

Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen.

Autor(en): **Billing, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10177>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen

Von G. BILLING, Uppsala

In einer vor kurzem publizierten Note in dieser Zeitschrift bewies *T. Nagell* den folgenden Satz¹⁾:

1. Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω , die weder die Form $27 \alpha^6$ noch die Form $-16 \alpha^6$ hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - B = y^2 \quad (1)$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω .

2. Wenn Ω die Zahl $\cos \frac{2\pi}{9}$ nicht enthält, gilt ferner: Es sei die Gleichung (1) für $B = 2^4 \cdot 3^3$ in Zahlen aus Ω unlösbar abgesehen von den Lösungen $x = 12$, $y = \pm 36$. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$, abgesehen von den Lösungen $x^3 = 12^3$, $y = \pm 36$ und $x = 0$, $y = \pm 12 \sqrt{-3}$.

Dieser Satz war als eine Verallgemeinerung des folgenden *Fueter*'schen Satzes entstanden²⁾:

Wenn die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 = 1$$

in einem der beiden Zahlkörper $R(\sqrt{m})$ und $R(\sqrt{-3m})$ in nicht verschwindenden Zahlen ξ und η lösbar ist, dann ist sie auch in dem anderen lösbar.

Dies entspricht dem Nagell'schen Satze für $B = 2^4 \cdot 3^3$ und $\Omega = R(\sqrt{m})$.

C. E. Lind bewies neulich das folgende Analogon zu dem Nagell'schen Resultate³⁾:

¹⁾ *T. Nagell*, Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 9 (1936), S. 31.

²⁾ *R. Fueter*, Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie d. Wiss. Math.-Naturwiss. Klasse*. Jahrg. 1913, 25 Abh.

³⁾ *C. E. Lind*, Ein Analogon zu einem Nagell'schen Satze über kubische diophantische Gleichungen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 9 (1937), S.156.

Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω , die nicht die Form α^4 hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax = y^2$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zu Ω .

Das Ziel dieser Note ist, zu zeigen, wie man die Resultate von Nagell und Lind noch weiter verallgemeinern kann.

Zunächst eine Bemerkung über die allgemeine diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax - B = y^2, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten A und B zu einem beliebig gegebenen Rationalitätsbereich Ω gehören, und wo $4A^3 - 27B^2 \neq 0$ ist. Für die Kurve (2) haben wir die elliptische Parameterdarstellung

$$x = \wp(u), \quad y = \frac{1}{2} \wp'(u).$$

Wir nehmen nun an, daß die diophantische Gleichung (2) nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω besitzt. Dann ist bekanntlich für jede solche Lösung das Argument u mit einer Periode der elliptischen Funktion $\wp(u)$ kommensurabel⁴⁾.

Für den Spezialfall $A = 0$ wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω . Hat dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - B = y^2 \tag{3}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω , so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$.

Beweis: Es sei x, y eine Lösung im Körper $\Omega(\sqrt{-3})$ aber nicht im Körper Ω der Gleichung (3). Dann ist auch x', y' eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$, wenn x' zu x und y' zu y in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert sind. Die Argumente dieser beiden Punkte auf der Kurve (3) seien u und u' . Dann folgt aus den Additionsformeln der Funktionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, daß das Argument $u + u'$ einer Lösung der Gleichung (3) in Ω entspricht.

⁴⁾ Siehe z. B. A. Hurwitz, Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellschaft in Zürich, Bd. 62, 1917.

Wir nehmen jetzt an, daß die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele relativkonjugierte Lösungspaare x, y und x', y' in $\Omega(\sqrt{-3})$ mit den entsprechenden Argumenten u und u' . Weil die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, muß dann $u + u'$ mit einer Periode kommensurabel sein, oder

$$u + u' \equiv \frac{w}{n} \pmod{\omega, \omega_1},$$

wo ω, ω_1 ein primitives Periodenpaar von $\wp(u)$ ist, w irgendeine Periode und n eine natürliche Zahl. $\frac{w}{n}$ ist das Argument einer gewissen Lösung von (3) in Ω .

Dann muß aber für wenigstens einen dieser Werte $\frac{w}{n}$, z. B. $\frac{w_1}{n_1}$, gelten, daß die Kongruenz

$$u_i + u'_i \equiv \frac{w_1}{n_1} \pmod{\omega, \omega_1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

für unendlich viele inkongruente Argumentenpaare u_i und u'_i erfüllt ist, die relativkonjugierten Lösungen in $\Omega(\sqrt{-3})$ entsprechen.

Man bilde jetzt die unendliche Reihe von Argumentenpaaren:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= u_1 - u_i \\ v'_i &= u'_1 - u'_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

Ein jedes dieser Argumente gibt eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$ (nach den Additionsformeln), und v_i und v'_i geben konjugierte Lösungen. Alle v_i sind inkongruent $\pmod{\omega, \omega_1}$, wie die u_i . Dasselbe gilt von den v'_i . Eventuell könnte gelten: $v_i \equiv v'_j$ und $v_j \equiv v'_i$. Die Anzahl inkongruenter Argumentenpaare v_i, v'_i wird aber jedenfalls unendlich. Es ist aber

$$v_i + v'_i \equiv 0 \pmod{\omega, \omega_1}.$$

Also ist

$$\wp(v_i) = \wp(-v'_i) = \wp(v'_i),$$

und

$$\wp'(v_i) = \wp'(-v'_i) = -\wp'(v'_i).$$

Nun sind aber $\wp(v_i)$ zu $\wp(v'_i)$ und $\wp'(v_i)$ zu $\wp'(v'_i)$ in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert, und es folgt

$$\begin{aligned} \wp(v_i) &= \wp(v'_i) = \alpha_i \\ \wp'(v_i) &= -\wp'(v'_i) = 2\beta_i\sqrt{-3} \end{aligned}$$

wo α_i und β_i Zahlen sind, die zu Ω gehören. Diese unendlich vielen Wertepaare α_i, β_i genügen alle der Gleichung

$$-3\beta_i^2 = \alpha_i^3 - B.$$

Wird jetzt

$$X_i = \frac{\beta_i^2 + B}{\alpha_i^2}, \quad Y_i = \frac{\beta_i^3 - 3B\beta_i}{-\alpha_i^3}$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele verschiedene Wertepaare X_i, Y_i , die zu Ω gehören und der Gleichung

$$X_i^3 - B = Y_i^2$$

genügen. Dies ist aber gegen die Annahme.

Auf ganz analoge Weise wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω . Hat dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2 \tag{4}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω , so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$.

Beweis: Nehmen wir an, daß die Gleichung (4) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele Lösungen in $\Omega(\sqrt{-1})$, so ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie im Beweise von Satz 1 die Existenz von unendlich vielen verschiedenen Wertepaaren α_i, β_i , die zu Ω gehören und der Gleichung

$$\alpha_i^3 - A\alpha_i = -\beta_i^2$$

genügen. Wird jetzt

$$X_i = -\alpha_i \quad \text{und} \quad Y_i = \beta_i$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele Lösungen X_i und Y_i in Ω der Gleichung

$$X_i^3 - AX_i = Y_i^2.$$

Dies ist aber gegen die Annahme.

Mittels der hier angewandten Methode ist es leicht Satz 1 durch den folgenden präziseren Satz zu ersetzen, wenn Ω reell ist:

Satz 3. *Es sei in Satz 1 der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung (3) in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in Ω ($\sqrt{-3}$), so ist $3nv$ gleich einer Periode.*

Satz 2 kann durch den folgenden präziseren ersetzt werden:

Satz 4. *Es sei in Satz 2 der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung (4) in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in Ω ($\sqrt{-1}$), so ist $2nv$ gleich einer Periode.*

Diese Sätze und mehrere noch weitergehende Resultate werden in meiner Dissertationsabhandlung bewiesen.

(Eingegangen den 3. Dezember 1936.)