Ein Satz über beschränkte endlichvieldeutige analytische Funktionen.

Autor(en): **Selberg, Henrik L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10172

Ein Satz über beschränkte endlichvieldeutige analytische Funktionen

Von Henrik L. Selberg, Oslo

Sei $\mathfrak{X}$ eine Riemannsche Fläche, welche über dem Einheitskreis $|x| < 1$ mit überall der gleichen endlichen Blätteranzahl und unendlich vielen Windungspunkten ausgebreitet liegt. Daß auf $\mathfrak{X}$ eindeutige beschränkte analytische Funktionen existieren, ist trivial. Kommen aber unter diesen Funktionen auch welche vor, die nicht in verschiedenen Blättern von $\mathfrak{X}$ identisch gleiche Werte annehmen? Darüber wollen wir im folgenden den Satz beweisen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer auf $\mathfrak{X}$ eindeutigen beschränkten analytischen Funktion, die in keinen zwei verschiedenen Blättern von $\mathfrak{X}$ identisch gleiche Werte annimmt, besteht in der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - |\alpha_\nu|) \tag{1}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Werte bezeichnen, über welche die Windungspunkte von $\mathfrak{X}$ liegen.

Ich erinnere zunächst an einige Begriffe aus der Theorie der endlichvieldeutigen analytischen Funktionen.

Sei $f(x)$ eine analytische Funktion, die auf $\mathfrak{X}$ eindeutig aber nicht notwendig beschränkt ist und außerdem nicht in verschiedenen Blättern von $\mathfrak{X}$ identisch gleiche Werte annimmt. Die Blätteranzahl von $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir mit k, mit $\Gamma(r)$ bezeichnen wir die Projektion des Kreises $|x| = r$ auf $\mathfrak{X}$.

Die charakteristische Funktion $T(\mathrm{r}, f)$ von $f(x)$ ist definiert durch

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f),$$

wo

$$m(r, f) = \frac{1}{2k\pi} \int_{\Gamma(r)} \overset{+}{\log} |f(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta$$

$$N(r, f) = \frac{1}{k} \int_0^r \Big[n(t, f) - n(0, f) \Big] \frac{dt}{t} + \frac{n(0, f)}{k} \log r ,$$

dabei bezeichnet $n(r,f)$ die unter Berücksichtigung der Multiplizität bestimmte Anzahl der ∞-Stellen von $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq r$. Sei ferner $n(r,\mathfrak{X})$ die Anzahl der Windungspunkte von $\mathfrak{X}$ im Kreise $|x| \leqq r$, wobei ein Windungspunkt, wo λ Blätter zusammenhängen, $(\lambda - 1)$-fach zu rechnen ist. Setzt man

$$N(r,\mathfrak{X}) = \frac{1}{k}\int_0^r \Big[n(t,\mathfrak{X}) - n(0,\mathfrak{X})\Big]\frac{dt}{t} + \frac{n(0,\mathfrak{X})}{k}\log r,$$

so besteht, wie man in der Lehre von den endlichvieldeutigen analytischen Funktionen beweist[1]), die Ungleichung

$$N(r,\mathfrak{X}) < (2k-2)\,T(r,f) + O(1)\,.$$

Soll $f(x)$ beschränkt sein, so muß zufolge dieser Ungleichung $N(r,\mathfrak{X})$ für $r \to 1$ beschränkt sein. Da die Reihe (1) dann und nur dann konvergiert, wenn $N(r,\mathfrak{X})$ für $r \to 1$ beschränkt ist, so ist hiermit die Notwendigkeit der Konvergenz von (1) bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß die Reihe (1) konvergiert, und wollen dann zeigen, daß auf $\mathfrak{X}$ eine eindeutige beschränkte analytische Funktion existiert, die nicht identisch gleiche Werte in verschiedenen Blättern von $\mathfrak{X}$ annimmt. Da die Konvergenz der Reihe (1) bei jeder linearen Transformation erhalten bleibt, welche das Innere des Einheitskreises auf sich selbst abbildet, so ist es keine Einschränkung, wenn wir voraussetzen, daß kein Windungspunkt von $\mathfrak{X}$ über $x=0$ liegt.

Sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver monoton gegen 1 wachsender Zahlen, ξ ein Punkt auf $\mathfrak{X}$, der über $x=0$ liegt. Den im Kreise $|x| < \varrho_\nu$ gelegenen Teil von $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}_\nu$. ϱ_1 soll so groß gewählt werden, daß $\mathfrak{X}_1$ — und damit auch die übrigen $\mathfrak{X}_\nu$ — zusammenhängend ist. Zu jedem Flächenstück $\mathfrak{X}_\nu$ gehört dann eine Greensche Funktion $g_\nu(x,\xi)$, die durch folgende Eigenschaften bestimmt ist: $g_\nu(x,\xi)$ ist eindeutig und harmonisch auf $\mathfrak{X}_\nu$ außer im Punkte ξ und unterscheidet sich von $\log\frac{1}{|x|}$ um eine in ξ harmonische Funktion; am Rande von $\mathfrak{X}_\nu$ ist $g_\nu(x,\xi) = 0$. Nach dem Prinzip des Maximums gilt auf $\mathfrak{X}$

$$g_\nu(x,\xi) < \log\frac{\varrho_\nu}{|x|}\,. \qquad (2)$$

[1]) *E. Ullrich*, Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 167, S. 210.

Da die Folge $g_\nu(x, \xi)$ monoton wachsend ist, so folgt hieraus, daß die Grenzfunktion

$$g(x, \xi) = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu(x, \xi)$$

existiert. $g(x, \xi)$ ist positiv und harmonisch auf $\mathfrak{X}$ außer in ξ und unterscheidet sich von $\log \frac{1}{|x|}$ um eine in ξ harmonische Funktion. Nach (2) ist

$$g(x, \xi) \leqq \log \frac{1}{|x|} . \tag{3}$$

$g(x, \xi)$ muß daher am Rande von $\mathfrak{X}$ verschwinden; die Niveaulinien von $g(x, \xi)$ sind somit geschlossene Kurven.

Ich betrachte jetzt die Ableitung $\varphi'(x)$ von

$$\varphi(x) = g(x, \xi) + i h(x, \xi),$$

wo $h(x, \xi)$ zu $g(x, \xi)$ konjugiert ist. Bezeichnet L_λ die Niveaulinie $g(x, \xi) = \lambda$, $\mathfrak{X}_\varepsilon^\lambda$ das Teilstück von $\mathfrak{X}$, das von L_λ und L_ε, $0 \leqq \varepsilon < \lambda$, begrenzt wird, so ist für $\varepsilon > 0$ infolge einer bekannten Transformationsformel

$$\begin{aligned} 2\pi(\lambda - \varepsilon) &= \int_{L_\lambda} g(x, \xi)\, dh(x, \xi) - \int_{L_\varepsilon} g(x, \xi)\, dh(x, \xi) \\ &= \int_{\mathfrak{X}_\varepsilon^\lambda} |\varphi'(x)|^2 d\omega , \end{aligned}$$

wo $d\omega$ das Flächenelement bedeutet, und die Integration längs L_λ und L_ε mit wachsendem $h(x, \xi)$ erfolgen soll. Für $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus

$$\int_{\mathfrak{X}_0^\lambda} |\varphi'(x)|^2 d\omega = 2\pi\lambda .$$

Da $\mathfrak{X}_0^\lambda$ wegen (3) für $\lambda = \log \frac{1}{r}$, $0 < r < 1$, den Kreisring $r < |x| < 1$ von $\mathfrak{X}$ umfaßt, so folgt hieraus, indem $\Gamma(r)$ wie früher die Projektion von $|x| = r$ auf $\mathfrak{X}$ bezeichnet,

$$\int_r^1 dt \int_{\Gamma(t)} |\varphi'(te^{i\vartheta})|^2 t\, d\vartheta \leqq 2\pi \log \frac{1}{r} = 2\pi \int_r^1 \frac{dt}{t} .$$

Es gibt demnach eine unendliche Folge positiver gegen 1 wachsender Zahlen $r_1, r_2 \ldots$, für welche

$$\frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r_\nu)} |\varphi'(r_\nu e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \leqq \frac{1}{kr_\nu^2}$$

und somit

$$\frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r_\nu)} \{1 + |\varphi'(r_\nu e^{i\vartheta})|^2\} d\vartheta \leqq 1 + \frac{1}{kr_\nu^2} \; .$$

Auf die linke Seite der letzten Ungleichung wenden wir die Integralungleichung an

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \log \psi(\tau)\, d\tau \leqq \log\left\{\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \psi(\tau)\, d\tau\right\} ,$$

die für jede im Intervalle α, β nichtnegative integrable Funktion $\psi(\tau)$ gültig ist, und erhalten wegen

$$\overset{+}{\log}\; \Theta \leqq \frac{1}{2}\log(1+\Theta^2)\,, \quad \Theta \geqq 0$$

die Abschätzung

$$m(r_\nu, \varphi') = \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r_\nu)} \overset{+}{\log}\, |\varphi'(r_\nu e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \frac{1}{2}\log\left\{1 + \frac{1}{kr_\nu^2}\right\} . \qquad (4)$$

Im Punkte ξ hat φ' einen einfachen Pol; die übrigen ∞-Stellen von φ' müssen alle in den Windungspunkten von $\mathfrak{X}$ liegen, und zwar kann ein Windungspunkt, wo λ Blätter zusammenhängen, höchstens ∞-Stelle von der Multiplizität $\lambda - 1$ sein. Daher ist $N(r, \psi') \leqq N(r, \mathfrak{X})$ und somit $N(r, \varphi') = O(1)$, da wir doch die Konvergenz von (1) vorausgesetzt haben, weshalb $N(r, \mathfrak{X}) = O(1)$ ist. Zusammen mit (4) gibt dies, da $T(r, \varphi') = m(r, \varphi') + N(r, \varphi')$ mit wachsendem r nicht abnimmt[2]),

$$T(r, \varphi') = O(1)\,.$$

Es handelt sich jetzt darum, aus φ' eine Funktion zu konstruieren, die nicht nur eine beschränkte charakteristische Funktion hat, sondern auch selbst beschränkt ist. Dazu multiplizieren wir φ' mit dem Blaschkeprodukt

---

[2]) Der Nevanlinnasche Satz von der Monotonie der charakteristischen Funktion gilt auch für endlichvieldeutige analytische Funktionen, vgl. *H. Selberg*, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo. I. Matem.-Naturvid. Kl. 1934, No. 8, S. 10.

$$B(x) = x \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_\nu}{|\alpha_\nu|} \frac{\alpha_\nu - x}{1 - \bar{\alpha}_\nu x},$$

wodurch wir die ∞-Stellen los werden. Da $|B(x)| < 1$, $|x| < 1$, muß die charakteristische Funktion $T(r, \Phi)$ von $\Phi(x) = B(x)\,\varphi'(x)$ beschränkt sein, d.h.

$$m(r, \Phi) = O(1) . \tag{5}$$

Sei nun $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine gegen 1 wachsende Folge positiver Zahlen. Sei ferner $u(x)$ das Maximum von $\overset{+}{\log} |\Phi_\nu(x)|$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, indem $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$ die zu den k-Blättern von $\mathfrak{X}$ gehörenden Zweigen von Φ bedeuten. Setzt man

$$\Psi_\nu(x) = exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varrho_\nu e^{i\vartheta}) \frac{\varrho_\nu e^{i\vartheta} + x}{\varrho_\nu e^{i\vartheta} - x}\, d\vartheta\right\},$$

$$f_\nu(x) = \Phi(x)\, \Psi_\nu(x) ,$$

so ist $|f_\nu(x)| \leqq 1$ für $|x| \leqq \varrho_\nu$; denn für $|x| = \varrho_\nu$ ist $|\Phi(x)\Psi_\nu(x)| \leqq 1$. Aus der Folge $f_1, f_2, \ldots$ kann daher eine Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ extrahiert werden, die in jedem Kreis $|x| < \varrho$, $\varrho < 1$, gleichmäßig gegen eine auf $\mathfrak{X}$ beschränkte eindeutige analytische Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert. $f(x)$ kann nicht in zwei verschiedenen Blättern von $\mathfrak{X}$ identisch gleiche Werte annehmen. Denn in ξ hat $\Phi(x)$ einen endlichen Wert $\neq 0$, während $\Phi(x)$ in den übrigen über $x = 0$ gelegenen Punkten von $\mathfrak{X}$ verschwindet. Ebenso mit $f(x)$; denn man hat

$$\left|\Psi_\nu(0)\right| = exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varrho_\nu e^{i\vartheta})\, d\vartheta\right\} \geqq e^{-k m(\varrho_\nu, \Phi)}$$

und somit nach (5)

$$\varliminf_{\nu \to \infty} |\Psi_\nu(0)| > 0 ,$$

während anderseits zufolge der Konstruktion von Ψ_ν die Ungleichung $|\Psi_\nu(0)| \leqq 1$ gilt. Unser Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

(Eingegangen den 9. August 1936.)