Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Über das Euler'sche Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen.

Autor: Bodewig, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9284

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über das Euler'sche Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen

Von E. Bodewig, Basel

Im 9. Kapitel des 2. Teiles seiner Differentialrechnung (Opera omnia, Ser. I, Vol. X, p. 422—55) entwickelt Euler eine Methode zur Auflösung numerischer — und, wie er angibt, auch litteraler — Gleichungen, die eine wesentliche Verallgemeinerung des Newton'schen Verfahrens darstellt.

Ist nämlich $y = y(x)$ und $y(X) = 0$, so setzt er bei beliebigem a die Entwicklung an

$$0 = y(X) = y(a) + (X - a)y'(a) + \tfrac{1}{2}(X - a)^2 y''(a) + \cdots$$

Bricht man mit Newton nach dem linearen Gliede ab, so folgt, daß $X - a$ proportional zu $b = y(a)$ ist. Eine nochmalige Newton'sche Approximation gibt $X - a$ als lineare Kombination von b und b^2. Euler setzt daher gleich allgemein: $X - a = Ab + Bb^2 + Cb^3 + \cdots$. Durch Koeffizientenvergleichung erhält er die bisher unbestimmten $A, B, C, \cdots$. Da ihm aber ihr Bildungsgesetz nicht klar ist, verfährt er noch nach einer *zweiten Methode*. Er denkt sich die Umkehrung der Funktion $y = y(x)$ gebildet: $x = x(y)$. Dann ist $x(0)$ die gesuchte Wurzel X. Er geht also wieder von einem beliebigen a aus und erhält wegen $x(b) = a$:

$$X = x(0) = x(b - b) = a - b \cdot x'(b) + \tfrac{1}{2} b^2 x''(b) - \tfrac{1}{6} b^3 x'''(b) + \cdots.$$

Allgemein führt er jetzt die Rechnung nicht mehr durch, sondern verweist darauf, daß man in jedem numerischen Falle die Ableitungen $x', x'', \cdots$ bilden kann, weil x' bekannt ist. (Bezeichnet man $y^{(n)}$ kurz mit y_n, so ist

$$x' = 1/y_1\,,\ x'' = -y_2 : y_1^3\,,\ x''' = (3y_2^2 - y_1 y_3) : y_1^5\,,$$
$$x'''' = -(15y_2^3 - 10y_1 y_2 y_3 + y_1^2 y_4) : y_1^7\,,$$
$$x^{V} = (105y_2^4 - 105y_1 y_2^2 y_3 + 10y_1^2 y_3^2 + 15y_1^2 y_3 y_4 - y_1^3 y_5) : y_1^9 \text{ u.s.w.}$$

mit dem, von Euler nicht erkannten, rekurrenten Bildungsgesetz

$$Y_{n+1} = (2n-1)\, y_2 Y_n - y_1 Y_n'\,,$$

wo Y_n definiert ist durch $x^{(n)} = (-1)^{n-1} Y_n : y_1^{2n-1})$.

Da der Ausgangswert *a beliebig* ist, also kein „Näherungswert" zu sein braucht, so glaubt Euler damit die Wurzel einer Gleichung in eine Reihe entwickelt zu haben. Allerdings weist er andererseits schon darauf hin, daß er kein Mittel kennt, um zu entscheiden, welche der verschiedenen Wurzeln X er, von a ausgehend, erhält. Wir kommen darauf und auf die Konvergenzfrage zurück.

Jedenfalls ist zunächst klar, welche Vorteile das Euler'sche Verfahren hat: Geht man von einem *Näherungswert* aus und bricht die Reihe hinter b^{n-1} ab, so ist der begangene Fehler proportional zu b^n (bei Newton also proportional zu b^2). Grob gesprochen: Ist a bis auf m Dezimalen richtig, so liefert die hinter b^{n-1} abgebrochene Entwicklung die Wurzel bis auf etwa mn Dezimalen genau. Man kann also, ohne wie bei Newton und andern Methoden das Verfahren zu wiederholen, gleich einen Näherungswert bis auf die verlangte Dezimalenzahl berechnen. Freilich gilt diese Bemerkung nur theoretisch; denn schließlich werden die höheren Ableitungen von $x(y)$ meist so kompliziert, daß man praktischer das Verfahren wiederholt. Indessen wird man Eulers Methode mit besserem Erfolg als die andern Methoden anwenden, wenn die Berechnung von $y(x)$, zumal für mehrstelliges x, besonders umständlich ist; auch wenn z. B. $y(x)$ nur für Argumente mit wenigen Dezimalen tabuliert ist und bei mehr Dezimalen interpoliert werden müßte. Ferner wird man das Verfahren anwenden, wenn — was öfter vorkommt — die Ableitungen $x', x'', \cdots$ wenigstens im Anfang sich leicht bilden lassen, z. B. bei $x^x = c$ oder, wie man besser schreibt, $x \cdot l\,x = k$. Bei tabulierten Funktionen lassen sich ferner diese Ableitungen leicht numerisch durch Differenzenreihen bestimmen, wenn es sich um Tafelargumente handelt. Im übrigen wird man bei tabulierten Funktionen das Verfahren meist wiederholen, indem man beim ersten Male so viele Stellen bestimmt, daß die Näherungswurzel als Argument in der Tafel gerade noch aufschlagbar ist, und dann beim zweiten Male die Genauigkeit so weit treibt, wie die Stellenzahl der tabulierten Funktionswerte es gestattet. — Wenn hingegen die höheren Ableitungen umständlich zu berechnen sind, so wird man auf die Newton'sche Methode oder gar die Regula Falsi zurückkommen.

Dieses Verfahren, das Euler nach einer Mitteilung von Courtivron (Académie des Sciences 1744) vor 1744 fand — die Differentialrechnung erschien erst 1755 — und das nach Lagrange „zu der Zahl von Entdeckungen zählt, mit denen er die Analysis bereichert hat", ist sonderbarerweise völlig vergessen, obwohl es in seiner Differentialrechnung ein ganzes Kapitel mit zahlreichen Schlußfolgerungen einnimmt. Nur Lagrange, der

Eulers Erbe weiterführte, hat sich noch einmal mit ihm beschäftigt[1]); indessen sind seine theoretischen Ausführungen nur Wiederholungen Eulers. Nach ihm kannte die Methode anscheinend niemand mehr, so daß Theremin sie im Jahre 1855 von neuem entdecken konnte[2]), ohne Widerspruch zu finden, ohne aber andererseits die Methode irgendwie praktisch oder theoretisch auszuwerten. 1870 wurde die Methode zum dritten Male entdeckt von Schröder[3]), der sie auf ganz anderem Wege ableitete und die Priorität im übrigen Theremin zuschrieb. Seitdem ist nirgends mehr die Rede von ihr, auch nicht in Darstellungen über numerisches Rechnen. Eine Ausnahme bildet nur Willers[4]), der sie kurz erwähnt, sich aber weder auf Theremin noch Schröder noch gar Euler bezieht.

Euler glaubte, wie gesagt, durch sein Verfahren die Wurzel einer beliebigen Gleichung in eine Reihe entwickelt zu haben. Heute hat man natürlich die Konvergenz der obigen Reihe für X zu untersuchen. Im Falle einer beliebigen Gleichung stößt dies auf zu große Schwierigkeiten. Wir beschränken uns daher auf *algebraische Gleichungen*, und zwar solche ohne mehrfache Wurzeln.

Die Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ werde durch eine Tschirnhausen-Transformation $z = \varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ auf die Form $z^n = 1$ gebracht. Setzt man für die neue Gleichung die Euler'sche Entwicklung mit zunächst unbestimmtem a an, so ergibt sich nichts anderes als die binomische Reihe $(a^n - (a^n - 1)^{1/n}$. Letztere aber konvergiert, wenn a die Bedingung erfüllt $| a^n - 1 | \leqq | a^n |$. Die Kurve $| y^n - 1 | = | y^n |$ oder in Polarkoordinaten $r^n \cos n\vartheta = \frac{1}{2}$ erträgt nun dieselben Drehungen wie ein reguläres n-Eck und besteht daher aus n kongruenten, ins Unendliche gehenden Zügen mit n reellen Brennpunkten (Schnittpunkten isotroper Tangenten), nämlich den n Einheitswurzeln. Damit also das Euler'sche Verfahren bei der Gleichung $z^n = 1$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß der „Näherungswert" a von z innerhalb oder auf dem Rande eines solchen Zuges liegt, *mag er auch unendlich weit von dem Wurzelwert entfernt sein*. Und zwar konvergiert das Verfahren nach dem Abel'schen Satz gegen diejenige Wurzel z_i, welche in demselben Kurvenzug liegt wie a.

Von der Gleichung $z^n = 1$ kann man aber wieder zur ursprünglichen Gleichung zurückgehen. Dann ist jede Wurzel X_i von $f(x) = 0$ dar-

[1]) Oeuvres, 8, 262.

[2]) Recherches sur la Résolution des équations de tous les degrés. Crelle's Journal, 49, 187—243.

[3]) Unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Mathematische Annalen, 2, 1870, 230.

[4]) Methoden der praktischen Analysis, p. 175.

stellbar durch $X_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \beta_2 z_i^2 + \cdots + \beta_{n-1} z_i^{n-1}$, wo z_i eine Wurzel von $z^n = 1$ ist und die β_k rationale Funktionen der $a_1, a_2, \cdots, a_n$ und $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ sind. Die erwähnte Kurve geht dann in eine andere über, die zwar nicht wieder symmetrisch ist, die aber auch jetzt aus n Zügen besteht, welche wieder ins Unendliche reichen. In jedem dieser Züge liegt eine Wurzel X_i. Wählt man irgendeinen Punkt im Innern oder auf dem Rande eines solchen Zuges als „Näherungswert" für X_i, so konvergiert die Entwicklung, und zwar gegen die innerhalb des Zuges befindliche Wurzel X_i.

Man hat also bei dem Euler'schen Verfahren einen wesentlich größeren Spielraum bei der Wahl des Näherungswertes, mit dem man die Approximation an die Gleichungswurzel beginnen will. Und nach *einer*, allerdings unbekannten Richtung kann man den Ausgangswert beliebig weit von dem Wurzelwert entfernt wählen. In Fällen, in denen also andere Näherungsverfahren versagen, wird man mit dem gleichen Ausgangswert bei dem Euler'schen Verfahren noch eine konvergente Entwicklung bekommen.

(Eingegangen den 26. Februar 1935.)