Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples.

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10184

Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples

Par M. Plancherel et G. Pólya, à Zurich

Introduction

1. Le but de cette note est de donner une extension d'un théorème important de Paley et de Wiener[1]) aux intégrales de Fourier multiples. Donnons d'abord les définitions nécessaires.

Nous dirons qu'une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, c'est-à-dire la somme d'une série entière en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ partout convergente, est *de type exponentiel* s'il existe deux constantes positives a et A telles que l'inégalité

$$|F(z_1, z_2, \cdots, z_n)| < A e^{a(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|)} \tag{1}$$

soit valable pour toutes les valeurs complexes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Nous dirons qu'une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (qui peut d'ailleurs aussi être définie pour des valeurs complexes) est *de carré intégrable* si elle est mesurable et si l'intégrale

$$\int\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n ,$$

étendue à tout l'espace à n dimensions, existe au sens de Lebesgue.

Avec ces définitions une première extension du théorème de Paley et de Wiener peut être énoncée comme il suit.

I. *Pour que la fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de n variables complexes soit une fonction entière de type exponentiel et, considérée pour les valeurs réelles de ses n variables, soit de carré intégrable, il faut et il suffit qu'elle puisse être représentée sous la forme*

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \int\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n) \, e^{i(z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots + z_n y_n)} dy_1 \, dy_2 \cdots dy_n \tag{2}$$

où $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ désigne une fonction de carré intégrable de ses n variables réelles qui s'annule en chaque point extérieur à un certain domaine borné.

[1]) *R. E. A. C. Paley* and *N. Wiener*, Fourier transforms in the complex domain (American Math. Soc. Colloquium publications, vol. 19 (1934), p. 12—13).

En utilisant la notion de la *transformée de Fourier* on peut énoncer le même théorème un peu autrement:

I'. *Pour qu'une fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* n *variables réelles* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de carré intégrable, ait sa transformée de Fourier nulle en chaque point extérieur à un domaine borné, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à une fonction entière de type exponentiel* (*considérée pour les valeurs réelles des variables*).

Le cas $n = 1$ est le théorème cité de Paley et de Wiener; le théorème général se ramène sans difficultés de principe au cas $n = 1$.

2. Nous avons d'ailleurs un peu plus à communiquer que le théorème I. Nous établirons une relation simple entre la croissance de la fonction entière de type exponentiel F et le domaine où la fonction Φ, sa transformée de Fourier, n'est pas équivalente à zéro. Nous devons, pour la formuler sous une forme précise, introduire encore quelques définitions.

Par une direction dans l'espace à n dimensions, nous entendons n nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ qui satisfont à la condition

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1 \ . \tag{3}$$

Nous allons définir deux fonctions réelles de la direction variable

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda) \ ,$$

l'une attachée à F, l'autre à Φ.

1° Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels, les λ_ν satisfaisant à (3), les α_ν quelconques. Considérons

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \, r^{-1} \log |F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \alpha_2 - i\lambda_2 r, \cdots, \alpha_n - i\lambda_n r)| \ . \tag{4}$$

Cette limite supérieure, en vertu de l'hypothèse (1), ne peut pas dépasser a; elle dépend de la direction (λ) et des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$. Prenons la *borne supérieure* de (4), en faisant parcourir à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tout l'espace réel à n dimensions. Cette borne supérieure ne dépend que de la direction (λ) et elle sera désignée par $h(\lambda)$. Nous posons donc

$$h(\lambda) = \operatorname*{Max}_{(\alpha)} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \, r^{-1} \log |F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \cdots, \alpha_n - i\lambda_n r)| \ . \tag{5}$$

2° Soit $\mathfrak{K}$ la partie commune à tous les domaines convexes à l'extérieur desquels $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ est équivalente à zéro. $\mathfrak{K}$ est un domaine fermé et convexe. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda)$ une direction donnée. Faisons varier $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathfrak{K}$ et posons

$$\chi(\lambda) = \underset{(y)\varepsilon\mathfrak{K}}{\operatorname{Max}} (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n) . \tag{6}$$

La fonction $\chi(\lambda)$ est appelée la fonction d'appui (Stützfunktion) du domaine convexe $\mathfrak{K}$.

Avec ces définitions, nous avons le théorème suivant:

II. *La fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel et de carré intégrable étant liée à $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par la relation* (2), *la croissance de F dans les directions purement imaginaires et le plus petit domaine convexe $\mathfrak{K}$ en dehors duquel Φ est équivalente à zéro se déterminent mutuellement en ce sens que*

$$h(\lambda) = \chi(\lambda) .$$

Il faut exclure de l'énoncé II (ou interpréter particulièrement) le cas où F est identiquement nulle; dans ce cas $h(\lambda) = -\infty$ et $\mathfrak{K}$ est l'ensemble vide.

Même dans le cas $n = 1$, le théorème II apporte un petit complément au théorème de Paley et de Wiener. Les développements du no 19 apporteront un complément plus important et ceux des nos 5—8 mettront en évidence les relations entre le théorème de Paley et de Wiener et certaines propriétés des fonctions entières du type exponentiel données par un de nous il y a quelque temps[2]). Mentionnons encore un beau mémoire de Siegel, dont un certain passage touche de très près ce que nous avons à dire sur les intégrales de Fourier multiples[3]).

Le passage direct

3. Nous nommons passage direct le passage de Φ à F; il est beaucoup plus aisé que le passage inverse de F à Φ.

Soit donnée la fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$, sujette aux conditions suivantes: Φ est équivalente à zéro en dehors du domaine borné, fermé et

---

[2]) *G. Pólya,* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (Math. Zeitschrift, Bd. 29 (1929), S. 549—640).

[3]) *C. L. Siegel,* Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem (Acta Mathematica, vol. 65 (1935), p. 307—323). Les pages 317—320 donnent implicitement une démonstration de nos théorèmes I et II dans un cas très particulier. La fonction entière que M. Siegel désigne par $\mathfrak{p}(\mathfrak{y})$ à la page 317 ne dépend que de la somme des carrés des variables (qui entraîne $h(\lambda) = \text{const.}$) et satisfait, en outre, à une inégalité découlant de sa formule (25) (voir p. 319) qui n'est pas évidente d'avance dans le cas général.

convexe $\mathfrak{K}$ de l'espace n-dimensionnel $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et Φ est de carré intégrable. Nous définissons F par la formule (2).

Il est évident que l'intégrale (2), qui effectivement ne s'étend qu'au domaine borné $\mathfrak{K}$, existe pour $z_1, \ldots, z_n$ complexes quelconques et qu'elle définit, en vertu de théorèmes bien connus, une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Soit a la plus grande valeur que le module d'une quelconque des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ peut atteindre dans le domaine borné et fermé $\mathfrak{K}$. Il suit immédiatement de (2) que

$$|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq e^{a(|z_1| + \cdots + |z_n|)} \int \underset{\mathfrak{K}}{\cdots} \int |\Phi(y_1, \ldots, y_n)| \, dy_1 \ldots dy_n ;$$

donc la fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est du type exponentiel.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, r$ des nombres réels, les α quelconques, les λ assujettis à (3), $r > 0$. Alors

$$|F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)| \tag{7}$$

$$= \left| \int \underset{\mathfrak{K}}{\cdots} \int e^{(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n) r} e^{i(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)} \Phi(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n \right|$$

$$\leqq e^{\chi(\lambda) r} \int \underset{\mathfrak{K}}{\cdots} \int |\Phi(y_1, \ldots, y_n)| \, dy_1 \ldots dy_n ,$$

$\chi(\lambda)$ étant définie par (6). Nous voyons par (7) que la limite (4) ne peut pas dépasser $\chi(\lambda)$ quels que soient les α_ν et ainsi, en vertu de la définition (5), nous avons

$$h(\lambda) \leqq \chi(\lambda) . \tag{8}$$

Enfin, d'après la théorie générale des transformées de Fourier il suit de (2) que $F(x_1, \ldots, x_n)$, tout comme $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$, est de carré intégrable.

4. Dans ce qui précède nous avons démontré la moitié la plus facile de chacun des théorèmes I et II. Précisons ce qu'il reste à faire pour les démontrer complètement.

Pour le passage inverse, nous devrons supposer donnée la fonction entière F, de type exponentiel et de carré intégrable. De cette dernière propriété il suit par la théorie générale des transformations de Fourier qu'il existe une fonction Φ, de carré intégrable, déterminée à un ensemble de mesure nulle près, qui satisfait à l'équation (2) où l'intégrale du second membre est à calculer comme limite en moyenne d'intégrales n-tuples

$$\int \underset{\Omega_p}{\cdots} \int \Phi(y_1, \ldots, y_n) e^{i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dy_1 \ldots dy_n$$

étendues à des domaines mesurables bornés quelconques Ω_p assujetis à la seule condition que $\lim_{p\to\infty} \Omega_p$ soit égale à l'espace entier[4]). Cette fonction Φ est aussi représentée presque partout par la formule

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n \tag{9}$$

où l'intégrale du second membre est aussi à calculer comme limite en moyenne.

Il reste à démontrer que *F étant de type exponentiel et de carré intégrable, Φ, donnée par* (9), *est presque partout nulle en dehors d'un certain domaine borné* (théorème I) et, plus précisément (théorème II), que Φ (*à l'exception peut-être d'un ensemble de mesure nulle*) *est égale à zéro dans le demi-espace*

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n > h(\lambda) , \tag{10}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *étant des nombres réels donnés quelconques satisfaisant à* (3).

Nous donnerons la démonstration d'abord pour le cas $n = 1$, puis, à l'aide de ce cas, pour n quelconque. Pour en faire mieux ressortir les traits essentiels nous traiterons d'abord le cas plus facile où F est supposée *intégrable* (et n'est pas supposée de carré intégrable) dans tout l'espace (voir B, no 15) ; nous passerons ensuite au cas ou F est de carré intégrable.

Le passage inverse. Le cas $n=1$

5. Nous allons démontrer le théorème suivant, qui n'est pas complètement contenu dans l'énoncé donné par Paley et Wiener:

Nous supposons que

(I) $F(z)$ *est une fonction entière du type exponentiel,*

(II) $\overline{\lim}_{r\to+\infty} r^{-1} \log |F(-ir)| = h , \quad \overline{\lim}_{r\to+\infty} r^{-1} \log |F(ir)| = h' ,$

(III) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx$ *existe.*

Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixy} dx = 0$$

presque partout pour $y > h$ et pour $y < -h'$.

[4]) En réalité, comme nous démontrerons dans le théorème I que la fonction Φ est équivalente à zéro en dehors d'un certain domaine borné, l'intégrale (2) existera au sens ordinaire et son calcul comme limite en moyenne s'avérera superflu.

Il est sous-entendu dans les formules ci-dessus que x et y sont réels et que l'intégrale figurant dans la conclusion est à définir comme limite en moyenne.

Notre démonstration sera différente de celle de Paley et de Wiener[5]). Nous nous appuyerons sur le fait suivant facile à établir[6]):

Lemme. *Si $F(z)$ est une fonction entière de type exponentiel, l'intégrale*

$$\int_0^{\infty(\varphi)} F(Z) e^{-zZ} dZ = f(z) , \tag{11}$$

prise le long d'une demi-droite faisant l'angle arbitraire φ avec l'axe réel positif, possède un demi-plan de convergence et représente à l'intérieur de ce demi-plan une fonction analytique $f(z)$ (indépendante de φ), régulière dans ce demi-plan et à l'infini où elle est nulle.

La fonction $f(z)$ étant régulière au point $z = \infty$ et y étant nulle a dans le voisinage de ce point un développement de la forme

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \cdots . \tag{12}$$

Le domaine de convergence de (11) (un demi-plan) et le domaine de convergence de (12) (l'extérieur d'un certain cercle) ont une partie infinie en commun où (11) et (12) représentent la même valeur $f(z)$. Si le demi-plan de convergence de (11) contient des points intérieurs où (12) diverge, la valeur représentée par (11) en ces points est le prolongement analytique univoquement déterminé de l'élément (12) dans le demi-plan. C'est ainsi qu'il faut entendre l'énoncé du lemme. Pour sa démonstration il est bon de savoir que la série (12) est formée avec les mêmes constantes $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ que la série toujours convergente

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} + \cdots .$$

6. Nous n'allons pas encore démontrer le théorème énoncé au no 5, mais un théorème plus facile qu'on obtient en remplaçant l'hypothèse (III) par

(III*) $$\int_{-\infty}^{\infty} | F(x) | \, dx \quad \text{existe.}$$

5) loc. cit. 1).

6) Voir loc. cit. 2) p. 581—583.

Nous démontrerons donc la conclusion du théorème du no. 5 sous les hypothèses (I), (II), (III*).

Nous nous servirons du lemme pour 4 valeurs de φ: pour

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad \varphi = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{pour} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \pi.$$

En prenant $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ dans (11) et posant

$$z = x + iy \tag{13}$$

(x, y réels), on obtient

$$f(x+iy) = -i\int_0^\infty F(-iY)\,e^{iYx-Yy}dY\ .$$

Cette intégrale converge uniformément dans $y \geqq h + \varepsilon > h$, comme on voit facilement en faisant usage de la première des conditions (II); donc $f(z)$ est régulière dans le demi-plan $y > h$. On voit de la même manière en prenant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dans (11), que $f(z)$ est régulière dans $y < -h'$. En prenant $\varphi = 0$, puis $\varphi = \pi$ on obtient

$$f(x+iy) = \int_0^\infty F(X)e^{-X(x+iy)}dX\ ,\ f(x+iy) = -\int_{-\infty}^0 F(X)e^{-X(x+iy)}dX. \tag{14}$$

Il suit immédiatement de l'hypothèse (III*) que la première des intégrales (14) converge uniformément dans $x \geqq 0$ et la seconde dans $x \leqq 0$. Donc $f(z)$ est régulière à droite ainsi qu'à gauche de l'axe imaginaire. En résumé, *$f(z)$ est régulière dans tout le plan, excepté peut-être aux points du segment rectiligne joignant $z = ih$ à $z = -ih'$.* N'oublions pas que $f(z)$ est aussi régulière à l'infini; donc le domaine qu'on obtient en enlevant du plan complexe (fermé à l'infini) le segment rectiligne mentionné est simplement connexe et $f(z)$ y est *uniforme.*

D'ailleurs, on obtient de (14), en supposant $\varepsilon > 0$, par des changements faciles

$$f(\varepsilon + iy) - f(-\varepsilon + iy) = \int_{-\infty}^\infty F(x)e^{-ixy}e^{-\varepsilon|x|}dx\ . \tag{15}$$

La convergence uniforme des intégrales (14) entraîne encore que

$$\lim_{x\to+0} f(x+iy)) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+0} f(-x+iy) \tag{16}$$

existent et sont continues pour tout y réel.

En vertu de la même hypothèse (III*) l'intégrale (15) converge uniformément en ε dans $\varepsilon \geqq 0$. Nous avons donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ixy}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} [f(\varepsilon+iy)-f(-\varepsilon+iy)] \tag{17}$$

pour tout y réel. La fonction $f(z)$ étant régulière et uniforme en dehors de l'intervalle $-h' \leqq y \leqq h$, le second membre de (17) s'annulle pour $y > h$ ainsi que pour $y < -h'$. Il en est donc de même du premier membre, c. q. f. d.

7. La démonstration précédente relie $\Phi(y)$, la transformée de Fourier de $F(x)$, à $f(z)$ qu'on peut appeler la *transformée de Borel* de $F(z)$[7]. En effet, on a, en vertu de (17),

$$\Phi(y) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{f(\varepsilon+iy)-f(-\varepsilon+iy)}{2\pi} . \tag{18}$$

On peut présenter la liaison entre $\Phi(y)$ et $f(z)$ encore sous une autre face en exprimant $f(z)$ par $\Phi(y)$. En effet, $f(z)$ peut être représentée par l'intégrale de Cauchy

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)dw}{w-z} ,$$

le chemin d'intégration étant une courbe fermée quelconque sans points multiples, qui contient le segment $(-ih', ih)$ à l'intérieur et est parcourue dans le sens positif. En prenant comme chemin d'intégration le rectangle dont les 4 sommets sont

$$\varepsilon+i(h+1) , \quad -\varepsilon+i(h+1) , \quad -\varepsilon-i(h'+1) , \quad \varepsilon-i(h'+1)$$

et en faisant tendre ε vers zéro, on obtient facilement de (18) que

$$f(z) = \int_{-h'}^{h} \frac{\Phi(y)dy}{z-iy} . \tag{19}$$

8. Nous abandonnons maintenant l'hypothèse (III*) et nous démontrons le théorème du no 5 sous l'hypothèse (III). Quelques unes des formules et des conclusions du no 6 pourront être adoptées sans changement, les autres nous serviront de contraste.

Fixons d'abord quelques notations. Une *équivalence* $\varphi(x) \sim \psi(x)$ sur un ensemble E, signifiera que les valeurs x de E où $\varphi(x) \neq \psi(x)$ forment un ensemble de mesure nulle; nous dirons alors que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont

[7]) Voir loc. cit. [3]) p. 578—581.

égales presque partout dans E. La suite de fonctions $f_n(x)$ sera dite converger en moyenne (quadratique) dans E vers une fonction $f(x)$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E |f - f_n|^2 dx = 0$. Nous exprimerons ce fait symboliquement par

$$\underset{n\to\infty}{\text{l. e. m.}}\ f_n(x) = f(x)$$

où l. e. m. est une abréviation de: limite en moyenne. Remarquons que si, sur un ensemble E, la limite au sens ordinaire du mot et la limite en moyenne de $f_n(x)$ existent toutes deux, elles sont équivalentes sur cet ensemble. Une équivalence

$$\varphi(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dy\,, \quad \text{dans } E$$

signifiera que l'intégrale du second membre, *définie comme limite en moyenne de* $\int\limits_{-a}^{b} \psi(x, y)\, dy$, pour $a \to \infty$, $b \to \infty$, existe presque partout dans E et y est équivalente à $\varphi(x)$.

Ces notations nous permettent de formuler comme suit les théorèmes de la théorie des transformations de Fourier dont nous aurons besoin.

a) Si $g(x)$ est une fonction de carré intégrable, la fonction $\psi(y)$ définie par l'équivalence

$$\psi(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixy} dy$$

est elle-même de carré intégrable et est telle que

$$g(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{ixy} dy\ .$$

De plus

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\,\psi(y)\,|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(x)\,|^2 dx\ .$$

$\psi(y)$ est appelée la *transformée de Fourier* de $g(x)$.

b) Si les fonctions $g_n(x)$, de carré intégrable, convergent en moyenne vers une fonction $g(x)$, les transformées de Fourier $\psi_n(y)$ de ces fonctions convergent en moyenne vers la transformée de Fourier $\psi(y)$ de $g(x)$ et réciproquement. On a, en effet,

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\,\psi(y) - \psi_n(y)\,|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(x) - g_n(x)\,|^2 dx\ .$$

Revenons maintenant au théorème du no 5 et à sa démonstration. La conclusion que $f(z)$ est analytique, régulière dans les demi-plans $y > h$ et $y < -h'$ subsiste sans changement, car elle repose sur l'hypothèse (II).

Nous ne pouvons, par contre, plus affirmer que les intégrales (14) convergent uniformément, la première dans $x \geqq 0$, la seconde dans $x \leqq 0$; l'hypothèse (III) permet seulement de montrer que la convergence de la première intégrale est uniforme dans le demi-plan $x \geqq \varepsilon$ et que celle de la seconde intégrale est uniforme dans le demi-plan $x \leqq -\varepsilon$, ε désignant une quantité positive arbitraire. On le voit en appliquant à ces intégrales l'inégalité de Schwarz. On a, par exemple, lorsque $x \geqq \varepsilon > 0$, $a \geqq 0$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^\infty F(X) e^{-X(x+iy)} dX \right|^2 &\leqq \int_a^\infty |F(X)|^2 dX \int_a^\infty |e^{-X(x+iy)}|^2 dX \\
&\leqq \frac{1}{2x} \int_a^\infty |F(X)|^2 dX \leqq \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^\infty |F(X)|^2 dX \,.
\end{aligned}
$$

$f(z)$ est donc encore analytique, régulière dans tout le plan, excepté peut-être aux points du segment rectiligne $(-ih', ih)$ et la formule (15) subsiste. Les limites (16) existent lorsque $y < -h'$ et lorsque $y > h$; on ne peut plus par contre affirmer leur existence lorsque $-h' \leqq y \leqq h$ ni l'existence du premier membre de la formule (17). Il faut ici modifier comme suit la démonstration du no 6.

Introduisons les deux fonctions auxiliaires $F_+(x)$, $F_-(x)$ définies par

$$
F_+(x) = \begin{cases} 0 \;, & x < 0 \\ F(x)\,, & x \geqq 0 \end{cases} \qquad F_-(x) = \begin{cases} F(x)\,, & x < 0 \\ 0 \;, & x \geqq 0 \end{cases}
$$

et les transformées de Fourier $\Phi(y)$, $\Phi_+(y)$, $\Phi_-(y)$ de $F(x)$, $F_+(x)$, $F_-(x)$

$$
\Phi(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(X) e^{-iXy} dX \,,
$$

$$
\Phi_+(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(X) e^{-iXy} dX \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(X) e^{-iXy} dX \,,
$$

$$
\Phi_-(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_-(X) e^{-iXy} dX \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(X) e^{-iXy} dX \,.
$$

Φ, Φ_+ et Φ_- sont de carré intégrable et dans $(-\infty, \infty)$

$$
\Phi(y) \sim \Phi_+(y) + \Phi_-(y) \,. \tag{20}
$$

Or, la première des formules (14) exprime que lorsque $x > 0$, $f(x+iy)$ est la transformée de Fourier de $2\pi F_+(X)\,e^{-Xx}$ et la seconde que $f(x+iy)$ est, lorsque $x < 0$, la transformée de Fourier de $-2\pi F_-(X)\,e^{-Xx}$. Mais les fonctions $F_+(X)\,e^{-Xx}$, $F_-(X)\,e^{-Xx}$ convergent en moyenne, la première vers $F_+(X)$ lorsque $x \to +0$, la seconde vers $F_-(X)$ lorsque $x \to -0$. Car, par exemple, puisque $0 \leqq 1 - e^{-Xx} < 1$ pour $Xx \geqq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_+(X)\,(1-e^{-Xx})|^2 dX \leqq \int_0^N |F_+(X)|^2 (1-e^{-Xx})^2 dX + \int_N^{\infty} |F_+(X)|^2 dX,$$

$N > 0$. Le second terme de droite tend vers zéro avec N^{-1} et le premier tend vers zéro, pour N fixe, lorsque $x \to +0$.

Il résulte par conséquent de la propriété b) ci-dessus notée que

$$\underset{x\to+0}{\text{l.e.m.}}\ f(x+iy) \sim 2\pi\,\Phi_+(y)\ ,\quad \underset{x\to-0}{\text{l.e.m.}}\ f(x+iy) \sim -2\pi\Phi_-(y)\ .$$

Comme la limite ordinaire $\lim\limits_{x\to 0} f(x+iy)$ existe lorsque $y < -h'$ et lorsque $y > h$, $2\pi\Phi_+(y)$ et $-2\pi\Phi_-(y)$ sont nécessairement équivalentes à cette limite, donc équivalentes entre elles, dans l'intervalle $-\infty < y < -h'$ et dans l'intervalle $h < y < \infty$. En d'autres termes, en vertu de (20), $\Phi(y)$ est équivalente à zéro dans ces deux intervalles; ce qui achève la démonstration du théorème du no 5.

La formule (17) est, sous l'hypothèse (III), remplacée par la suivante

$$\underset{\varepsilon\to+0}{\text{l.e.m.}}\ [f(\varepsilon+iy) - f(-\varepsilon+iy)] \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ixy}dx \sim 2\pi\Phi(y)\ . \qquad (21)$$

La formule (19) subsiste; elle se démontre en utilisant comme au no 7 le théorème de Cauchy et en tenant compte de la relation (21).

Le passage inverse. Le cas $n > 1$

9. Il nous suffira de démontrer le théorème suivant:

Si (I) *$F(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction entière de type exponentiel,*

(II) *$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs réelles données satisfaisant à* (3) *et h une quantité donnée, telle que*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ r^{-1} \log |F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)| \leqq h$$

ait lieu quels que soient les nombres réels arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\text{(III)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n \text{ existe},$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n \sim 0 \tag{22}$$

dans la partie de l'espace où

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n > h.$$

(Il est sous-entendu que les x_ν et les y_ν sont réels et que l'intégrale du premier membre de (22) est à définir comme limite en moyenne.)

En effet, quand l'énoncé précédent aura été démontré, on obtiendra le théorème I en prenant $h = a\sqrt{n}$ [voir (1)], le théorème II en prenant $h = h(\lambda)$, et en faisant dans les deux cas varier les λ_ν.

Nous n'allons pas encore démontrer le théorème énoncé. Nous démontrerons d'abord un théorème plus facile qu'on obtient en remplaçant l'hypothèse (III) par

$$\text{(III*)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n)| dx_1 \ldots dx_n \text{ existe}$$

et nous utiliserons à cet effet ce qui a été démontré au no 6.

Les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfaisant à la condition (3), on peut trouver $n(n-1)$ nombres réels $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_n^{(n-1)}$ tels que la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 s + \lambda_1' s_1 + \cdots + \lambda_1^{(n-1)} s_{n-1}, \\ x_2 &= \lambda_2 s + \lambda_2' s_1 + \cdots + \lambda_2^{(n-1)} s_{n-1}, \\ x_n &= \lambda_n s + \lambda_n' s_1 + \cdots + \lambda_n^{(n-1)} s_{n-1} \end{aligned} \tag{23}$$

exprimant les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ par les variables $s, s_1, \ldots s_{n-1}$ soit orthogonale. Les variables x_ν étant ainsi exprimées par les s_ν,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(s; s_1, \ldots, s_{n-1}) \tag{24}$$

devient une fonction entière du type exponentiel de $s, s_1, \ldots s_{n-1}$. En effectuant le changement de variables (23) dans l'intégrale qui figure dans la condition (III*) on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n)| dx_1 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |G(s; s_1 \ldots, s_{n-1})| ds \ldots ds_{n-1};$$

donc l'intégrale du second membre existe. Par un théorème de Fubini[8]) on en conclut que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(s\,;s_1,\ldots,s_{n-1}) |\, ds \tag{25}$$

existe si $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ appartient à un ensemble E de l'espace $(n-1)$-dimensionnel (réel) dont l'ensemble complémentaire est de mesure nulle.

Soit $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ un point fixe de E. Alors la fonction $G(s, s_1, \ldots, s_{n-1})$ est une fonction entière de type exponentiel de la variable complexe s. En posant

$$\lambda_1' s_1 + \cdots + \lambda_1^{(n-1)} s_{n-1} = \alpha_1, \ldots, \quad \lambda_n' s_1 + \cdots + \lambda_n^{(n-1)} s_{n-1} = \alpha_n$$

on voit par (23) et (24) que

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r^{-1} \log | G(-ir\,; s_1, \ldots, s_{n-1}) | =$$
$$= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r^{-1} \log | F(-i\lambda_1 r + \alpha_1, \ldots, -i\lambda_n r + \alpha_n) | \leqq h\ ,$$

en vertu de l'hypothèse (II). Et puisque (25) existe, nous concluons du résultat du no 6 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} G(s; s_1, \ldots, s_{n-1}) ds = 0 \text{ pour } t > h\ . \tag{26}$$

Effectuons maintenant le changement de variables (23) dans l'intégrale suivante, qui converge absolument en vertu de l'hypothèse (III*):

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)} F(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int e^{-i(st+s_1t_1+\cdots+s_{n-1}t_{n-1})} G(s\,; s_1, \ldots, s_{n-1})\, ds ds_1 \ldots ds_{n-1} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int e^{-i(s_1t_1+\cdots+s_{n-1}t_{n-1})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} G(s\,; s_1, \ldots, s_{n-1})\, ds \right\} ds_1 \ldots ds_{n-1} \\
&= 0 \text{ pour } t > h\ .
\end{aligned} \tag{27}$$

---

[8]) *G. Fubini*, Sugli integrali multipli (Rendic. della R. Acc. dei Lincei (5), 16. I. 1907). Voir, par exemple *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen, l. A. (Leipzig und Berlin, 1918), S. 621—634; *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire (Paris, 1916), p. 50—53.

En passant à la deuxième ligne de la formule (27), nous avons introduit les abréviations

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad y_1 + \lambda_2 \quad y_2 + \cdots + \lambda_n \quad y_n &= t \quad, \\ \lambda_1' \quad y_1 + \lambda_2' \quad y_2 + \cdots + \lambda_n' \quad y_n &= t_1 \quad, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{(n-1)} y_1 + \lambda_1^{(n-1)} y_2 + \cdots + \lambda_n^{(n-1)} y_n &= t_{n-1} \end{aligned} \tag{28}$$

et utilisé (24). En passant à la troisième ligne nous avons utilisé le théorème de Fubini, en changeant l'intégrale n-uple en intégrale itérée, où l'intégration relative à s doit être effectuée d'abord. Pour passer à la quatrième ligne nous nous sommes servis de (26) valable dans l'ensemble E, c'est-à-dire partout excepté peut être sur un ensemble de mesure nulle. En tenant compte de la valeur de t d'après la première ligne de (28) et en rapprochant la première et la dernière ligne de (27), nous arrivons à la conclusion désirée.

10. Lorsque nous remplaçons dans la démonstration du no 9 l'hypothèse (III*) par l'hypothèse (III), le changement de variables (23) effectué dans l'intégrale qui figure dans la condition (III) montre que

$$\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | F(x_1, \ldots, x_n) |^2 dx_1 \ldots dx_n = \int \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | G(s; s_1, \ldots, s_{n-1}) |^2 ds ds_1 \ldots ds_{n-1} .$$

La fonction entière, de type exponentiel, $G(s; s_1, \ldots s_{n-1})$ est donc aussi de carré intégrable. Du théorème de Fubini on conclut que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(s; s_1, \ldots, s_{n-1}) |^2 ds \tag{29}$$

existe, si $(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$ appartient à un ensemble E de l'espace (réel) $(n - 1)$-dimensionnel, dont l'ensemble complémentaire est de mesure nulle. Soit $(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$ un point fixe de E. Alors la fonction $G(s; s_1, \ldots s_{n-1})$ est une fonction entière, de type exponentiel, de la variable complexe s. Comme au no. 9, on conclut encore de l'hypothèse (II) que

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}}\, r^{-1} \log | G(-ir; s_1, \ldots, s_{n-1}) | \leqq h .$$

Et puisque (29) existe, le théorème du no 5 — démontré au no 8 — montre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s\,;s_1,\ldots,s_{n-1})e^{-ist}ds \sim 0\,,\quad \text{dans}\quad h<t<\infty\,. \tag{30}$$

Introduisons le changement de variable (28) dans la transformée de Fourier $\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ de $F(x_1,\ldots,x_n)$ donnée par la formule (9) et notons

$$\Psi(t\,;t_1,\ldots,t_{n-1}) = \Phi(y_1,\ldots,y_n)\,.$$

Ψ est donnée par l'équivalence

$$\Psi(t\,;t_1,\ldots,t_{n-1}) \sim \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int G(s\,;s_1,\ldots,s_{n-1})\,e^{-i(st+s_1t_1+\cdots+s_{n-1}t_{n-1})}ds\,ds_1\ldots ds_{n-1}\,.$$

Cela se voit en calculant le second membre de (9) comme limite en moyenne pour $p\to\infty$ d'intégrales étendues à des domaines sphériques $\Omega_p : x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqq p^2$. On a en, effet, ces domaines restant invariants lorsqu'on effectue le changement de variables (23),

$$\int_{\Omega_p}\cdots\int F(x_1,\ldots,x_n)\,e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}dx_1\ldots dx_n =$$

$$\int_{\Omega_p}\cdots\int G(s;\ldots,s_{n-1})\,e^{-i(st+\cdots+s_{n-1}t_{n-1}}ds\ldots ds_{n-1}\,.$$

La transformée de Fourier Ψ peut se calculer par l'intermédiaire de transformées de Fourier partielles successives[9]), en particulier de la manière suivante

$$\Psi(t;t_1,\ldots,t_{n-1}) \sim \frac{1}{(2\pi)^n}\underset{(n-1)}{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int} e^{-i(s_1t_1+\cdots+s_{n-1}t_{n-1})}\int_{-\infty}^{\infty}G(s;s_1,\ldots,s_{n-1})\,e^{-its}ds\cdot ds_1\ldots ds_{n-1}\,.$$

Par conséquent, en vertu de (30)

$$\Psi(t;t_1,\ldots,t_{n-1}) \sim 0,\quad \text{dans le demi-espace } t>h,$$

d'où

$$\Phi(y_1,y_2,\ldots,y_n) \sim 0$$

dans le demi-espace $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n>h$. La démonstration est ainsi achevée.

[9]) Pour une démonstration, voir: *M. Plancherel,* Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables, qui paraîtra prochainement dans les Commentarii Math. Helv.

Remarques diverses

11. Le but principal des remarques suivantes est de comparer les cas $n = 1$ et $n > 1$. Le cas $n = 1$ est le plus simple et on en sait davantage; en les comparant l'un à l'autre on aperçoit de nouveaux problèmes qui ne sont peut-être pas dépourvus d'intérêt. Mais avant d'aborder la confrontation des deux cas considérons quelques exemples.

a) Soit $G_\mu(z)$ une fonction entière d'une variable, de type exponentiel et de carré intégrable; soient $a_{\mu\nu}$ des constantes dont le déterminant n'est pas nul. Alors

$$\prod_{\mu=1}^{n} G_\mu(a_{\mu 1} z_1 + a_{\mu 2} z_2 + \cdots + a_{\mu n} z_n) = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

est une fonction entière de n variables, de type exponentiel et de carré intégrable, comme on peut facilement s'en convaincre. En supposant le théorème I pour les G_μ on le vérifie aisément pour F: la fonction Φ, transformée de Fourier de F, s'annule en dehors d'un certain intervalle n-dimensionnel comme on le voit en décomposant, après un changement de variables, l'intégrale (9) en un produit.

b) Voici un cas particulier simple de l'exemple a):

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{\sin^2 a_1 z_1}{z_1} \frac{\sin^2 a_2 z_2}{z_2} \cdots \frac{\sin^2 a_n z_n}{z_n} .$$

Ici Φ s'annule à l'extérieur d'un intervalle n-dimensionnel centré à l'origine, dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et ont respectivement les longueurs $4a_1, 4a_2, \ldots 4a_n$. A l'intérieur de cet intervalle $(4i)^n \Phi$ est $1, -1$ ou 0 suivant que le produit des coordonnées est positif, négatif ou nul. On peut, ici aussi, vérifier directement le théorème II.

c) Soit $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ égale à 1 à l'intérieur et égale à zéro à l'extérieur d'un "simplexe" n-dimensionnel (généralisation du tétraèdre) dont le $\nu^{\text{ième}}$ sommet est

$$y_1 = a_1^{(\nu)},\ y_2 = a_2^{(\nu)}, \ldots\ y_n = a_n^{(\nu)}$$

($\nu = 1, 2, \ldots n + 1$). Le volume V de ce simplexe est le quotient de la valeur absolue du déterminant

$$| a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)},\ \ldots\ a_n^{(\nu)},\ 1 |$$

par $n!$ Nous désignons ici le déterminant par une de ses lignes entre traits verticaux; nous obtenons les $n+1$ lignes en faisant parcourir à ν les $n+1$ valeurs 1, 2, 3, ..., $n+1$. Posons

$$i\,(a_1^{(\nu)} z_1 + a_2^{(\nu)} z_2 + \cdots + a_n^{(\nu)} z_n) = l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1)\,.$$

La fonction F donnée par (2) peut être écrite avec la notation que nous venons d'expliquer

$$F(z_1, \ldots, z_n) = n\,!\,V\;\frac{|\, e^{l_\nu},\; l_\nu^{n-1},\; l_\nu^{n-2},\; \ldots l_\nu,\; 1\,|}{|\, l_\nu^{n},\; l_\nu^{n-1},\; l_\nu^{n-2},\; \ldots l_\nu,\; 1\,|}\,.$$

Cette formule permet une vérification directe du théorème II.

d) Soit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}\, x_\mu x_\nu$$

une forme quadratique définie positive et

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu}\, x_\mu x_\nu$$

la forme inverse ou réciproque (c'est-à-dire les matrices $(a_{\mu\nu})$ et $(b_{\mu\nu})$ sont inverses). L'équation

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 1$$

définit un ellipsoïde E. Soit $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ égale à 1 à l'intérieur et égale à zéro à l'extérieur de E. La fonction F donnée par (2) est

$$F(z_1, \ldots, z_n) = |\, a_{ik}\,|_n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g(z_1, \ldots, z_n)}}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{g(z_1, \ldots, z_n)}\right)\,;$$

$J_{\frac{n}{2}}$ désigne ici la fonction de Bessel d'indice $\frac{n}{2}$ [10]. On sait[11] que pour $r \to \infty$

$$\lim \sqrt{2\pi r}\, e^{-r}\, |\, J_{\frac{n}{2}}(\pm\, i r)\,| = 1\,.$$

Pour vérifier le théorème II dans ce cas particulier, il suffit de mener à l'ellipsoïde E un plan tangent de normale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et de remarquer que sa distance à l'origine est précisément $\sqrt{g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$.

---

[10]) Cette formule est donnée par *Siegel*, loc. cit. [3]), p. 310, dans une notation différente.

[11]) Voir *G. N. Watson*, A treatise on the theory of Bessel functions (Cambridge 1922), p. 202—203.

12. Occupons-nous maintenant de la fonction $h(\lambda)$, attachée à la fonction entière F par la définition (5).

Pour une fonction entière $F(z)$ d'une variable la définition peut être simplifiée, puisque, si $F(z)$ est de type exponentiel, la valeur

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\; r^{-1} \log \mid F(-ir+\alpha) \mid$$

est *indépendante* de α comme on peut le montrer de différentes manières[12]). Par contre, s'il s'agit d'une fonction entière de type exponentiel de plusieurs variables, la valeur de la limite (4) peut dépendre de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Prenons en effet l'exemple b) du no précédent et la direction

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0; \tag{31}$$

la limite (4) est $-\infty$ si un des nombres réels $\alpha_\nu\ (\nu \geqq 2)$ s'annule ou, plus généralement, si $a_\nu \alpha_\nu$ est un multiple de π; pour les autres valeurs des α_ν la limite (4) devient $2a_1$ et atteint la valeur $h(\lambda)$ qui convient au choix (31). Pour la direction considérée, $h(\lambda)$ ne dépend pas de α_1; mais ce ne serait plus le cas pour la direction

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Dans l'exemple considéré, les systèmes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pour lesquels la limite (4) n'atteint pas sa borne supérieure (5) sont "rares" et la même circonstance se présente dans les autres exemples que nous avons examinés.

13. Si le nombre des variables n est égal à 1, il n'y a que deux directions purement imaginaires, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$. Si $n > 1$, $h(\lambda)$ est une fonction définie sur la surface sphérique (3), donc dans une variété de $n-1$ dimensions. La signification géométrique conférée à $h(\lambda)$ par le théorème II montre que $h(\lambda)$ est une fonction *continue*[13]). Quoique un résultat analogue pour les fonction entières de type exponentiel à une variable soit bien connu et puisse s'établir de diverses manières[14]), une démonstration de la continuité de $h(\lambda)$ essentiellement différente de celle donnée ici ne nous paraît pas immédiate lorsque $n > 1$.

---

[12]) Voir loc. cit. [2]) p. 590—591.

[13]) Comparez *H. Minkowski*, Volumen und Oberfläche (Math. Annalen Bd. 57 (1903) S. 447—495, S. 450; Gesammelte Abhandlungen (Leipzig und Berlin, 1911), Bd. II, S. 230—279, S. 233.

[14]) Voir loc. cit. [2]) p. 585, Satz II.

14. En supposant (5), nous savons, qu'à un nombre positif donné quelconque ε on peut faire correspondre un nombre positif $K(\varepsilon)$ tel que

$$|F(-ir\lambda_1+\alpha_1, \dots, -ir\lambda_n+\alpha_n)| < K(\varepsilon)e^{(h(\lambda)+\varepsilon)r} .$$

Si la fonction entière $F(z_1, \dots, z_n)$ n'est pas seulement du type exponentiel, mais est aussi de carré intégrable, elle peut être représentée, comme nous l'avons démontré, par (2) et ainsi le raisonnement du no. 3 montre (voir (7)) que, dans le second membre, $K(\varepsilon)$ ne dépend pas effectivement de ε ni de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et que $h(\lambda)+\varepsilon$ peut être remplacé par $h(\lambda)$.

15. Voici quelques corollaires de nos théorèmes I et II.

A. *Si la fonction entière $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de type exponentiel est de carré intégrable mais n'est pas identiquement nulle, le domaine convexe fermé $\mathfrak{K}$, dont la fonction $h(\lambda)$, mesurant la croissance de $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est la "fonction d'appui", est n-dimensionnel.*

En effet, si le domaine convexe borné et fermé $\mathfrak{K}$ avait moins de n dimensions, sa mesure n-dimensionnelle (et même son étendue au sens de Jordan) serait nulle et ainsi la fonction $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ représentée par (2), serait identiquement nulle, contrairement à l'hypothèse.

On sait bien que si une fonction est intégrable ainsi que sa valeur absolue dans tout l'espace à n dimensions, elle n'est pas nécessairement de carré intégrable. Il est, par suite, intéressant de remarquer que:

B. *Si la fonction entière $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de type exponentiel est, ainsi que sa valeur absolue, intégrable dans tout l'espace réel à n dimensions, elle est aussi de carré intégrable.*

En effet, comme nous l'avons montré aux nos 6 et 9, l'intégrabilité de $F(x_1, \dots, x_n)$ entraîne que $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ est une fonction bornée (c'est même une fonction continue), nulle en dehors d'un certain domaine borné; elle est donc de carré intégrable dans tout l'espace. Par suite, sa transformée de Fourier $F(x_1, \dots, x_n)$ est aussi de carré intégrable.

Notons encore, en passant, que si nous remplacions l'hypothèse (III*) par l'hypothèse

$$\text{(III**)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \quad \text{existe} ,$$

où $1 < p < 2$, la transformée de Fourier $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ existerait encore et pourrait se calculer en interprétant l'intégrale (9) comme limite en moyenne d'ordre p[15]). Φ serait alors une fonction telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int | \Phi(y_1, \ldots, y_n) |^q dy_1 \cdots dy_n \quad \text{existe} ,$$

où $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Des raisonnements analogues à ceux du no 10 montreraient que Φ est équivalente à zéro en dehors du domaine borné caractérisé par la fonction d'appui $h(\lambda)$.

q étant supérieur à 2, Φ est par conséquent de carré intégrable dans ce domaine borné, donc de carré intégrable dans tout l'espace. Il en est donc de même de F. D'où la proposition:

B$'$. *Si la fonction entière $F(z_1, \ldots, z_n)$ de type exponentiel vérifie la condition* (III**) *où* $1 \leqq p < 2$, *elle est aussi de carré intégrable.*

Une fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ de carré intégrable dans tout l'espace ne tend pas nécessairement vers zéro lorsque le point $(x_1, \ldots, x_n)$ s'éloigne à l'infini. C'est pourquoi nous noterons la proposition:

C. *Si la fonction entière $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de type exponentiel est de carré intégrable, elle tend uniformément vers zéro avec $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}$ pour les valeurs réelles de $x_1, \ldots, x_n$.*

On tire ce résultat de la représentation (2).

16. Si la fonction entière de type exponentiel F ne dépend que d'une variable, les théorèmes A, B, C du no précédent s'obtiennent facilement par la méthode bien connue de Phragmén et de Lindelöf. En particulier, B et C découlent de la remarque suivante:

D. *Si la fonction analytique $G(z)$ est régulière et de type exponentiel dans le domaine*

$$-\alpha \leqq \arg z \leqq \alpha \ , \ |z| \geqq a \tag{32}$$

(*où α et a sont des constantes positives données*) *et si pour x réel*

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = L \tag{33}$$

existe, alors

$$\lim_{x \to +\infty} G'(x) = 0 \ . \tag{34}$$

[15]) Voir *E. C. Titchmarsh*, A contribution to the theory of Fourier transforms (Proc. London Math. Soc. (2), vol. 23 (1925), p. 279—289; *M. Plancherel*, Formules de Parseval et transformations fonctionnelles orthogonales (Commentarii Math. Helv., vol. 1 (1929), p. 273—288.

On dit que $G(z)$ est de type exponentiel dans le domaine (33) s'il existe une constante positive A telle que

$$G(z)\, e^{-A\,|z|}$$

y est bornée. Supposons (ce que nous pouvons faire sans nuire à la généralité) que $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et déterminons b par l'équation $b \sin \alpha = A$.

Considérons la fonction $H(z) = G(z)\, e^{ibz}$ dans la moitié supérieure de (32)

$$0 \leqq \arg z \leqq \alpha \ , \quad |z| \geqq a \ . \tag{35}$$

On voit immédiatement que la fonction $H(z)$ est bornée sur l'ensemble de tous les points finis de la frontière du domaine. Mais, puisque $H(z)$ est de type exponentiel et que l'ouverture de l'angle qui aboutit à ∞ est inférieure à π, $H(z)$ est bornée dans (35)[16]. Ils s'ensuit que $G(z) = H(z)\, e^{-ibz}$ est bornée dans la bande $0 \leqq y \leqq c$, $x \geqq a + c \operatorname{cotg} \alpha$ où c est une constante quelconque puisque, outre $H(z)$, le facteur e^{-ibz} y est aussi borné. (Nous posons $z = x + iy$, avec x, y réels.) En faisant le même raisonnement dans la moitié inférieure du domaine (32), on constate que $G(z)$ reste bornée dans la bande

$$-c \leqq y \leqq c \ , \qquad x \geqq a + c \operatorname{cotg} \alpha \ . \tag{36}$$

Mais $G(z)$ tend, par hypothèse, vers L lorsque z tend vers ∞ le long de l'axe réel, le bissecteur de la bande (32). Il s'ensuit que, pour $z \to \infty$, $G(z)$ tend vers L à l'intérieur de la bande (36), uniformément par rapport à y, si $-c + \varepsilon \leqq y \leqq c - \varepsilon$[17]). Puisque

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(w) - L}{(w - x)^2}\, dw \ ,$$

l'intégrale étant prise le long du cercle $|w - x| = \frac{1}{2} c$, nous arrivons bien à la conclusion désirée (34).

17. Considérons le cas $n = 1$ du théorème B du no 15. Comme $F(z)$, $\int\limits_0^z F(z)\,dz = G(z)$ est une fonction entière de type exponentiel. $F(x)$ étant absolument intégrable entre $-\infty$ et $+\infty$, la limite (33) existe et, par conséquent, on a (34), donc

[16]) Voir, par exemple, *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925), Bd. I, Abschnitt III, Nr. 322, p. 145—146.

[17]) Voir, par exemple, loc. cit. [16]). Nr. 276 et 277, p. 138 et p. 321—322 un résultat analogue.

$$| F(x) |^2 < | F(x) | = | G'(x) |$$

pour x suffisamment grand. Les circonstances étant analogues pour $x \to -\infty$, le théorème B est démontré pour $n = 1$.

Pour ramener le cas $n = 1$ du théorème C du no 15 au théorème D du no 16, il suffit de poser $\int_0^z F(z)^2 dz = G(z)$.

Le théorème A du no 15 se démontre un peu différemment. Si $F(z)$ est de type exponentiel et de carré intégrable et si le segment $(-h', h)$ considéré au no 5 se réduit à un seul point, le point $y = h$, la fonction entière

$$\int_0^z (F(z)e^{-ihz})^2 dz = G(z)$$

satisfait aux conditions suivantes:
$G(z)$ est fonction entière du type exponentiel;
$G(iy)e^{-\varepsilon|y|}$ reste bornée pour y réel, quelque soit le nombre positif ε (la borne pourrait dépendre de ε);
$G(x)$ reste bornée pour x réel.

On en conclut[18]) que $G(z)$ est une constante, dont on voit que la valeur est nulle en prenant $z = 0$; donc, $F(z)$ est identiquement nulle.

18. Nous avons donc démontré le cas $n = 1$ des théorèmes A, B, C du no 15 de deux manières différentes, avec et sans emploi de la transformation de Fourier; mais le cas $n > 1$ n'a été démontré que d'une manière. La même circonstance s'est présentée aux nos précédents et la situation des théorèmes I et II est aussi un peu analogue: dans le cas $n = 1$ nous avons employé très explicitement la théorie des fonctions analytiques; dans le cas $n > 1$ implicitement seulement, à travers le cas $n = 1$. Cette situation pose des problèmes qui nous paraissent intéressants mais nous ne nous arrêterons pas à les formuler.

Observons encore que notre traitement du cas bien connu $n = 1$ du théorème I implique quelques corollaires qui nous paraissent moins connus et en particulier le suivant:

Soient $F(z)$ une fonction entière de type exponentiel et de carré intégrable,

$$\Phi(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixy} dx$$

sa transformée de Fourier et

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(Z) e^{-zZ} dZ$$

---

[18]) Voir, par exemple, loc. cit. [16]) Bd. I, Abschnitt III, Nr. 325, p. 147—148.

sa transformée de Borel. Pour que Φ (y) soit équivalente à une fonction analytique dans le voisinage d'un point donné y_0, il faut et il suffit que la transformée de Borel, qui est régulière et univoquement définie dans le voisinage du point $z = \infty$ ainsi que, par prolongement analytique immédiat, dans chacun des deux demi-plans $x > 0$ et $x < 0$, soit prolongeable analytiquement des deux côtés au point $z = iy_0$.

Il est évident, d'après la formule (21), que la conditionimpliquant $f(z)$ est suffisante pour l'analyticité de $\Phi(y)$. Il suffira de démontrer sa nécessité dans le cas $-h' < y_0 < h$. Nous partirons pour cela de la formule (19). Si Φ (y) est analytique au point $y = y_0$, nous pouvons, d'après le théorème de Cauchy, remplacer un petit segment $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ de la droite d'intégration par un demi-cercle de centre y_0 et de rayon ε, situé à volonté d'un côté ou de l'autre du segment. L'intégrale (19), à chemin d'intégration ainsi modifié, représente comme on le sait une fonction analytique, régulière dans le plan coupé le long du chemin d'intégration. On voit ainsi que $f(z)$ est prolongeable à travers le segment $(i(y_0 - \varepsilon), i(y_0 + \varepsilon))$, soit dans un sens, soit dans l'autre.

Les points $-ih'$ et ih sont toujours des points singuliers de $f(z)$.

19. Observons pour terminer que la méthode de Phragmén et de Lindelöf permet de démontrer le résultat suivant qui dépasse sensiblement celui du no 5:

Nous supposons que

(I) $F(z)$ *soit une fonction entière du type exponentiel,*

(II) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |F(-ir)| = h\,, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |F(ir)| = h',$$

(III***) $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\ .$$

Alors

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} F(x)\, e^{-ixy}\, dx = 0 \tag{37}$$

pour $y > h$ et pour $y < -h'$.

Ce théorème diffère sur deux points de celui du no 5. D'abord, la conclusion est plus précise. L'égalité (37) ayant lieu sans exception en dehors de l'intervalle $(-h', h)$, nous savons maintenant que la valeur principale de l'intégrale figurant dans la conclusion du théorème du no 5 converge vers zéro dans le domaine considéré, au sens ordinaire et non seulement en moyenne. Puis, l'hypothèse (III***) est moins restrictive que (III) car nous savons (voir les nos 15—17) qu'une fonction satisfaisant à (III) ou à (III*) satisfait nécessairement à (III***). Mais il y a des fonctions entières satisfaisant à (I), (II), (III***) et qui ne satisfont pas à (III) comme par exemple

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{ixy}\,dy}{\sqrt{1-y^2}} .$$

On peut voir de plusieurs manières que la fonction $J_0(x)$ n'est pas de carré intégrable dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$; on peut pour cela faire usage de la formule asymptotique bien connue ou bien remarquer que sa transformée de Fourier n'est pas de carré intégrable.

Nous démontrerons le théorème énoncé en supposant $y < -h'$. Nous posons

$$-\frac{y+h'}{2} = \delta ,$$

$$F(z)e^{-i(y+\delta)z} = F(z)e^{i(h'+\delta)z} = G(z) . \tag{38}$$

Donc

$$\delta > 0 \tag{39}$$

et $G(z)$ est une fonction entière du type exponentiel. Les hypothèses (II) et (III***) entraînent, x étant supposé réel et r positif,

$$|G(ir)| = |F(ir)|\,e^{-(h'+\delta)r} \to 0 , \quad \text{pour} \quad r \to \infty ,$$

$$|G(x)| = |F(x)| \to 0 , \quad \text{pour} \quad x \to +\infty \quad \text{et} \quad x \to -\infty .$$

On en conclut, en faisant usage de résultats bien connus[19]), d'abord que $G(z)$ reste bornée, puis que $G(z)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{|z|}$ uniformément dans le demi-plan supérieur fermé. Notons ce résultat sous la forme

$$\lim_{r\to\infty} \mu(r) = 0 , \tag{40}$$

où

$$\mu(r) = \operatorname*{Max.}_{0 \leq \varphi \leq \pi} |G(re^{i\varphi})| . \tag{41}$$

---

[19]) Voir, par exemple, loc. cit. [16]), Bd. I, Abschnitt III, Nr. 330, p. 149, 334 et Nr. 339, p. 151, 336.

Il nous faut évaluer l'intégrale

$$\int_{-r}^{r} F(x)\, e^{-ixy}\, dx = \int_{-r}^{r} G(x)\, e^{i\delta x} dx = -i \int_{0}^{\pi} G(re^{i\varphi})\, r e^{i\delta r e^{i\varphi}} e^{i\varphi} d\varphi$$

où pour passer de la seconde à la troisième intégrale nous avons remplacé le chemin d'intégration rectiligne par un demi-cercle[20]). Donc, d'après (41)

$$\left| \int_{-r}^{r} F(x)\, e^{-ixy} dx \right| \leqq \mu(r) \int_{0}^{\pi} e^{-\delta r \sin\varphi}\, r\, d\varphi\ .$$

Or, en remarquant que $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ décroit de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on voit que le second membre de cette inégalité est inférieur à

$$2\mu(r) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta r \cdot \frac{2}{\pi}\varphi}\, r\, d\varphi$$

et tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ en vertu de (39) et (40) .

La seconde partie de ce mémoire, que nous pensons publier prochainement, s'occupera d'autres corollaires des théorèmes I et II et d'autres applications de la méthode de Phragmén-Lindelöf.

(Reçu le 3 mars 1937.)

[20]) Comparer *C. L. Siegel*, loc. cit. [3]), p. 316.