Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern.

Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern

Von Max Gut, Zürich

1. *Bezeichnungen, Definitionen, Inhaltsangabe.* — Es bedeute in dieser Arbeit k immer einen algebraischen Zahlkörper von unendlich hohem Grade und $\underset{(0)}{k}$ den Körper der rationalen Zahlen. Da k aus abzählbar unendlich vielen Zahlen besteht, kann man immer eine Folge von voneinander verschiedenen algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades $\underset{(0)}{k}, \underset{(1)}{k}, \underset{(2)}{k}, \cdots, \underset{(i)}{k}, \cdots$ angeben, von denen jeder den vorangehenden enthält, und deren Kompositum k ist: $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$. Für vorgegebenes k ist die definierende Körperfolge $\underset{(i)}{k}$ natürlich nicht eindeutig bestimmt, aber dies macht, wie man auf Grund einer Arbeit von E. Stiemke[1]) oder direkt erkennt, für die folgenden Untersuchungen nichts aus, und man kann sich eine feste Körperfolge in willkürlicher Weise ein für allemal herausgegriffen denken.

Unter der kurzen Bezeichnungsweise: „Ideal in einem Körper" soll immer ein Ideal im Ring der ganzen Zahlen des betreffenden algebraischen Zahlkörpers verstanden werden; ein Primideal ist ein solches, dessen Restklassenring nicht nur aus der Null besteht und außer der Null keine Nullteiler hat. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale in einem Körper, so verstehen wir unter ihrem Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Gesamtheit aller endlichen Summen

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r \ , \quad r = 1, 2, 3, \cdots ,$$

wo die a_i Größen aus $\mathfrak{a}$, die b_i Größen aus $\mathfrak{b}$ sind. Gibt es eine nicht negative ganze rationale Zahl s, so daß $\mathfrak{a}^s$ ein Teiler des Ideals $\mathfrak{i}$ (im mengentheoretischen Sinne!) ist:

$$\mathfrak{a}^s \supseteqq \mathfrak{i} \ ,$$

während $\mathfrak{a}^{s+1}$ nicht mehr Teiler ist von $\mathfrak{i}$, so sagen wir, daß das Ideal $\mathfrak{a}^s$ *der Beitrag von $\mathfrak{a}$ an das Ideal $\mathfrak{i}$* sei.

[1]) *Stiemke, Erich:* Über unendliche algebraische Zahlkörper. Math. Zeitschrift, Bd. 25 (1926), S. 9—39.

Den Durchschnitt von zwei Ringen $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ (Gesamtheit aller Zahlen, die sowohl $\mathfrak{r}_1$ wie $\mathfrak{r}_2$ angehören) bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}_1 \frown \mathfrak{r}_2$.

Es möge im folgenden K immer irgend eine Erweiterung endlichen Grades von k bedeuten. Weil k die Charakteristik Null hat, so gilt der Satz vom primitiven Element, und man kann also K aus k gewinnen durch Adjunktion einer geeignet gewählten algebraischen Zahl Θ, die man auch immer als ganz voraussetzen darf: $K = k(\Theta)$. Ist K vom Relativgrade n in bezug auf k, und ist Ω irgend eine Zahl von K, so bezeichnen wir mit

$$\Omega^{(1)} = \Omega\,, \quad \Omega^{(2)}\,, \ldots \Omega^{(n)}\,,$$

die zu Ω in bezug auf k relativ-konjugierten Größen. Die ganzen Zahlen von K besitzen nach Stiemke[2]) eine Basis mit abzählbar unendlich vielen Basisgrößen:

$$\Omega_1\,, \quad \Omega_2\,, \quad \Omega_3\,, \quad \cdots \text{ ad inf.}$$

Definiert man dann die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ von K in bezug auf k als das Produkt der $n - 1$ Elemente

$$\mathfrak{E}^{(s)} = (\Omega_1 - \Omega_1^{(s)}, \Omega_2 - \Omega_2^{(s)}, \Omega_3 - \Omega_3^{(s)}, \ldots \text{ ad inf.}), \ s = 2, 3, \ldots, n\,,$$

also

$$\mathfrak{D} = \prod_{s=2}^{n} \mathfrak{E}^{(s)}\,, \tag{1}$$

so zeigen wir zunächst im Abschnitt 2, daß $\mathfrak{D}$ der größte gemeinschaftliche Teiler der Relativdifferenten aller ganzen Zahlen von K ist.

Es bedeute ferner p immer eine rationale Primzahl und

$$\underset{(0)}{\mathfrak{p}} = p\,, \ \underset{(1)}{\mathfrak{p}}\,, \ \underset{(2)}{\mathfrak{p}}\,, \ \ldots\,, \ \underset{(i)}{\mathfrak{p}}\,, \ \ldots$$

eine Folge von Primidealen bezw. aus $\underset{(0)}{k}, \underset{(1)}{k}, \underset{(2)}{k}, \cdots, \underset{(i)}{k}, \cdots$, wobei jedes Ideal der Folge das vorangehende enthält. Dann ist der größte gemeinsame Teiler (die Summe) aller dieser Ideale ein bestimmtes Primideal $\mathfrak{p}$ von k:

$$\mathfrak{p} = (\underset{(0)}{\mathfrak{p}}\,, \ \underset{(1)}{\mathfrak{p}}\,, \ \underset{(2)}{\mathfrak{p}}\,, \ \ldots\,, \ \underset{(i)}{\mathfrak{p}}\,, \ \ldots) = \lim_{i=\infty} \underset{(i)}{\mathfrak{p}}\,.$$

Umgekehrt gehört zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von k eine solche eindeutig bestimmte Folge von Primidealen

$$\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \frown \underset{(i)}{k}\,.$$

---

[2]) *Stiemke, E.*, l. c. S. 15, Satz IV.

Bedeuten $e_{(i)}$ und $f_{(i)}$ die absolute Ordnung, bezw. den absoluten Grad des Primideales $\mathfrak{p}_{(i)}$ von $k_{(i)}$, so ist jede dieser beiden natürlichen Zahlen mit wachsendem i monoton nicht abnehmend. Sind diese beiden Größen mit wachsendem i beschränkt und

$$\lim_{i=\infty} e_{(i)} = e \quad , \quad \lim_{i=\infty} f_{(i)} = f \; ,$$

so sind e und f die absolute Ordnung, bezw. der absolute Grad von $\mathfrak{p}$.

Es gibt Körper k von unendlich hohem Grade mit der Eigenschaft, daß für jedes festgehaltene Primideal $\mathfrak{p}$ von k die Werte $e_{(i)}$ und $f_{(i)}$ mit wachsendem i beschränkt bleiben, d. h. also mit der Eigenschaft, daß die absolute Ordnung und der absolute Grad für *jedes* Primideal $\mathfrak{p}$ von k *endliche* Größen sind. *In der Folge verstehe man unter k immer einen algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades* ***von diesem Typus,*** *abgesehen vom Abschnitt 2, wo k ein* ***beliebiger*** *algebraischer Zahlkörper von unendlichem Grade sein darf.* Ein Existenzbeweis für solche Körper ergibt sich sofort durch direkte Konstruktion auf Grund eines von H. Hasse[3]) und Ö. Ore[4]) bewiesenen Existenzsatzes über Körpererweiterungen endlichen Grades von gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpern. Man schreibe nämlich die rationalen Primzahlen nach wachsender Größe auf, und es bedeute p_i die i-te Primzahl, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ usf. Wählt man für $i \geqq 0$ allgemein für $k_{(i+1)}$ einen beliebigen Erweiterungskörper endlichen Grades von $k_{(i)}$, der nur der Bedingung genügt, daß *jedes* der endlich vielen Primideale von $k_{(i)}$, welche Teiler einer der Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_i, p_{i+1}$ sind, in $k_{(i+1)}$ in lauter Primideale von der Relativordnung und vom Relativgrad 1 in bezug auf $k_{(i)}$ zerfällt, so ist offenbar $k = \lim_{i=\infty} k_{(i)}$ vom verlangten Typus.

Zu den Körpern k von diesem speziellen Typus gehören wichtige Körper; wir beweisen insbesondere im Abschnitt 6, daß das Kompositum aller absolut zyklischen Körper von einem festen Primzahlgrade ein solcher Körper k ist.

---

[3]) *Hasse, Helmut:* Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper. Math. Ann. Bd. 95 (1926), S. 229—238. Siehe Satz 1 dieser Arbeit auf S. 229.

[4]) *Ore, Öystein:* Über den Zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen und der Idealtheorie in algebraischen Körpern. Erste Mitteilung: Math. Ann. Bd. 96 (1926), S. 313—352; zweite Mitteilung: Math. Ann. Bd. 97 (1927), S. 569—598. Siehe Satz 13 auf S. 349/350 und die Bemerkung auf S. 598, 3. Alinea.

Wir zeigen nun in dieser Arbeit, wie man für solche Körper k unabhängig von der allgemeinen Theorie der Erweiterungen der unendlichen algebraischen Zahlkörper, wie sie Herbrand aufgestellt hat[5]), auf einfachste Weise die Theorie der Erweiterungen von endlichem Grade entwickeln und dabei eine Reihe neuer Sätze gewinnen kann. Es gilt nämlich *mutatis mutandis* die arithmetische Theorie, die Öystein Ore[6]) über Erweiterungen endlichen Grades von gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpern aufgestellt hat. Insbesondere gelten der Zerlegungssatz für die Primideale von k (Abschnitt **3**), der Satz über die Lückenzahlen der relativen Supplementzahlen (Abschnitt **4**), der Existenzsatz über Erweiterungskörper von endlichem Grade, in denen endlich viele Primideale von k vorgeschriebene mögliche Zerlegungen und relative Supplementzahlen haben (Abschnitt **4**), und der schöne Satz über den maximalen Beitrag eines Primideales von k zur Relativdiskriminanten bei festgehaltenem Erweiterungsgrad (Abschnitt **5**). Endlich bleibt das Kriterium über gemeinsame außerwesentliche Relativdiskriminantenteiler erhalten (Abschnitt **5**).

Man beachte, daß jeder Unterkörper unendlichen Grades eines Zahlkörpers von unserem speziellen Typus auch wieder von unserem Typus ist. Ebenso ist jede Erweiterung endlichen Grades eines Zahlkörpers von unserem Typus wieder von unserem Typus. Beides erhellt sofort aus der Definition von k.

Unter einem „Polynom in einem Zahlkörper" verstehen wir ein Polynom, dessen Koeffizienten *ganze* Zahlen dieses Zahlkörpers sind. Ist insbesondere der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1, so heißt das Polynom *normiert*. Mit $D(f)$ bezeichnen wir die Diskriminante des Polynoms $f(x)$.

2. Wir beweisen den *Satz:* Die Relativdifferente einer endlichen Erweiterung irgend eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers ist gleich dem größten gemeinschaftlichen Teiler der Relativdifferenten aller ganzen Zahlen des Erweiterungskörpers.

Es seien in der Tat

$$\Theta_0\,,\ \Theta_1\,,\ \Theta_2\,,\ \ldots \tag{2}$$

die abzählbar unendlich vielen voneinander verschiedenen, K in bezug

[5]) *Herbrand, Jacques:* Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini: I. Extensions algébriques finies de corps infinis. Math. Ann. Bd. 106 (1932), S. 473—501, II. Extensions algébriques de degré infini. Math. Ann. Bd. 108 (1933), S. 699—717.

[6]) Vgl. die in Anmerkung 4 angegebenen Arbeiten.

auf $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$ relativ-definierenden ganzen Körperzahlen von K. Für $l = 0, 1, 2, \cdots$ bezeichne $f_l(x)$ das normierte, in k irreduzible Polynom von k vom Grade n, das die Nullstelle Θ_l besitzt. Es ist zu zeigen, daß das von den Größen $f_l'(\Theta_l)$ erzeugte Ideal von K:

$$\mathfrak{D}^* = \left(f_0'(\Theta_0)\,,\ f_1'(\Theta_1)\,,\ f_2'(\Theta_2)\,,\ \ldots \text{ ad inf.}\right) \tag{3}$$

gleich dem in Formel (1) definierten Ideal $\mathfrak{D}$ ist.

Für jedes festgehaltene l gibt es in der Folge $\underset{(0)}{k}, \underset{(1)}{k}, \underset{(2)}{k}, \cdots, \underset{(i)}{k}, \cdots$ einen ersten Körper, etwa mit dem Index i_l, so daß $f_l(x)$ ein Polynom in diesem Körper ist. Es sei I die kleinste unter allen Zahlen i_l. Wir dürfen annehmen, daß in (2) die Numerierung der Θ_l so getroffen wurde, daß $f_0(x)$ seine Koeffizienten in $\underset{(I)}{k}$ hat. Wir schreiben dann kürzer Θ statt Θ_0 und $f(x)$ statt $f_0(x)$. *Im folgenden sei immer* $i \geqq I$. Dann ist jedenfalls, da $f(x)$ a fortiori irreduzibel in $\underset{(i)}{k}$ ist, für alle Indices i der Körper $\underset{(i)}{K} = \underset{(i)}{k}(\Theta)$ ein Erweiterungskörper n-ten Grades von $\underset{(i)}{k}$, ferner $\underset{(i)}{K} \subset \underset{(i+1)}{K}$ und $K = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{K} = k(\Theta)$.

Es habe für jeden Index i der Körper $\underset{(i)}{K}$ den absoluten Grad N_i, und die Größen $\underset{(i)}{\Omega_1}, \underset{(i)}{\Omega_2}, \cdots, \underset{(i)}{\Omega_{N_i}}$ seien eine Basis für die ganzen Körperzahlen von $\underset{(i)}{K}$. Die Ideale

$$\underset{(i)}{\mathfrak{E}}{}^{(s)} = \left(\underset{(i)}{\Omega_1} - \underset{(i)}{\Omega_1^{(s)}},\ \underset{(i)}{\Omega_2} - \underset{(i)}{\Omega_2^{(s)}},\ \ldots,\ \underset{(i)}{\Omega_{N_i}} - \underset{(i)}{\Omega_{N_i}^{(s)}}\right),\quad s = 2\,, 3\,, \ldots\,, n\,,$$

sind die n—1 Elemente der Erweiterung $\underset{(i)}{k}(\Theta)$ und das Ideal von $\underset{(i)}{K}$:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{D}} = \prod_{s=2}^{n} \underset{(i)}{\mathfrak{E}}{}^{(s)}$$

ist die Relativdifferente von $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$. Es ist klar, daß $\underset{(i)}{\mathfrak{D}} \subset \underset{(i+1)}{\mathfrak{D}}$, und das Ideal von K:

$$\left(\underset{(I)}{\mathfrak{D}}\,,\ \underset{(I+1)}{\mathfrak{D}}\,,\ \underset{(I+2)}{\mathfrak{D}}\,,\ \ldots \text{ ad inf.}\right) = \lim_{i=\infty} \underset{(i)}{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \tag{4}$$

ist, gemäß Definition (1).

Ist für einen festgehaltenen Index i die Größe H irgend eine $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ bestimmende ganze Zahl, dann ist H von der Form:

$$H = \beta_0 + \beta_1 \Theta + \beta_2 \Theta^2 + \cdots + \beta_{n-1} \Theta^{n-1} \,,$$

wo die (nicht notwendigerweise ganzen) Zahlen $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-1}$ in $\underset{(i)}{k}$ liegen, und die ganzen algebraischen Zahlen

$$H^{(s)} = \beta_0 + \beta_1 \Theta^{(s)} + \beta_2 \Theta^{(s)2} + \cdots + \beta_{n-1} \Theta^{(s)n-1} \,, \quad s = 1, 2, \cdots, n, \tag{5}$$

sind alle voneinander verschieden. Das normierte Polynom n-ten Grades, welches die n Größen (5) als Nullstellen hat, ist nicht nur irreduzibel in $\underset{(i)}{k}$, sondern auch in k. Denn wäre es reduzibel in k, so könnten die Größen (5) nach bekannter Schlußweise nicht voneinander verschieden sein. Es ist mithin H gleich einer der Größen (2). Da $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$ gleich dem größten gemeinschaftlichen Teiler der Relativdifferenten (von $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$) aller ganzen Zahlen von $\underset{(i)}{K}$ ist, ist folglich eine festgehaltene Größe von $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$ eine endliche Summe von Produkten von der Form $\Gamma_l \cdot f_l'(\Theta_l)$, wo Γ_l eine ganze Zahl von $\underset{(i)}{K}$ ist, und Θ_l eine in $\underset{(i)}{K}$ enthaltene Zahl von den Zahlen (2) ist, also gemäß (3)

$$\underset{(i)}{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}^* \,.$$

Da nach (4) jede festgehaltene Größe von $\mathfrak{D}$ für genügend großes i in einem $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$ liegt, folgt

$$\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{D}^* \,. \tag{6}$$

Hält man anderseits den Index l aus der Reihe $l = 0, 1, 2, \cdots$ fest, so liegt die Größe $f_l'(\Theta_l)$ für genügend großes i immer in $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$. Irgend eine festgehaltene Größe des Ideals $\mathfrak{D}^*$ liegt mithin für genügend großes i immer in $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$, also nach (4) auch in $\mathfrak{D}$. Daraus folgt

$$\mathfrak{D}^* \subseteqq \mathfrak{D} \,. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich die Behauptung.

3. Es gilt folgender *Zerlegungssatz:* Es sei $f(x)$ ein normiertes irreduzibles Polynom n-ten Grades eines Körpers k und $K = k(\Theta)$ ein Erweiterungskörper von k, der aus k durch Adjunktion einer beliebigen Nullstelle Θ von $f(x)$ entsteht. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von k, so ergibt sich seine Zerlegung in K so: Es sei $\mathfrak{p}^{\delta}$ der Beitrag von $\mathfrak{p}$ zu $D(f)$, dann zerlege man zunächst $f(x)$ für beliebiges $\alpha > \delta$ in mod. $\mathfrak{p}^{\alpha}$ irreduzible, normierte Polynome von k:

$$f(x) \equiv f_1(x)\, f_2(x) \;\cdots\; f_r(x) \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha}) \; . \tag{8}$$

Hat hier ein Faktor $f_t(x)$, wo $t = 1, 2, \cdots, r$, den Grad N_t in x, so adjungiere man zu k alle Nullstellen $y_1, y_2, \cdots, y_{N_t}$ eines beliebigen normierten Primpolynoms mod. $\mathfrak{p}$ von k vom Grade N_t in y, das mit $\varphi_t(y)$ bezeichnet werden möge. Es sei $\mathfrak{p}^{\delta_t}$ der Beitrag von $\mathfrak{p}$ an $D(f_t)$ und $\alpha_t > 2\delta_t$. Dann zerfällt $f_t(x)$ $\bigl(\text{modd. } \mathfrak{p}^{\alpha_t}, \varphi_t(y)\bigr)$ in diesem erweiterten Bereich in nach diesem Modul irreduzible, normierte Faktoren von einem gleichen Grade in x, so daß falls E_t dieser gemeinschaftliche Grad und F_t die Anzahl dieser Faktoren ist:

$$f_t(x) \equiv f_t(x, y_1)\, f_t(x, y_2) \;\cdots\; f_t(x, y_{F_t}) \quad (\text{modd } \mathfrak{p}^{\alpha_t}, \varphi_t(y)) \; . \tag{9}$$

Dann hat das Primideal $\mathfrak{p}$ in K die Primidealpotenz-Zerlegung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{E_1} \mathfrak{P}_2^{E_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{E_r} \; ; \quad N_{K|k}(\mathfrak{P}_t) = \mathfrak{p}^{F_t} \; , \quad t = 1, 2, \ldots, r \; . \tag{10}$$

Hiebei bedeutet die Norm, wie immer, das Produkt der n zu $\mathfrak{P}_t$ in bezug auf k relativ-konjugierten Primideale, und sie ist ein Ideal von k.

Beweis: Es sei $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$ und $\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \underset{(i)}{k}$. Man bestimme einen Index j, so daß $f(x)$ ein Polynom in $\underset{(j)}{k}$ ist, und für alle $i \geqq j$ das Primideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{p}}$ die Relativordnung und den Relativgrad 1 in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ hat. Im folgenden sei immer $i \geqq j$.

Ist $\underset{(i)}{D}$, bezw. D das von $D(f)$ in $\underset{(i)}{k}$, bezw. in k erzeugte Hauptideal, so ist

$$\underset{(i)}{D} \subset \underset{(i+1)}{D} \quad \text{und} \quad (\underset{(j)}{D}, \underset{(j+1)}{D}, \underset{(j+2)}{D}, \cdots \text{ ad inf.}) = \lim_{j=\infty} \underset{(j)}{D} = D \; .$$

Ist $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\underset{(i)}{\delta}}$ der Beitrag von $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}$ zu $\underset{(i)}{D}$, so ist $\underset{(i)}{\delta}$ unabhängig von i und

$$\underset{(i)}{D} \subseteqq \underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\underset{(i)}{\delta}} \quad , \quad \underset{(i)}{D} \nsubseteq \underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\underset{(i)}{\delta}+1} \; .$$

Daraus folgt sofort, daß

$$D \subseteqq \mathfrak{p}^{\underset{(i)}{\delta}} \quad , \quad D \nsubseteq \mathfrak{p}^{\underset{(i)}{\delta}+1} \; .$$

Denn die Annahme $D \subseteqq \overset{\delta+1}{\mathfrak{p}^{(i)}}$ führt wegen

$$\underset{(i)}{D} \subset D \subseteqq \overset{\delta+1}{\mathfrak{p}^{(i)}}$$

zu

$$\underset{(i)}{D} \cap \underset{(i)}{k} \subseteqq \overset{\delta+1}{\mathfrak{p}^{(i)}} \cap \underset{(i)}{k}\,,$$

also

$$\underset{(i)}{D} \subseteqq \underset{(i)}{\overset{\delta+1}{\mathfrak{p}^{(i)}}}\,,$$

was ein Widerspruch ist.

Es ist mithin $\delta = \underset{(i)}{\delta}$.

Das Polynom $f(x)$ ist a fortiori irreduzibel in $\underset{(i)}{k}$, und die analogen mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha}$, bezw. modd. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha_t}$, $\varphi_t(y)$ irreduzibeln Zerlegungen (8) und (9) *im Körper* $\underset{(i)}{k}$ *als Grundkörper* dürfen daher für $i \geqq j$ alle als 1-isomorph angenommen werden, da es die Restklassenringe mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha}$, bezw. modd. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha_t}$, $\varphi_t(y)$ sind[7]. Bedeuten also für $t = 1, 2, \cdots, r$ die Symbole $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ voneinander verschiedene Primideale von $\underset{(i)}{K} = \underset{(i)}{k}(\Theta)$, so ist nach den beiden Hauptsätzen der Ore'schen Theorie[8]:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \underset{(i)}{\mathfrak{P}_1^{E_1}}\, \underset{(i)}{\mathfrak{P}_2^{E_2}} \cdots \underset{(i)}{\mathfrak{P}_r^{E_r}} \quad ; \qquad N_{\underset{(i)}{K} \mid \underset{(i)}{k}}\,(\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}) = \underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{F_t}\,, \tag{11}$$

wo die Werte r, E_t und F_t von i unabhängig sind. Für ein zu $\underset{(i+1)}{\mathfrak{p}}$ teilerfremdes Ideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{q}}$ von $\underset{(i+1)}{k}$ ist daher immer:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \underset{(i+1)}{\mathfrak{p}} \cdot \underset{(i+1)}{\mathfrak{q}} = \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_1^{E_1}}\, \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_2^{E_2}} \cdots \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_r^{E_r}} \cdot \underset{(i+1)}{\mathfrak{q}}\,,$$

wo $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ wie $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ zum Faktor $f_t(x)$ gehört.

Zunächst sieht man in üblicher Weise ein, daß für $t = 1, 2, \ldots, r$

[7]) Dies widerspricht ja der Tatsache nicht, daß bei festgehaltenem Index i die Zerlegungen (8) und (9) in $\underset{(i)}{k}$ als Grundkörper im allgemeinen *nicht eindeutig* sind. Ferner hat natürlich jede festgehaltene Zerlegung (8) und (9) in k als Grundkörper ihre endlich vielen Koeffizienten für genügend großes j in einem Körper $\underset{(j)}{k}$.

[8]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 3, S. 592 und Satz 7, S. 594.

das Primideal $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ von $\underset{(i)}{K}$ und das Primideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ von $\underset{(i+1)}{K}$ dieselbe absolute Ordnung und denselben absoluten Grad haben.

Wir werden jetzt noch zeigen, daß $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ ein Teiler von $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ ist, damit ist dann auch erwiesen, daß $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ den Relativgrad und die Relativordnung 1 in bezug auf $\underset{(i)}{K}$ hat. Ist in Primidealpotenz-Darstellung in $\underset{(i)}{K}$, bezw. in $\underset{(i+1)}{K}$:

$$\big(f_t(\Theta)\,,\ \underset{(i)}{\mathfrak{p}^\alpha}\big) = \underset{(i)}{\mathfrak{P}_1^{u_{t1}}}\,\underset{(i)}{\mathfrak{P}_2^{u_{t2}}}\cdots\underset{(i)}{\mathfrak{P}_r^{u_{tr}}}\ ,$$

$$\big(f_t(\Theta)\,,\ \underset{(i+1)}{\mathfrak{p}^\alpha}\big) = \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_1^{v_{t1}}}\,\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_2^{v_{t2}}}\cdots\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_r^{v_{tr}}}\ ,$$

$$\big(f_t(\Theta)\,,\ \underset{(i+1)}{\mathfrak{q}^\alpha}\big) = \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_{r+1}^{v_{t,r+1}}}\,\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_{r+2}^{v_{t,r+2}}}\cdots\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_{r+w}^{v_{t,r+w}}}\ ,$$

so ist, weil $\underset{(i+1)}{\mathfrak{p}}$ und $\underset{(i+1)}{\mathfrak{q}}$ zueinander teilerfremd sind, die erste dieser drei Größen gleich dem Produkte der zweiten und dritten. Es folgt mithin

$$\underset{(i)}{\mathfrak{P}_1^{u_{t1}}}\,\underset{(i)}{\mathfrak{P}_2^{u_{t2}}}\cdots\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t^{u_{tt}}}\cdots\underset{(i)}{\mathfrak{P}_r^{u_{tr}}} = \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_1^{v_{t1}}}\,\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_2^{v_{t2}}}\cdots\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t^{v_{tt}}}\cdots\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_r^{v_{tr}}}\,\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_{r+1}^{v_{t,r+1}}}\cdots\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_{r+w}^{v_{t,r+w}}}\ .$$

Falls man α genügend groß wählt, werden nach dem Beweise des ersten Hauptsatzes bei Ö. Ore die Exponenten u_{ts} und v_{ts} für $t = s$ beliebig groß, während für $t \neq s$ diese Exponenten von α unabhängige Werte haben, $s = 1, 2, \ldots, r$. Daraus folgt, daß für $s \neq t$:

$$\big(\underset{(i)}{\mathfrak{P}_s}\,,\ \underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}\big) = 1\ .$$

Mithin muß $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ das Primideal $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ teilen.

Ist daher $\mathfrak{P}_t = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$, so folgen wegen $K = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{K}$ aus den Gleichungen (11) durch Grenzübergang zu unendlich großem i die Gleichungen (10).

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes ergibt sich folgender *Existenzsatz:* Es seien

$$E_1\ ,\ E_2\ ,\ \cdots\ ,\ E_r\ ;$$
$$F_1\ ,\ F_2\ ,\ \cdots\ ,\ F_r\ ;$$

zwei beliebig vorgegebene Systeme von natürlichen Zahlen, für welche

$\sum_{t=1}^{r} E_t F_t = n$ ist. Dann kann man immer eine algebraische Erweiterung n-ten Grades K über k so angeben, daß das Primideal $\mathfrak{p}$ die Primidealzerlegung (10) hat.

In der Tat läßt sich der Beweis des analogen Satzes bei Ore[9]) jetzt direkt übertragen, und aus ihm ergibt sich auch, daß man diesen Existenzsatz auf eine beliebige endliche Anzahl von Primidealen $\mathfrak{p}$ von k ausdehnen kann. Im nächsten Abschnitt werden wir eine Verschärfung dieses Existenzsatzes beweisen.

4. In einem Erweiterungskörper K von endlichem Grade in bezug auf $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$ sei $\mathfrak{P}_t$ ein Primideal von der Relativordnung E_t und vom Relativgrad F_t in bezug auf k, und p die rationale Primzahl, die in $\mathfrak{P}_t$ liegt. Es gilt der *Satz:* Ist $\mathfrak{D}$ die Differente von K in bezug auf k, so ist der Beitrag von $\mathfrak{P}_t$ zu $\mathfrak{D}$ von der Form $\mathfrak{P}_t^{E_t - 1 + R_t}$. Die Größe R_t ist die sogenannte relative Supplementzahl von $\mathfrak{P}_t$ in bezug auf k, und zwar ist $R_t = 0$, falls $E_t \not\equiv 0 \pmod{p}$, dagegen eine natürliche Zahl, falls $E_t \equiv 0 \pmod{p}$. Die Zahl R_t kann auf folgende Art bestimmt werden:

Man kann eine K in bezug auf k relativ-bestimmende ganze Zahl so finden, daß der Faktor, der $\mathfrak{P}_t$ in der Zerlegung (8) entspricht, die Form hat:

$$f_t(x) = \varphi_t(x)^{E_t} + \pi M_t(x) \ ,$$

wobei $\varphi_t(x)$ ein normiertes Primpolynom mod. $\mathfrak{p}$ von k vom Grade F_t ist, $M_t(x)$ mod. $\mathfrak{p}$ nicht durch $\varphi_t(x)$ teilbar ist, und π eine Zahl von $\mathfrak{p}$ ist, die nicht in $\mathfrak{p}^2$ liegt[10]). Man schreibe dann $f_t'(x)$ in der Form:

$$f_t'(x) = \sum_{s=0}^{E_t - 1} a_s(x) \ \varphi_t(x)^s \ ,$$

wobei der Grad von $a_s(x)$ kleiner als F_t ist. Ist hier der Beitrag von $\mathfrak{p}$ an das aus den Koeffizienten von $a_s(x)$ gebildete Ideal von k gleich $\mathfrak{p}^{\alpha_s}$, so ist die kleinste unter den Zahlen

$$\alpha_s E_t + s \ , \quad s = 0, 1, 2, \cdots, E_t - 1 \ ,$$

gleich $E_t - 1 + R_t$.

[9]) *Ore, Ö.*, l. c. S. 350.

[10]) An dieser Stelle wird einmal mehr die Voraussetzung benutzt, daß jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von k eine endliche absolute Ordnung hat. In einem allgemeinen unendlichen Körper brauchen natürlich für ein Primideal $\mathfrak{p}$ die Ideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ nicht voneinander verschieden zu sein. Ich verweise auf die instruktive Arbeit von *Deuring, Max:* Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann. Bd. 105 (1931), S. 277—307 oder auf die umfassende Darstellung von *Krull, Wolfgang:* Idealtheorie, Bd. 4 der Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin 1935.

Beweis: Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Abschnitt **3** und bestimmen den Index j wie im Beweise des Zerlegungssatzes. Für $i = j$ kann man auf Grund eines Satzes von Ö. Ore[11]) eine $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ relativ-bestimmende ganze Zahl Θ^* so finden, daß der Faktor, der $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ in der Zerlegung des normierten, irreduzibeln Polynoms $\underset{(i)}{f^*}(x)$ mit der Nullstelle Θ^* in normierte, irreduzible Faktoren mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}^\alpha}$ entspricht, die Form

$$\underset{(i)}{f_t^*}(x) = \varphi_t(x)^{E_t} + \pi M_t(x) \qquad (12)$$

hat. Hier ist $\varphi_t(x)$ ein normiertes Primpolynom mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}$ von $\underset{(i)}{k}$ vom Grade F_t, das Polynom $M_t(x)$ mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}$ nicht durch $\varphi_t(x)$ teilbar, und π eine Zahl von $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}$, die nicht in $\underset{(i)}{\mathfrak{p}^2}$ liegt. Auf Grund der Ausführungen im vorletzten Alinea zu Abschnitt 2 ist dann Θ^* eine K in bezug auf k relativ-definierende Zahl. Wir dürfen analog wie im Abschnitt **3** wieder annehmen, daß für alle $i \geqq j$ die Faktoren (12) wie die Restklassenringe mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}^\alpha}$ alle 1-isomorph sind. Auf Grund zweier Sätze von Ö. Ore[12]) ist für alle $i \geqq j$:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t^{E_t - 1 + R_t}}$$

der Beitrag von $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ zur Relativdifferenten $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$ von $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$, ferner $R_t = 0$, falls $E_t \not\equiv 0$ (mod. p), dagegen $R_t \geqq 1$, falls $E_t \equiv 0$ (mod. p). Für alle $i \geqq j$ ist daher

$$\underset{(i)}{\mathfrak{D}} \subseteqq \underset{(i)}{\mathfrak{P}_t^{E_t - 1 + R_t}}\,, \quad \text{aber } \underset{(i)}{\mathfrak{D}} \not\subseteqq \underset{(i)}{\mathfrak{P}_t^{E_t + R_t}}\,.$$

Mithin ist, weil für $i \geqq j$ das Primideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{P}_t}$ die Relativordnung (und übrigens auch den Relativgrad) 1 in bezug auf $\underset{(i)}{K}$ hat:

$$\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{P}_t^{E_t - 1 + R_t}\,, \quad \text{aber } \mathfrak{D} \not\subseteqq \mathfrak{P}_t^{E_t + R_t}\,,$$

was zu zeigen war.

---

[11]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 8, S. 595.

[12]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 9 und 10, S. 596/597.

Es gilt folgender *Lückensatz für die relativen Supplementzahlen:* Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k von der Ordnung e, ferner p die in $\mathfrak{p}$ liegende rationale Primzahl und $E_t \equiv 0 \pmod{p}$. Es sei p^{S_t} der Beitrag von p an E_t und $E = eE_t$. Dann gibt es immer algebraische Erweiterungen K von einem beliebigen Grade $n \geqq E_t$ über k, so daß eine Zahl R_t mit $1 \leqq R_t \leqq S_tE$ relative Supplementzahl für einen Primidealteiler $\mathfrak{P}_t$ in K von $\mathfrak{p}$ von der Relativordnung E_t ist, außer wenn R_t gleich einer der Zahlen

$$\begin{array}{ccccc}
 & p\;, & 2p\;, & \cdots, & E-p\;, \\
E\;, & E+p^2\;, & E+2p^2\;, & \cdots, & 2E-p^2\;, \\
2E\;, & 2E+p^3\;, & 2E+2p^3\;, & \cdots, & 3E-p^3\;, \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
(S_t-1)E\;, & (S_t-1)E+p^{S_t}\;, & (S_t-1)E+2p^{S_t}\;, & \cdots, & S_tE-p^{S_t},
\end{array}$$

ist, und für diese Lückenzahlen gibt es keine solchen Erweiterungen.

Beweis: Es sei zunächst R_t keine Lückenzahl. Der Index j sei so fixiert, daß für $i \geqq j$ das Primideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{p}}$ die Relativordnung und den Relativgrad 1 in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ hat. Auf Grund des Lückensatzes bei Ö. Ore[13]) kann man für ein festgehaltenes $i \geqq j$ immer einen Körper $\underset{(i)}{K}$ über $\underset{(i)}{k}$ festlegen, indem man zu $\underset{(i)}{k}$ die Nullstelle Θ eines geeignet gewählten normierten, in $\underset{(i)}{k}$ irreduzibeln Polynoms $f(x)$ vom n-ten Grade adjungiert, so daß R_t relative Supplementzahl für einen Primidealteiler $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ in $\underset{(i)}{K}$ von $\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \frown \underset{(i)}{k}$ ist, wobei $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ die Relativordnung E_t in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ hat. Man darf ferner voraussetzen, daß der $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ entsprechende Faktor bei der Polynomzerlegung mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha}$ die Form (12) hat[14]).

Ist $f(x)$ auch irreduzibel in k, dann hat auf Grund des vorangehenden Beweises der Körper $K = k(\Theta)$ die verlangten Eigenschaften.

Ist $f(x)$ reduzibel in k, so sei $\mathfrak{p}^{\delta}$ der Beitrag von $\mathfrak{p}$ an $D(f)$ und $\alpha > \delta$. Es sei q eine von p verschiedene Primzahl und $\mathfrak{q}$ ein Primidealteiler in k von q, ferner l ein Index, so daß für alle $i \geqq l$ das Primideal $\underset{(i+1)}{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \frown \underset{(i+1)}{k}$

---

[13]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 13, S. 598, vgl. dazu auch Satz 11, S. 348.

[14]) Vgl. *Ore, Ö.*, l. c. Beweis zu Satz 11, S. 348/349.

von $\underset{(i+1)}{k}$ die Relativordnung und den Relativgrad 1 in bezug auf $\underset{(i)}{k}$ hat. Es sei im folgenden i beliebig, aber größer als j und größer als l. Man kann in $\underset{(i)}{k}$ ein Polynom $m(x)$ von kleinerem als dem n-ten Grade bestimmen, so daß das Polynom:

$$g(x) = f(x) + p^{2\alpha} m(x)$$

in bezug auf das Primideal $\underset{(i)}{\mathfrak{q}}$ dem Eisenstein'schen Irreduzibilitätskriterium genügt. Dann ist klar, daß $g(x)$ auch in k irreduzibel ist. Zerlegt man in $\underset{(i)}{k}$ das Polynom $g(x)$ mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{2\alpha}$ in normierte irreduzible Faktoren, so ist auf Grund eines Satzes von Ö. Ore[15]) diese Zerlegung mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha}$ genau dieselbe wie die von $f(x)$. Ist daher H eine Nullstelle von $g(x)$, so ist $K = k(H)$ eine Erweiterung, die alle verlangten Eigenschaften hat.

Nimmt man an, daß eine Lückenzahl L relative Supplementzahl in bezug auf k bei einer Erweiterung K vom n-ten Grade in bezug auf k sein könne, so zeigt man auf Grund des vorangehenden Satzes leicht, daß L auch eine relative Supplementzahl einer Erweiterung $\underset{(i)}{K}$ vom Grade n eines algebraischen Zahlkörpers $\underset{(i)}{k}$ von endlichem Grade wäre. Dies ist ein Widerspruch zum Lückensatz von Ore.

Bemerkung: In gleicher Weise wie eben erkennt man auf Grund des entsprechenden Satzes bei Ö. Ore[16]), daß R_t nie den Wert $S_t E$ übertreffen kann.

Existenzsatz: Es seien

$$\begin{array}{l} E_1\,,\ E_2\,,\ \cdots\ ,\ E_r\ ;\\ F_1\,,\ F_2\,,\ \cdots\ ,\ F_r\ ;\\ R_1\,,\ R_2\,,\ \cdots\ ,\ R_r\ ; \end{array}$$

drei Systeme von natürlichen Zahlen mit $\sum_{t=1}^{r} E_t F_t = n$, und R_t, $t = 1, 2, \cdots, r$, je eine mögliche Supplementzahl zu den Zahlen E_t und e, wo e der absolute Grad eines Primideales $\mathfrak{p}$ von k ist. Dann kann man immer einen solchen Körper n-ten Grades K über k angeben, daß das Primideal $\mathfrak{p}$ in K die Primidealpotenz-Zerlegung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{E_1}\mathfrak{P}_2^{E_2}\dots\mathfrak{P}_r^{E_r}\ ;\ N_{K|k}(\mathfrak{P}_t) = \mathfrak{p}^{F_t}\ ,\quad t = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ r\ ;$$

[15]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 4, S. 592, vgl. dazu auch Satz 5, S. 332.

[16]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 11, S. 597, vgl. auch Satz 10, S. 347.

hat, und ferner für jedes t das Ideal $\mathfrak{P}_t^{E_t-1+R_t}$ der Beitrag von $\mathfrak{P}_t$ an die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ von K in bezug auf k ist.

Beweis: Hat j die gleiche Bedeutung wie im letzten Beweis, so kann man auf Grund des entsprechenden Satzes und seines Beweises bei Ö. Ore[17]) für ein festgehaltenes $i \geqq j$ immer einen Körper $\underset{(i)}{K}$ über $\underset{(i)}{k}$ festlegen, indem man zu $\underset{(i)}{k}$ die Nullstelle Θ eines geeignet gewählten normierten, in $\underset{(i)}{k}$ irreduzibeln Polynoms $f(x)$ vom n-ten Grade adjungiert, so daß für diese Erweiterung das Primideal $\underset{(i)}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \frown \underset{(i)}{k}$ in $\underset{(i)}{K}$ den verlangten Zerlegungstypus und die verlangten Supplementzahlen hat. Man darf ferner voraussetzen, daß für jedes $t = 1, 2, \cdots, r$, der $\underset{(i)}{\mathfrak{P}_t}$ entsprechende Faktor bei der Polynomzerlegung mod. $\underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\alpha}$ die Form (12) hat.

Ist $f(x)$ auch irreduzibel in k, so ist klar, daß die Erweiterung $K = k(\Theta)$ die verlangten Eigenschaften hat. Ist $f(x)$ reduzibel in k, so verfährt man wie beim letzten Beweise.

Es ist klar, daß dieser Existenzsatz auch gilt, falls für endlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ von k je 3 solche mögliche Zahlensysteme vorgeschrieben werden.

5. Ist f der absolute Grad des Primideales $\mathfrak{p}$ von k, so gibt es genau

$$g(m) = \frac{1}{m}\left[p^{mf} - \sum_{q} p^{\frac{m}{q}f} + \sum_{q,q'} p^{\frac{m}{qq'}f} - + \cdots\right]$$

verschiedene normierte Primpolynome mod. $\mathfrak{p}$ vom festen Grade m in x. Hiebei bedeuten $q, q', \cdots$ die voneinander verschiedenen Primteiler von m.

Als *Relativdiskriminante* von K in bezug auf k bezeichne man das Ideal:

$$\Delta = N_{K|k}(\mathfrak{D}) .$$

Definition: Es sei wieder $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k und K eine endliche algebraische Erweiterung von k mit der Relativdiskriminanten Δ. Dann heißt $\mathfrak{p}$ *gemeinsamer außerwesentlicher Relativdiskriminantenteiler* dieser Erweiterung, falls der Beitragsexponent von $\mathfrak{p}$ zu der Diskriminanten *jedes* K in bezug auf k relativ-definierenden, normierten irreduzibeln Polynoms *größer ist,* als der Beitragsexponent von $\mathfrak{p}$ zu Δ.

[17]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 14, S. 351.

Kriterium für gemeinsame außerwesentliche Relativdiskriminantenteiler: Das Primideal $\mathfrak{p}$ von k habe in der endlichen Erweiterung K die Primidealpotenz-Zerlegung:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{E_1}\mathfrak{P}_2^{E_2} \dots \mathfrak{P}_r^{E_r} \quad ; \quad N_{K|k}(\mathfrak{P}_t) = \mathfrak{p}^{F_t} \quad \text{für} \quad t = 1, 2, \dots, r \; .$$

Es durchlaufe F' die voneinander verschiedenen Werte F_t, die in dieser Zerlegung auftreten, und $r(F')$ gebe für einen festen Wert F' die Anzahl der voneinander verschiedenen $\mathfrak{P}_t$ an, die den Relativgrad F' haben. Dann ist $\mathfrak{p}$ und nur dann gemeinsamer außerwesentlicher Relativdiskriminantenteiler der vorgelegten Erweiterung, wenn für wenigstens einen dieser Werte F':

$$r(F') > g(F') \; .$$

Beweis: Es sei die ganze Zahl Θ die Nullstelle eines festgehaltenen, normierten K in bezug auf k definierenden Polynoms $f(x)$. Wir benutzen die Bezeichnungen des Zerlegungssatzes und seines Beweises in Abschnitt **3**, und es bedeute für $i \geqq j$ immer $\underset{(i)}{\mathfrak{D}}$ die Relativdifferente und $\underset{(i)}{\Delta} = N_{\underset{(i)}{K}|\underset{(i)}{k}}(\underset{(i)}{\mathfrak{D}})$ die Relativdiskriminante von $\underset{(i)}{K}$ in bezug auf $\underset{(i)}{k}$.

Aus dem Beweise des Zerlegungssatzes ersehen wir, daß für $i \geqq j$ und $t = 1, 2, \cdots, r$, in verständlicher Bezeichnungsweise immer $\underset{(i)}{E_t} = E_t$, $\underset{(i)}{F_t} = F_t$ und aus dem Beweise des 1. Satzes in Abschnitt **4**, daß $\underset{(i)}{R_t} = R_t$ ist.

Da $\underset{(i)}{\Delta} \subset \underset{(i+1)}{\Delta}$ und $\Delta = (\underset{(j)}{\Delta}, \underset{(j+1)}{\Delta}, \underset{(j+2)}{\Delta}, \dots$ ad inf.) ist, so folgt aus

$$\underset{(i)}{\Delta} \subseteqq \underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\sum\limits_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t)} \quad , \quad \underset{(i)}{\Delta} \nsubseteqq \underset{(i)}{\mathfrak{p}}^{\sum\limits_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t) + 1}$$

in bekannter Schlußweise sofort

$$\Delta \subseteqq \mathfrak{p}^{\sum\limits_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t)} \quad , \quad \Delta \nsubseteqq \mathfrak{p}^{\sum\limits_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t) + 1} \; .$$

Wir sehen also, was wir beim Beweise des folgenden Satzes benutzen werden, daß wenn bei einer Körpererweiterung K von k für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k die drei Zahlensysteme

$$E_1, E_2, \ldots, E_r;$$
$$F_1, F_2, \ldots, F_r;$$
$$R_1, R_2, \ldots, R_r;$$

gelten, so hat der Beitrag von $\mathfrak{p}$ an Δ den Exponenten $\sum_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t)$ wie im Falle eines Grundkörpers von endlichem Grade.

Nach dem Beweise des Zerlegungssatzes in Abschnitt **3** ist ferner für $i \geqq j$:

$$\underset{(i)}{\delta} = \delta .$$

Auf Grund des Kriteriums für gemeinsame außerwesentliche Relativdiskriminantenteiler bei endlichen Körpererweiterungen von algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades[18]) folgt aus der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes sofort:

$$\underset{(i)}{\delta} > \sum_{t=1}^{r} \underset{(i)}{F_t}(\underset{(i)}{E_t} - 1 + \underset{(i)}{R_t}) .$$

Mithin ist

$$\delta > \sum_{t=1}^{r} F_t(E_t - 1 + R_t) , \quad \text{q. e. d.}$$

Satz: Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k von der absoluten Ordnung e und $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl, deren Darstellung im Zahlensystem mit der Grundzahl p

$$n = a_1 p^{\alpha_1} + a_2 p^{\alpha_2} + \cdots + a_\nu p^{\alpha_\nu}; \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\nu \geqq 0;$$
$$1 \leqq a_\mu \leqq p - 1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \cdots, \nu,$$

ist. Betrachtet man dann die Relativdiskriminanten aller existierenden Erweiterungskörper K vom festen Relativgrad n über k, so ist der größte Exponent der Potenz, in der $\mathfrak{p}$ als Beitrag zu einer solchen Relativdiskriminanten auftritt, gleich

$$N(n; p, e) = n - \nu + e \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu a_\mu p^{\alpha_\mu} .$$

Beweis: Es sei K irgend eine Erweiterung vom Grade n, die in bezug auf $\mathfrak{p}$ durch die drei Zahlensysteme

$$E_1, E_2, \ldots, E_r;$$
$$F_1, F_2, \ldots, F_r;$$
$$R_1, R_2, \ldots, R_r;$$

[18]) Vgl. z. B. *Ore, Ö.*, l. c. Bemerkung auf S. 596, 2. Alinea, bezw. den Satz auf S. 339/340

charakterisiert ist, wobei natürlich $\sum_{t=1}^{r} E_t F_t = n$ und für $t = 1, 2, \cdots, r$, die Zahl R_t eine zu E_t und $E = eE_t$ mögliche Supplementzahl ist. Dann ist der Exponent der Potenz, in der $\mathfrak{p}$ als Beitrag zu der Relativdiskriminanten dieser Erweiterung auftritt, gleich $\sum_{t=1}^{r} F_t (E_t - 1 + R_t)$ wie bei einer gleich charakterisierten Erweiterung n-ten Grades eines algebraischen Zahlkörpers von *endlichem* Grade. Auf Grund des Existenzsatzes in Abschnitt 4 und des unserem Satze entsprechenden Satzes bei Ö. Ore[19]) folgt daraus sofort der zu beweisende Satz.

6. Es gelten folgende beiden Sätze:

1. *Satz:* Der Körper, der durch Adjunktion aller absolut quadratischen Körper zu k entsteht, ist ein Körper $\underset{(0)}{k}$ von unserem Typus. Hiebei hat jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von k den Grad $f = 2$ und auch die Ordnung $e = 2$, außer den Primteilern $\mathfrak{p}$ von 2, für welche $e = 4$ ist.

Beweis: Wir bezeichnen mit l_i die i-te *ungerade* Primzahl. Es ist also $l_1 = 3$, $l_2 = 5$, $l_3 = 7$, $l_4 = 11$, usf. Es sei

$$\underset{(1)}{k} = \underset{(0)}{k}(\sqrt{-1}) ,$$

$$\underset{(2)}{k} = \underset{(0)}{k}(\sqrt{-1}\,, \sqrt{2}) ,$$

und für $R \geqq 1$:

$$\underset{(R+2)}{k} = \underset{(0)}{k}\left(\sqrt{-1}\,, \sqrt{2}\,, \sqrt{-3}\,, \sqrt{5}\,, \cdots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_i-1}{2}} l_i}\,, \cdots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R}\right).$$

Es ist klar, daß $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$.

Es sei l_r eine festgehaltene ungerade Primzahl. Der Index s ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß l_s die erste Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, die l_r übertrifft, und für welche das Legendre'sche Symbol

$$\left(\frac{l_s}{l_r}\right) = -1 .$$

[19]) *Ore, Ö.*, l. c. Satz 14, S. 598; vgl. auch *Ore, Ö.:* Existenzbeweise für algebraische Körper mit vorgeschriebenen Eigenschaften. Math. Zeitschrift Bd. 25 (1926), S. 474—489, § 5.

Für eine beliebige Zahl $R > s$ sei

$$m = 2^3 \prod_{i=1}^{R} l_i \,.$$

Der Körper k ist ein Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln $\underset{(0)}{k}\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^{(R+2)}$. In den Formeln von § 5 einer meiner früheren Arbeiten[20]) ist für den Körper $\underset{(R+2)}{k}$:

$$h_0 = 3\,;\; h_1 = h_2 = \cdots = h_R = 1\,;$$
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_R = 2\,.$$

Es bezeichne $\underset{(R+2)}{e}$, bezw. $\underset{(R+2)}{f}$ die Ordnung, bezw. den Grad eines Primideales $\underset{(R+2)}{\mathfrak{p}}$ von $\underset{(R+2)}{k}$, welches die rationale Primzahl p teilt. Man entnimmt den Ausführungen in § 5 der erwähnten Arbeit, daß falls p ungerade und gleich l_r ist, $\underset{(R+2)}{e} = 2$ ist, und $\underset{(R+2)}{f}$ die kleinste natürliche Zahl, für welche die $R + 1$ simultanen Kongruenzen gelten:

$$\underset{(R+2)}{f} \cdot \mathrm{ind}_i\, l_r \equiv 0 \pmod{2}\;,\quad i = 1, 2 \cdots, r-1\,,\; r+1\,, \cdots, R\;;$$
$$\underset{(R+2)}{f} \cdot \mathrm{ind}_*\, l_r \equiv 0 \pmod{2}\;,$$
$$\underset{(R+2)}{f} \cdot \mathrm{ind}_0\, l_r \equiv 0 \pmod{2}\;.$$

Es kann folglich $\underset{(R+2)}{f}$ nur entweder den Wert 1 oder den Wert 2 haben.

Wegen $R > s$ enthält $\underset{(R+2)}{k}$ den Körper $\underset{(0)}{k}(\sqrt{l_s})$, in welchem der Primidealteiler von l_r nach Konstruktion den Grad 2 hat, mithin muß unser $\underset{(R+2)}{f}$ gleich 2 sein.

Ist $p = 2$, so ist $\underset{(R+2)}{e} = 4$ und $\underset{(R+2)}{f}$ die kleinste natürliche Zahl, für welche alle R simultanen Kongruenzen

$$\underset{(R+2)}{f} \cdot \mathrm{ind}_i\, 2 \equiv 0 \pmod{2}\;,\quad i = 1,\, 2, \cdots, R\;;$$

---

[20]) *Gut, Max:* Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers. Comment. Math. Helvet. Bd. 1 (1929), S. 160—226.

gelten. Es kann also auch hier $\underset{(R+2)}{f}$ nur entweder den Wert 1 oder den Wert 2 haben. Wegen $R \geqq 2$ enthält $\underset{(R+2)}{k}$ den Körper $\underset{(0)}{k}(\sqrt{5})$, in welchem der Primidealteiler von 2 den Grad 2 hat. Es ist daher $\underset{(R+2)}{f} = 2$.

Läßt man R über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich unmittelbar der zu beweisende Satz, da von einem gewissen Werte R an die Größen $\underset{(R+2)}{e}$ und $\underset{(R+2)}{f}$ in jedem Falle konstant bleiben.

2. Satz: Der Körper, der durch Adjunktion aller absolut zyklischen Körper von einem festen, ungeraden Primzahlgrade q zu $\underset{(0)}{k}$ entsteht, ist ein Körper k von unserem Typus. Die Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von k derjenigen rationalen Primzahlen, die von q verschieden und $\not\equiv 1 \pmod{q}$ sind, haben die Ordnung $e = 1$, die übrigen die Ordnung $e = q$. Der Grad f jedes Primideales $\mathfrak{p}$ von k ist ein Teiler von q.

Beweis: Man denke sich die abzählbar unendlich vielen Primzahlen, die $\equiv 1 \pmod{q}$ sind, nach wachsender Größe hingeschrieben, und bezeichne die i-te Zahl dieser Folge mit l_{i+1}. Für q schreibe man auch l_1.

Es sei dann $\underset{(1)}{k}$ der Unterkörper vom absoluten Grade q des Körpers der q^2-ten Einheitswurzeln $\underset{(0)}{k}\left(e^{\frac{2\pi i}{q^2}}\right)$.

Für ein festgehaltenes $R \geqq 2$ sei

$$\overline{m} = l_1^2 \cdot \prod_{i=2}^{R} l_i ,$$

und $\underset{(R)}{k}$ folgender Unterkörper vom absoluten Grade q^R des Körpers $\underset{(0)}{k}\left(e^{\frac{2\pi i}{\overline{m}}}\right)$ der $\overline{m}$-ten Einheitswurzeln: $\underset{(R)}{k}$ ist derjenige Ausgangs-Kreiskörper, für welchen in den Formeln von § 5 meiner in Anmerkung 20 zitierten Arbeit:

$$h_1 = 2 , \ h_2 = h_3 = \cdots = h_R = 1 \ ;$$
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_R = q \ ;$$
$$a_1 = 1 , \ a_2 = a_3 = \cdots = a_R = q \ ;$$
$$b_1 = q - 1 , \ b_2 = \frac{l_2 - 1}{q} , \ b_3 = \frac{l_3 - 1}{q} , \cdots , \ b_R = \frac{l_R - 1}{q} .$$

Es ist $k = \lim\limits_{i=\infty} \underset{(i)}{k}$, weil aus der in Anmerkung 20 zitierten Arbeit hervorgeht, daß für genügend großes R jeder absolut-zyklische Körper vom absoluten Grade q Unterkörper eines solchen Ausgangs-Kreiskörpers $\underset{(R)}{k}$ ist.

Mit $\underset{(R)}{e}$, bezw. $\underset{(R)}{f}$ bezeichnen wir die absolute Ordnung, bezw. den absoluten Grad eines Primideales von $\underset{(R)}{k}$. Wir wollen bei festgehaltenem R nur die Primidealzerlegung in $\underset{(R)}{k}$ der Primzahlen $\leqq l_R$ betrachten.

Man sieht ohne weiteres, daß für ein Primideal von $\underset{(R)}{k}$ die Ordnung $\underset{(R)}{e} = q$ oder $\underset{(R)}{e} = 1$ ist, je nachdem es eine der Primzahlen $l_1 = q, l_2, l_3, \cdots, l_R$ teilt oder eine von diesen verschiedene Primzahl $< l_R$.

$\underset{(R)}{f}$ ist bestimmt als die kleinste natürliche Zahl, für die alle Kongruenzen

$$\underset{(R)}{f} \cdot \operatorname{ind}_i l_r \equiv 0 \pmod{q} \ , \ i = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, R,$$

bezw. alle Kongruenzen

$$\underset{(R)}{f} \cdot \operatorname{ind}_i p \equiv 0 \pmod{q} \ , \ i = 1, 2, \cdots, R$$

simultan erfüllt sind, je nachdem das betreffende Primideal von $\underset{(R)}{k}$ die Primzahl l_r teilt oder eine von $l_1, l_2, \cdots, l_R$ verschiedene Primzahl $p < l_R$.

Es ist mithin der Wert von $\underset{(R)}{f}$, und damit auch der Wert von f ein Teiler von q.

(Eingegangen den 18. November 1936.)