Ein Analogon zu einem Nagellschen Satze über kubische diophantische Gleichungen

Von Carl-Erik Lind, Uppsala

In einer soeben erschienenen Arbeit in dieser Zeitschrift hat *T. Nagell* den folgenden Satz bewiesen[1]:

Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω, die weder die Form $27\alpha^6$ noch die Form $-16\alpha^6$ hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - B = y^2 \tag{1}$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω.

Die Gleichung (1) entspricht dem sogenannten *äquianharmonischen* Fall in der Theorie der elliptischen Funktionen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß auch für den *harmonischen* Fall ein analoger Satz gilt.

Zuerst wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω, die nicht die Form $-4\alpha^4$ hat, wo α eine Zahl in Ω ist. Es sei ferner die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2 \tag{2}$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω lösbar. Dann ist auch die Gleichung

$$u^3 + 4Au = v^2 \tag{3}$$

in nicht verschwindenden Zahlen u und v aus Ω lösbar.

Ist nämlich (x, y) eine Lösung der Gleichung (2), so erhält man eine Lösung (u, v) der Gleichung (3) mittels der Gleichungen

[1] *T. Nagell:* Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1936), S. 31.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x^2 - A}{x}, \\ v &= \frac{y(x^2+A)}{x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hier sind u und v von Null verschieden. Denn aus $u = 0$ folgt $x^2 - A = 0$ und also $y = 0$ gegen die Annahme. Aus $v = 0$ ergibt sich wegen $y \neq 0$ $A = -x^2$. Aus (2) folgt dann $-2Ax = y^2$ oder $4A^2x^2 = y^4$ und folglich

$$A = \frac{y^4}{4Ax^2} = -4\left(\frac{y}{2x}\right)^4.$$

Der Voraussetzung zufolge hat aber A nicht diese Form.

Für $A = -4$ besitzt die Gleichung (2) die Lösung (2, 4), während die Gleichung (3) im Körper der rationalen Zahlen keine Lösung in nicht verschwindenden Zahlen hat[2]).

Wird die Transformation (4) auf die Gleichung (3) angewandt, und setzt man

$$x_1 = \frac{u^2 + 4A}{4u},$$

$$y_1 = \frac{v(u^2 - 4A)}{8u^2},$$

so ist (x_1, y_1) eine neue Lösung der Gleichung (2). Es ist ferner $x_1 y_1 \neq 0$, wenn A nicht die Form α^4 hat, wo α eine Zahl in Ω ist.

Der zu dem *Nagell*schen Satze analoge Satz lautet nun:

Satz 2. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω, die nicht die Form α^4 hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Ist dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar, so ist sie es auch nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zu Ω.

---

[2]) Siehe z. B. *A. Hurwitz:* Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 62 (1917), S. 220.

Der Satz gilt nicht für $A = \alpha^4$, denn die Gleichung

$$x^3 - x = y^2$$

hat im Körper der rationalen Zahlen $R(1)$ keine Lösung in nicht verschwindenden Zahlen; in $R(\sqrt{-1})$ hat sie aber die Lösungen $x = \pm \sqrt{-1}$, $y = 1 \mp \sqrt{-1}$.

Beweis: Nach der Voraussetzung hat die Gleichung (2) keine Lösung in Ω, abgesehen von Lösungen mit $xy = 0$. Wir nehmen jetzt an, daß sie in dem durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ entstandenen Körper $\Omega(\sqrt{-1})$ in nicht verschwindenden Zahlen x und y lösbar ist.

Erster Fall: Die Zahl y gehört zu Ω, die Zahl x aber nicht. Es sei $x = a + b\sqrt{-1}$, wo a und b Zahlen aus Ω sind, $b \neq 0$. Dann ist

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} - aA - bA\sqrt{-1} = y^2$$

und folglich

$$3a^2b - b^3 - bA = 0 \quad \text{und} \quad a^3 - 3ab^2 - aA = y^2 .$$

Hieraus folgt aber $b^2 = 3a^2 - A$, mithin

$$-8a^3 + 2aA = y^2 .$$

Hier ist $a \neq 0$, denn aus $a = 0$ folgt $y = 0$. Dann hätte aber die Gleichung (2) die Lösung $(-2a, y)$ in Ω, mit $ay \neq 0$, was gegen die Annahme ist.

Zweiter Fall: Die Zahl x gehört zu Ω, die Zahl y aber nicht. Es sei $y = a + b\sqrt{-1}$, wo a und b Zahlen aus Ω sind, $b \neq 0$. Dann ist

$$x^3 - Ax = a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2 .$$

Hier ist offenbar $a = 0$ und folglich

$$x^3 - Ax = -b^2 .$$

Dann ergibt sich aber, daß die Gleichung (2) gegen die Annahme die Lösung $(-x, b)$ in Ω hat, mit $xb \neq 0$.

Dritter Fall: Weder x noch y gehören zu Ω. Dann können wir setzen

$y = ax + b$, wo a und b Zahlen aus Ω sind, $a \neq 0$. Die Zahl x ist somit Wurzel der Gleichung in z

$$z^3 - (az + b)^2 - Az = 0 \ . \tag{5}$$

Da x vom Relativgrade 2 in bezug auf Ω ist, so muß die Gleichung (5) eine Wurzel z haben, die zu Ω gehört. Dann hat aber die Gleichung (2) die Lösung $(z, az + b)$ in Ω. Wegen der Voraussetzung ist dann entweder $z = 0$ oder $az + b = 0$.

Im Falle $z = 0$ wird $b = 0$ und x ist Wurzel der Gleichung

$$x^2 - a^2 x - A = 0 \ ,$$

woraus

$$x = \frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^4 + 4A} \ .$$

Es besteht somit eine Relation

$$a^4 + 4A = - d^2 \ ,$$

wo d eine von Null verschiedene Zahl in Ω ist.

Setzen wir hier

$$u = - a^2 \ , \quad v = ad \ ,$$

so erfüllen u und v die Gleichung

$$u^3 + 4Au = v^2 \ .$$

Es wäre somit nach Satz 1 auch die Gleichung (2) in nicht verschwindenden Zahlen aus Ω lösbar, was gegen die Annahme ist. Es war ja vorausgesetzt, daß $A \neq \alpha^4$.

Im Falle $az + b = 0, z \neq 0$, setzen wir $z = -\frac{b}{a} = c$, wo c eine Zahl in Ω ist. Offenbar ist dann $A = c^2$ und die Gleichung für x wird

$$x^2 - (a^2 - c)\, x + a^2 c = 0$$

oder

$$x = \frac{1}{2} (a^2 - c) \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - 6a^2 c + c^2} \ .$$

Es besteht somit eine Relation

$$a^4 - 6a^2c + c^2 = -d^2,$$

wo d eine von Null verschiedene Zahl in Ω ist. Setzen wir nun hier

$$x_1 = -\left(\frac{a^2 - c}{2a}\right)^2,$$

$$y_1 = \frac{d(a^4 - c^2)}{8a^3},$$

so ergibt sich wegen $A = c^2$

$$x_1^3 - Ax_1 = y_1^2.$$

Wegen der Voraussetzung über die Gleichung (2) muß dann entweder x_1 oder y_1 Null sein. Aus $x_1 = 0$ oder $y_1 = 0$ folgt aber

$$A = c^2 = a^4$$

gegen die Annahme. Die Gleichung (2) ist somit in $\Omega(\sqrt{-1})$ unlösbar in nicht verschwindenden Zahlen und der Satz 2 ist bewiesen.

(Eingegangen den 18. November 1936.)