* I, S. 318.

Dies ergibt eine bestimmte Reihenentwicklung für die holomorphen Funktionen. Man setzt:

$$P_{n_1 n_2 n_3}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} (z\zeta^{-1})^{n+2}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \ . \tag{7}$$

Die P sind ganze rationale Formen der x_k vom Grade $n + 2$, die von $f(z)$ vollständig unabhängig sind. Setzt man dann:

$$W = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n = n_1 + n_2 + n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} P_{n_1 n_2 n_3}(z) \ , \qquad \text{II.}$$

so konvergieren auch diese Reihen in K, und es muß:

$$\Delta W = w = f(z) \ .$$

Die c sind wieder durch (4) gegeben.

Die Funktionen P sind vom Radius der Kugel r unabhängig. Ist K_1 die Einheitskugel um 0 mit dr als Element, so kann man schreiben:

$$P_{n_1 n_2 n_3}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_1)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, (z\zeta^{-1})^{n+2} dr \ . \tag{7a}$$

Ferner ist:

$$\Delta\, P_{n_1 n_2 n_3}(z) = p_{n_1 n_2 n_3}(z) \ . \tag{8}$$

5. Ebenso kann man den Fall behandeln, daß $w = f(z)$ eine im Hyperraum zwischen und auf zwei Hyperkugeln um den Nullpunkt, K_r und K_R, rechtsregulär ist. Nach dem Beweise von Formel (16) und (16a)[6]) kann man (für ein z zwischen den beiden Hyperkugeln) schreiben:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n = n_1 + n_2 + n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z) + J \ ,$$

wo:

$$J = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_r)} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} \Delta_z \left((\zeta z^{-1})^{n+1} \right) \ ,$$

ist. Nun ist aber:

$$\zeta^{-1} \Delta_z \left((\zeta z^{-1})^{n+1} \right) = \Delta_\zeta \left((z^{-1}\zeta)^{n+2} \right) z^{-1}$$

linksregulär als Funktion von ζ, und genau die linke Seite von (3), wenn man dort z mit ζ vertauscht und die Reihenfolge aller Größen umkehrt,

[6]) *Fueter* I, S. 325 u. ff.

d. h. von rechts nach links, statt von links nach rechts liest. Daraus erkennt man, daß man genau die entsprechende Entwicklung wie dort ausführen kann und die Reihe erhält:

$$\zeta^{-1} \Delta_z \left((\zeta z^{-1})^{n+1} \right) = \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) \overleftarrow{q}_{n_1 n_2 n_3}(z) ,$$

wo $\overleftarrow{q}$ aus q dadurch hervorgeht, daß man die einzelnen Summanden in der umgekehrten Reihenfolge schreibt. Es gilt dann der:

Hilfssatz 3: $\overleftarrow{q}_{n_1 n_2 n_3}(z)$ *ist eine rechtsreguläre Funktion von* $z \, (z \neq 0)$.

Somit wird:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} \overleftarrow{q}_{n_1 n_2 n_3}(z) ,$$

wo:

$$d_{n_1 n_2 n_3} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{(K_n)} f(\zeta) \, dZ \, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) . \tag{9}$$

Die ganze Entwicklung lautet somit:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} \left\{ c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z) + d_{n_1 n_2 n_3} \overleftarrow{q}_{n_1 n_2 n_3}(z) \right\} \qquad \text{II.}$$

Konvergiert umgekehrt II zwischen und auf zwei Hyperkugeln um 0 gleichmäßig, so ist $f(z)$ rechtsregulär in diesem Bereiche.

(Eingegangen den 8. Februar 1936.)