# Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder

Von Robert Frucht, Trieste (Italien)

In seinem Lehrbuch „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" gibt Herr D. König auf Seite 194 die Anregung, die Gruppe und die Symmetrieeigenschaften des sogenannten Petersenschen Graphen zu untersuchen, den man sich so entstanden denken kann, daß man zehn Punkten die zehn Zahlenpaare („Transpositionen") (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35) und (45)[1]) zuordnet und je zwei dieser „Knotenpunkte" dann und nur dann durch eine „Kante" verbindet, wenn die entsprechenden beiden Zahlenpaare keine gemeinsame Ziffer enthalten (siehe die Figur).

Unter der *Gruppe eines Graphen* versteht man hierbei die (natürlich eine Gruppe bildende) Gesamtheit der Transformationen des Graphen in sich, d. h. derjenigen Permutationen der Knotenpunkte des Graphen sowie der von ihnen ausstrahlenden Kanten, bei welchen der Graph als Ganzes in sich übergeht. Ein Zweieck besitzt also z. B. eine Gruppe der Ordnung 4, die direktes Produkt zweier Gruppen der Ordnung 2 ist, da man sowohl die beiden Knotenpunkte des Zweiecks als auch die beiden Kanten unabhängig voneinander vertauschen kann. Enthält ein Graph hingegen überhaupt kein Zweieck, so kommen solche Vertauschungen von Kanten allein bei Festbleiben aller Knotenpunkte überhaupt nicht in Frage, und man kann sich beim Aufsuchen der Gruppe eines Graphen auf die Betrachtung der Permutationen seiner Knotenpunkte beschränken.

*Für den oben definierten Petersenschen Graphen behaupten wir nun, daß seine Gruppe von der Ordnung* 120, *und zwar mit der symmetrischen Gruppe in 5 Variablen,* $\mathfrak{S}_5$, *einstufig isomorph ist.* Zum Beweise zeigen wir zunächst in 1.), daß die Gruppe des Graphen eine Untergruppe besitzt, die $\mathfrak{S}_5$ einstufig isomorph ist; nachher zeigen wir in 2.), daß die Gruppe des Graphen außerhalb dieser Untergruppe keine weiteren Elemente mehr enthält, daß also diese Untergruppe schon die ganze Gruppe des Graphen umfaßt.

1. Übt man auf die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 eine Permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

[1]) Die Zahlenpaare $(\alpha, \beta)$ und $(\beta, \alpha)$ sind also hier und im folgenden stets als identisch zu betrachten.

aus, so ergibt die entsprechende Permutation der Zahlenpaare (12), (13), ..., die dabei in $(\alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_3)$, ... übergehen, eine Permutation des Graphen in sich. Daß die Gruppe des Graphen eine zu $\mathfrak{S}_5$ einstufig isomorphe Untergruppe enthält, werden wir also bewiesen haben, wenn wir zeigen können, daß zwei *verschiedenen* Permutationen der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 auch zwei *verschiedene* Permutationen der zehn Knotenpunkte (= Zahlenpaare) entsprechen. Letzteres ist aber leicht einzusehen. Sei nämlich

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{pmatrix} \text{ eine von } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

verschiedene Permutation. Da bei $Q$ also (12) in $(\beta_1, \beta_2)$ übergeführt wird, so könnte $Q$ nur dann zu derselben Transformation des Graphen in sich führen wie $P$, wenn die Zahlenpaare $(\alpha_1, \alpha_2)$ und $(\beta_1, \beta_2)$ miteinander identisch sind. Da nun $P$ und $Q$ verschiedene Permutationen sein sollen, können nicht alle fünf Gleichungen $\alpha_i = \beta_i$ (für $i = 1, 2, 3, 4, 5$) bestehen, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir etwa annehmen, daß $\alpha_1 \neq \beta_1$ ist. Daher führt die angenommene Identität der Knotenpunkte $(\alpha_1, \alpha_2)$ und $(\beta_1, \beta_2)$ auf $\alpha_2 = \beta_1$ und $\alpha_1 = \beta_2$. Ebenso müßten aber die Zahlenpaare $(\alpha_1, \alpha_3)$ und $(\beta_1, \beta_3)$, in die (13) übergeht, miteinander identisch sein, was wieder wegen $\alpha_1 \neq \beta_1$ auf $\alpha_3 = \beta_1$ und $\alpha_1 = \beta_3$ führen würde. Zusammen mit $\alpha_2 = \beta_1$ und $\alpha_1 = \beta_2$ führt das aber auf $\alpha_2 = \alpha_3$ und $\beta_2 = \beta_3$, was nicht möglich ist, da ja die $\alpha_i$ und die $\beta_i$ eine *Permutation* der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 sind. Die Annahme, daß zu zwei verschiedenen Permutationen $P$ und $Q$ dieselbe Permutation der Knotenpunkte des Graphen gehören könnte, führt also auf einen Widerspruch.

2. Wir zeigen nun, daß es außer den bisher betrachteten keine weiteren Transformationen des Graphen in sich gibt. Angenommen, $T$ sei eine solche, und zwar gehe bei $T$ der Knotenpunkt (12) in den Knotenpunkt $(\varkappa, \lambda)$ über. Dann bestimmen wir eine solche Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, bei welcher $\varkappa$ in 1 und $\lambda$ in 2, also das Zahlenpaar $(\varkappa, \lambda)$ in (12) übergeht. Sei $S_1$ eine solche Permutation, dann wird bei der Aufeinanderfolge der Transformationen $T$ und $S_1$, d. h. bei dem „Produkt" $TS_1$ der Knotenpunkt (1 , 2) fest bleiben. Nun hat dieser letztere drei „Nachbarpunkte" (3 , 4), (3 , 5) und (4 , 5), die wegen der Invarianz des graphentheoretischen Entfernungsbegriffs (siehe das oben zitierte Buch von König, Seite 12) gegenüber Transformationen „Nachbarpunkte" bleiben müssen, also bei Ausübung der Transformation $TS_1$ nur untereinander vertauscht werden können. Es möge etwa (3 , 4) in $(\varrho , \sigma)$, (3 , 5) in $(\varrho , \tau)$

und (4 , 5) in ($\sigma$ , $\tau$) übergehen, wobei die Ziffern $\varrho$ , $\sigma$ , $\tau$ eine Permutation von 3, 4, 5 sind. Bezeichnen wir die zu dieser inverse Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 mit $S_2$, also $S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & \varrho & \sigma & \tau \end{pmatrix}$, so werden beim „Produkt" $TS_1S_2$ die vier Knotenpunkte (1 , 2), (3 , 4), (3 , 5) und (4 , 5) also einzeln fest bleiben. Bei derselben Transformation können dann die von (1 , 2) verschiedenen „Nachbarpunkte" von (3 , 4), nämlich die Knotenpunkte (1 , 5) und (2 , 5) höchstens untereinander vertauscht werden. Findet eine solche Vertauschung wirklich statt, so bezeichne $S_3$ die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; anderenfalls bezeichne $S_3$ die identische Permutation, bei der alle Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 einzeln fest bleiben. In beiden Fällen werden jedenfalls bei der „Produkttransformation" $TS_1S_2S_3$ außer den Knotenpunkten (1 , 2), (3 , 4), (3 , 5) und (4 , 5) auch noch (1 , 5) und (2 , 5) einzeln fest bleiben. Als einziger Punkt, der gleichzeitig „Nachbarpunkt" von (2 , 5) und (4 , 5) ist, bleibt dann aber auch (1 , 3) fest, ebenso (2 , 4) als einziger gemeinsamer Nachbarpunkt von (1 , 3) und (1 , 5) und (2 , 3) als Nachbar von (1 , 5) und (4 , 5), schließlich als letzter Punkt auch (1 , 4).

Bei der Ausübung der Transformation $TS_1S_2S_3$ bleiben also alle Knotenpunkte des Graphen einzeln fest; das bedeutet aber, daß das „Produkt" $S_1S_2S_3$, welches wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{S}_5$ selbst eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 ist, die Wirkung von $T$ „aufhebt" oder daß $T$ dieselbe Permutation der Knotenpunkte des Graphen hervorruft wie die Permutation $(S_1S_2S_3)^{-1}$. Unsere Annahme, daß es außer den unter 1. betrachteten Transformationen des Graphen, die durch eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 „induziert" werden, noch eine *weitere* Transformation $T$ des Graphen in sich gebe, führt also auf einen Widerspruch, und unser Satz ist damit in allen Teilen bewiesen.

In ähnlicher Weise kann man den Beweis auch bei anderen Graphen führen, bei denen man die Gruppe „erraten" kann, z. B. bei den (als abstrakte Graphen betrachteten) Kantensystemen der regulären Polyeder. Die Gruppen dieser Graphen stehen nämlich in einem einfachen Zusammenhang mit den bekannten entsprechenden räumlichen Drehungsgruppen der Polyeder.

Bei den *Diedern* ist die Gruppe des Graphen, der vom Randpolygon gebildet wird, mit der entsprechenden Diedergruppe identisch. Beim *Tetraeder*, bei dem die räumliche Drehungsgruppe mit der alternierenden Gruppe in vier Variablen, $\mathfrak{A}_4$, einstufig isomorph ist, ergibt sich für den durch das Kantensystem gebildeten Graphen die symmetrische Gruppe

$\mathfrak{S}_4$. (Dies ist nur ein spezieller Fall des sofort einleuchtenden allgemeinen Satzes, daß der vollständige Graph $G_n$, bei welchem je zwei der $n$ Knotenpunkte durch eine Kante verbunden sind, $\mathfrak{S}_n$ zur Gruppe hat.) Bei den übrigen regulären Polyedern, d. h. bei *Würfel, Oktaeder, Dodekaeder* und *Ikosaeder*, ergibt sich endlich, daß die Gruppe des durch die Kanten gebildeten abstrakten Graphen aus der entsprechenden räumlichen Drehungsgruppe des Polyeders[2]) erhalten werden kann, indem man zu dieser noch ein invariantes Element der Ordnung 2 hinzunimmt, so daß sich die Gruppe des Graphen als direktes Produkt der betreffenden Drehungsgruppe und einer Gruppe der Ordnung 2 darstellt. Dieses invariante Element der Ordnung 2 kann man am räumlichen Polyedermodell sehr anschaulich deuten: es ist einfach die Spiegelung am Mittelpunkt, bei der jeder Punkt mit seinem diametralen vertauscht wird (in cartesischen Koordinaten also die Transformation: $x_1' = -x_1$, $x_2' = -x_2$, $x_3' = -x_3$, die in den räumlichen Drehungsgruppen nicht enthalten ist, da die Determinante dieser Substitution $-1$ ist).

Wir wollen den Beweis, daß es außer den angegebenen keine weiteren Transformationen des durch die Kanten eines regulären Polyeders gebildeten Graphen gibt, nur am Beispiel des Oktaeders durchführen, da dieser Beweis bei den anderen Polyedern ganz ähnlich verläuft.

Daß zwei verschiedenen „Produkten" von räumlichen Oktaederdrehungen und einer etwaigen Spiegelung am Mittelpunkt auch verschiedene Transformationen des Kantensystems des Oktaeders entsprechen, ist unmittelbar einleuchtend. Angenommen, es gebe eine Permutation der Knotenpunkte des Graphen, $T$, die sich nicht auf diese Weise erzeugen lasse. Da wir durch eine geeignete Drehung des Oktaeders, die wir mit $S_1$ bezeichnen wollen, jeden Eckpunkt des Oktaeders in jeden anderen überführen können, würde es dann jedenfalls auch eine Transformation $TS_1$ geben, bei der ein bestimmter Knotenpunkt „1" des Graphen fest bleibt. Wegen der Invarianz des graphentheoretischen Entfernungsbegriffes bleibt bei $TS_1$ auch sein Diametralpunkt fest, der etwa „2" heißen möge. Die übrigen vier Knotenpunkte „3", „4", „5" und „6" können bei $TS_1$ nur untereinander vertauscht werden; fügt man aber an $TS_1$ noch eine geeignete Drehung $S_2$ des Oktaeders um die Achse „1" — „2" an, so kann man erreichen, daß noch ein weiterer Punkt, z. B. „3", bei $TS_1S_2$ fest bleibt — und damit gleichzeitig sein Diametralpunkt, der etwa „4" heißen möge. Bleiben nun bei $TS_1S_2$ auch die Punkte „5" und „6" einzeln fest, so sei $S_3 = E$ (Identität); anderenfalls sei $S_3$ das „Produkt" aus einer Drehung des Oktaeders um 180° um die

[2]) d. i. $\mathfrak{S}_4$ für Würfel und Oktaeder, $\mathfrak{A}_5$ für Dodekaeder und Ikosaeder.

Achse „5“ — „6“ und aus einer Spiegelung am Mittelpunkt. In beiden Fällen werden die sechs Knotenpunkte des Graphen bei Ausübung der Transformation $TS_1S_2S_3$ einzeln fest bleiben, also ist $T$ entgegen der Annahme mit dem der angegebenen Gruppe angehörigen Element $(S_1S_2S_3)^{-1}$ identisch.

* * *

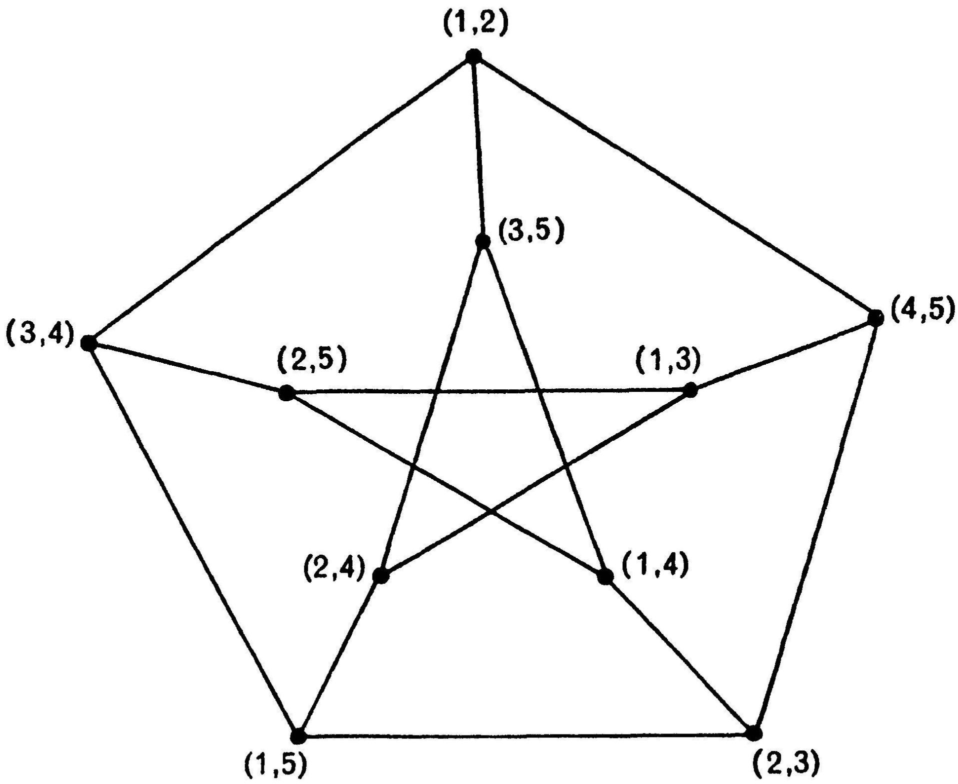
Wir wollen noch kurz darauf hinweisen, daß man die Bestimmung der Gruppe des Petersenschen Graphen (sowie derjenigen des Kantensystems des Oktaeders) auch auf folgenden allgemeinen Satz über Permutationsgruppen zurückführen kann:

*Diejenigen Permutationen der* $\binom{n}{2}$ *Transpositionen:* $(1\,,2)$, $(1\,,3)$, $\ldots$, $(n-1, n)$, *bei welchen zwei ziffernfremde Transpositionen stets wieder in zwei ziffernfremde Transpositionen übergehen, bilden für* $n = 3$ *und* $n \geqq 5$ *eine zur symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *einstufig isomorphe Gruppe; für* $n = 4$ *ergibt sich hingegen eine Gruppe von der Ordnung* $48 = 2 \cdot 4!$, *die das direkte Produkt von* $\mathfrak{S}_4$ *mit einer Gruppe der Ordnung 2 ist.* (Statt von ziffernfremden Transpositionen kann man hierbei auch von miteinander vertauschbaren Transpositionen sprechen.)

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes soll hier nur kurz angedeutet werden. Man betrachte eine beliebige Permutation $P$ der $\binom{n}{2}$ Transpositionen; bei ihr gehe $(1\,,2)$ in $(\alpha_1, \alpha_2)$ und $(1\,,3)$ in $(\alpha_1, \alpha_3)$ über. Dann könnte $(1\,,4)$ entweder in eine Transposition von der Form $(\alpha_1, \alpha_4)$ oder aber in $(\alpha_2, \alpha_3)$ übergehen. Der letztere Fall kann nun aber für $n \geqq 5$ nicht eintreten, da die der Transformation $(1\,,5)$ bei $P$ entsprechende Transposition zu keiner der drei Transpositionen $(\alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_3)$ und $(\alpha_2, \alpha_3)$ ziffernfremd sein dürfte, was offenbar für keine von diesen drei Transpositionen verschiedene Transposition der Fall ist. (Für $n = 4$ kann dieser Fall sehr wohl eintreten, und dies begründet die Ausnahmestellung dieses leicht zu erledigenden Falles.) So fortfahrend schließt man, daß $(1\,,5)$ in eine Transposition der Form $(\alpha_1, \alpha_5)$ übergehen muß, weiter $(2\,,3)$ in $(\alpha_2, \alpha_3)$ usw. und es zeigt sich, daß man die Permutation $P$ der $\binom{n}{2}$ Transpositionen einfach erhalten kann, indem man in ihnen auf die Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$ die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ ausübt.

Die Anwendung dieses Satzes für $n = 5$ auf den Petersenschen Graphen ergibt sich unmittelbar aus der oben angegebenen Definition des letzteren. Was das reguläre Oktaeder betrifft, so ergibt sich die Anwendung auf sein Kantensystem für $n = 4$ aus der Tatsache, daß man seinen sechs Eckpunkten die sechs Transpositionen (1 , 2), (1 , 3), (1 , 4), (2 , 3), (2 , 4) und (3 , 4) so zuordnen kann, daß je zwei Diametralpunkten des Oktaeders (und nur solchen) zwei ziffernfremde Transpositionen entsprechen.

Wir schließen mit einer Bemerkung darüber, wie man aus dem Petersenschen Graphen anschaulich (natürlich bereits bekannte) Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{S}_5$ ableiten kann. Da dieser Graph 10 Knotenpunkte und 15 Kanten besitzt, geben die Vertauschungen der Knotenpunkte bezw. der Kanten bei Ausübung sämtlicher Transformationen des Graphen in sich Anlaß zu Darstellungen von $\mathfrak{S}_5$ als Permutationsgruppe in 10 oder




15 Variablen. Interessanter als diese ist aber, daß man auch eine Darstellung von $\mathfrak{S}_5$ als Permutationsgruppe in 6 Variablen auf folgende Weise erhalten kann:

Der Petersensche Graph enthält keine Zwei-, Drei- oder Vierecke, wohl aber 12 Fünfecke, die man in 6 Paare von je zwei miteinander knotenpunktfremden Fünfecken einteilen kann. (Ein solches Paar ist z. B. das Fünfeck (1 , 2) — (3 , 4) — (1 , 5) — (2 , 4) — (3 , 5) zusammen mit dem Fünfeck (1 , 4) — (2 , 5) — (1 , 3) — (4 , 5) — (2 , 3); in der Sprache der Graphentheorie bildet jedes solche Fünfeckspaar einen „Faktor zweiten Grades", wie er bei der Faktorzerlegung des Graphen auftritt.) Die Vertauschungen dieser 6 Fünfeckspaare bei den Transformationen des Graphen in sich bilden eine, wie man sofort erkennt, zu $\mathfrak{S}_5$ einstufig isomorphe transitive Permutationsgruppe in 6 Variablen. Faßt man diese als eine Darstellung in *ganzen linearen Substitutionen* auf, so kann man einmal die identische Darstellung „abspalten" (siehe z. B. A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. 1927, S. 184) und gelangt so zu einer *irreduziblen* Darstellung von $\mathfrak{S}_5$ durch ganze lineare Substitutionen fünften Grades. Von deren Charakter ausgehend kann man unter Hinzunahme der Darstellung von $\mathfrak{S}_5$ durch Permutationen in 5 Variablen (durch die man die Gruppe $\mathfrak{S}_5$ ja gewöhnlich definiert) sehr einfach auch die übrigen einfachen Charaktere von $\mathfrak{S}_5$ ableiten, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

(Eingegangen den 26. Februar 1937.)