Sur un problème de Steiner.

Sur un problème de Steiner

Par L. Kollros, Zurich

Le mémoire fondamental de Steiner „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“ (Oeuvres complètes, t. 1, p. 229 à 460) est resté inachevé; il devait comprendre cinq parties; la première seule a été publiée; elle se termine par une liste de 85 problèmes qui révèlent les intentions de l'auteur sur la suite de son travail. Plusieurs de ces problèmes sont de simples applications de la théorie; d'autres sont plus difficiles; quelques-uns n'ont pas encore été résolus. Il serait intéressant d'en faire une étude systématique.

Les problèmes 38 et suivants ont probablement été trouvés par Steiner à l'aide de sa „projection gauche“ (o. c., p. 409); on peut les résoudre très simplement par une transformation birationnelle. Comme il n'y a rien à ce sujet dans les manuscrits laissés par l'auteur, j'indiquerai la solution du problème 39 (o. c., p. 446):

On considère une famille de coniques semblables circonscrites à un triangle XYZ. Démontrer :

1^0 *que leur enveloppe est une courbe unicursale du 4^{me} degré ayant X, Y et Z comme points doubles ;*

2^0 *que le point de contact de chaque conique avec l'enveloppe et le 4^{me} point d'intersection de la conique avec le cercle circonscrit à XYZ sont diamétralement opposés sur la conique ;*

3^0 *que par chaque point de ce cercle circonscrit passent deux coniques de la famille et que leurs points de contact avec l'enveloppe sont toujours sur une hyperbole équilatère circonscrite à XYZ.*

La démonstration se base sur la transformation quadratique $F \to F'$ définie de la façon suivante:

Un point quelconque F pris dans le plan du triangle XYZ peut être considéré comme un foyer d'une conique inscrite au triangle. Le second foyer réel F' est alors déterminé par le théorème de Poncelet: „Les tangentes menées d'un point X, Y, . . . à une conique sont également inclinées sur les droites joignant ce point aux 2 foyers“. La correspondance $F \to F'$ est quadratique, involutive et en général univoque. Les seules exceptions sont les 3 sommets X, Y et Z du triangle auxquels correspondent tous les points du côté opposé.

A une courbe c de degré n décrite par F correspond une courbe c' de degré $2n$ ayant X, Y et Z pour points multiples d'ordre n. Si c passe p fois par X, q fois par Y et r fois par Z, la courbe c' dégénère en p fois le côté x (opposé à X), q fois y, r fois z et une courbe d'ordre $2n-(p+q+r)$.

En particulier, à la droite à l'infini du plan correspond le cercle k circonscrit au triangle XYZ. Soit O son centre. Considérons un autre cercle c de centre O; une tangente t à ce cercle c coupe k en 2 points F et G auxquels correspondent des points à l'infini F' et G' tels que l'angle FXG soit égal à $F'XG'$ d'après le théorème de Poncelet.

A la droite t correspond une conique t' dont les asymptotes ont les directions F' et G'. Quand la tangente t au cercle c varie, les coniques t' restent semblables entre elles, puisque leurs directions asymptotiques font toujours le même angle égal à FXG.

Ces coniques semblables enveloppent la courbe du 4^{me} degré c' qui correspond au cercle c; elle est unicursale, puisqu'elle a 3 points doubles X, Y et Z. (1^o.)

Soient C le point de contact du cercle c avec sa tangente t, I le point à l'infini de t; leurs correspondants sont respectivement le point de contact C' de la conique t' avec l'enveloppe c' et le point I' sur le cercle k. Or le rapport harmonique $(ICFG)$ est conservé par la transformation quadratique, et le conjugué harmonique I' de C' par rapport aux 2 points à l'infini F' et G' sur la conique t' est diamétralement opposé à C'. (2^o.)

Pour démontrer la troisième partie, il suffit de remarquer qu'à une droite quelconque passant par O correspond une hyperbole équilatère circonscrite à XYZ, puisque cette droite coupe le cercle k en 2 points M et N dont les correspondants M' et N' à l'infini donnent les directions asymptotiques de l'hyperbole et que l'angle $M'XN'$ est égal à l'angle droit MXN. Les points de contact C et D des 2 tangentes t et s menées du point à l'infini I au cercle c sont alignés sur O; donc les 2 coniques semblables t' et s' passant par le point I' du cercle k touchent l'enveloppe c' en des points C' et D' de l'hyperbole équilatère (circonscrite à XYZ) qui correspond au diamètre COD.

Ainsi, aux familles de coniques semblables de Steiner correspondent les séries de tangentes à des cercles concentriques.

Il y a 2 cas exceptionnels où la courbe enveloppe n'est pas du 4^{me} degré: les paraboles ont pour enveloppe la droite à l'infini et les hyperboles équilatères circonscrite à XYZ se coupent encore à l'orthocentre O' du triangle XYZ; c'est ce point O' qui est leur enveloppe.

(Reçu le 29 août 1936.)