Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables.

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10185

Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables

Par M. Plancherel, Zurich

1. Nous avons eu à utiliser dans le mémoire qui précède[1]) quelques résultats de la théorie des transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables, en particulier un théorème sur le calcul par itération d'une intégrale de Fourier multiple[2]). Ce théorème n'a probablement pas échappé à ceux qui se sont occupés de la théorie des transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables. Cependant, malgré son importance, il n'a été, à notre connaissance, nulle part explicitement formulé et démontré. Le but primitif des pages suivantes était de donner une démonstration de ce théorème en supposant connue du lecteur la théorie des transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables. La théorie générale de ces transformations est indépendante du nombre des variables; le cas des fonctions d'une variable en donne déjà l'essentiel et se trouve maintenant exposé dans plusieurs ouvrages[3]). A la rédaction, il s'est cependant avéré utile de ne pas nous borner à donner la démonstration du théorème sur le calcul par itération des intégrales de Fourier, mais de donner aussi celle d'un théorème plus général relatif aux transformations linéaires bornées de l'espace de Hilbert des fonctions de plusieurs variables (nos 7—8) et dans ce but, comme dans l'intérêt du lecteur, d'exposer à nouveau d'une manière succincte les éléments nécessaires de la théorie de la représentation analytique de ces transformations (nos 4—6).

2. Introduisons quelques notations et quelques définitions. Nous désignerons par $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^n(x)$ l'espace euclidien à n dimensions, par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point de cet espace.

---

[1]) *M. Plancherel* et *G. Pólya*, Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. (Commentarii math. helvetici, vol. 9 (1937), p. 224—248..)

[2]) Ce théorème est formulé ci-dessous au no 3 III.

[3]) Voir p. ex. *E. W. Hobson*, The theory of functions of a real variable, 2 ed. (Cambridge 1926), vol. II, p. 742—752; *S. Bochner*, Vorlesungen über Fouriersche Integrale (Leipzig 1932), p. 169—178; *E. C. Titchmarsh*, The theory of functions (Oxford 1932), p. 436—439; *N. Wiener*, The Fourier Integral and certain of its applications (Cambridge 1933), p. 46—67. Le cas des fonctions de plusieurs variables est traité par *M. H. Stone*, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis (New York 1932), p. 64.

Deux fonctions $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x)=g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seront dites *équivalentes* dans un ensemble E lorsqu'elles sont définies et égales en tous les points d'un ensemble E_1 contenu dans E et tel que $E-E_1$ soit de mesure n-dimensionnelle nulle; en symbole: $f \sim g$ dans E. Nous dirons aussi que f et g sont égales *presque partout* dans E.

Nous dirons que $f(x)$ est de carré intégrable dans $\mathfrak{R}^n$ ou appartient à l'espace de Hilbert $L_2^{(n)}$ (en symbole: $f \varepsilon L_2^{(n)}$) lorsque $f(x)$ est, dans $\mathfrak{R}^n$, équivalente à une fonction mesurable $g(x)$ définie en tout point de $\mathfrak{R}^n$, telle que

$$\int_{\mathfrak{R}^n} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |g(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n < \infty .$$

Nous définirons alors $\int_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx$ par

$$\int_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{R}^n} |g(x)|^2 dx .$$

La convergence en moyenne (quadratique) d'une suite $f_\mu(x)$ de fonctions de carré intégrable:

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \int_{\mathfrak{R}^n} |f_\mu - f_\nu|^2 dx = 0 ,$$

entraîne, comme on le sait (théorème de Riesz-Fischer), l'existence d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable — déterminée dans $\mathfrak{R}^n$ à une équivalence près — telle que

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{\mathfrak{R}^n} |f - f_\mu|^2 dx = 0 .$$

Nous écrirons alors symboliquement

$$\underset{\mu \to \infty}{\text{l.e.m.}}\ f_\mu(x) = f(x) .$$

Si $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n)$, le symbole

$$f(x') \sim \int_{\mathfrak{R}^{n-p}} g(x', x'')\, dx''$$

signifiera que: a) $g(x', x'')$ est une fonction équivalente dans $\mathfrak{R}^n$ à une fonction mesurable du point $x = (x', x'')$; b) si Ω''_μ, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite arbitraire d'ensembles mesurables bornés de l'espace $\mathfrak{R}^{n-p}(x'')$, telle que $\lim_{\mu \to \infty} \Omega''_\mu = \mathfrak{R}^{n-p}(x'')$, les fonctions

$$f_\mu(x') = \int_{\Omega''_\mu} g(x', x'')\, dx''$$

sont de carré intégrable dans $\mathfrak{R}^p(x')$ et y convergent en moyenne vers $f(x')$. — Ici, comme plus haut, $g(x', x'')$ peut n'être définie que presque partout dans Ω''_μ.

Représentons encore par (x, y), (x', y'), (x'', y'') les expressions

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu\,,\ (x', y') = \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu y_\nu\,,\ (x'', y'') = \sum_{\nu=p+1}^{n} x_\nu y_\nu\,. \tag{1}$$

Nous désignerons par I_x l'intervalle n-dimensionnel (parallélоèdre) constitué par les points ξ vérifiant les inégalités

$$0 \leqq \xi_\nu \operatorname{sgn} x_\nu \leqq |x_\nu|,\ \nu = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Donc, si on pose $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(x_1 x_2 \ldots x_n)$, on aura

$$\int_{I_x} f(\xi)\, d\xi = \operatorname{sgn} x \cdot \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} d\xi_2 \cdots \int_0^{x_n} f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\, d\xi_n \tag{2}$$

lorsque f est intégrable dans I_x. Nous écrirons encore l'intégrale du second membre sous la forme abrégée $\int_0^x f(\xi) d\xi$.

Enfin, si $f(x)$ est une fonction absolument continue du point x dans $\mathfrak{R}^n$, nous noterons

$$D_x^n f(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ . \tag{3}$$

On sait que $D_x^n f(x)$ est équivalente à une fonction mesurable dans $\mathfrak{R}^n$.

3. Les propriétés essentielles de la transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable peuvent se formuler comme suit à l'aide des notations et des définitions données:

I. Si $f \varepsilon L_2^{(n)}$, il existe une fonction $F \varepsilon L_2^{(n)}$, telle que dans $\mathfrak{R}^n$:

a) $F(y) \sim \int_{\mathfrak{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx$,

b) $f(x) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathfrak{R}^n} F(y) e^{i(x,y)} dy$,

c) $\int_{\mathfrak{R}^n} |F(y)|^2 dy = (2\pi)^n \int_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx$.

II. a) Si $f \varepsilon L_2^{(n)}$, la fonction $F(y)$ donnée par I a) vérifie pour tout y la relation

$$\int_0^y F(\eta)\,d\eta = \int_{\Re^n} f(x) \int_0^y e^{-i(x,\eta)}\,d\eta\,dx = \int_{\Re^n} f(x) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{e^{-ix_\nu y_\nu} - 1}{-ix_\nu}\,dx\,,$$

d'où l'équivalence

$$F(y) \sim D_y^n \int_{\Re^n} f(x) \int_0^y e^{-i(x,\eta)}\,d\eta\,dx\,.$$

b) Inversement, la fonction $f(x)$ vérifie pour tout x la relation

$$(2\pi)^n \int_0^x f(\xi)\,d\xi = \int_{\Re^n} F(y) \int_0^x e^{i(\xi,y)}\,d\xi\,dy = \int_{\Re^n} F(y) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{e^{ix_\nu y_\nu} - 1}{iy_\nu}\,dy\,,$$

d'où l'équivalence

$$f(x) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n D_x^n \int_{\Re^n} F(y) \int_0^x e^{i(\xi,y)}\,d\xi\,dy\,.$$

III. Si $f(x) = f(x', x'')\ \varepsilon\ L_2^{(n)}$ et si $1 \leqq p < n$:

a) $$F_{n-p}(x', y'') \sim \int_{\Re^{n-p}} f(x', x'') e^{-i(x'',y'')}\,dx''$$

est une fonction de (x', y''), de carré intégrable dans $\Re^n(x', y'')$.

b) $$F_{p,n-p}(y) = F_{p,n-p}(y', y'') \sim \int_{\Re^p} F_{n-p}(x', y'') e^{-i(x',y')}\,dx'$$

est une fonction de $y = (y', y'')$, de carré intégrable dans $\Re^n(y)$.

c) $F(y)$ étant la fonction définie dans I a), on a dans $\Re^n(y)$

$$F(y) \sim F_{p,n-p}(y)$$

et

$$\int_{\Re^n(y)} |F(y)|^2 dy = \int_{\Re^n(x',y'')} |F_{n-p}(x', y'')|^2 dx'dy''\,.$$

La fonction F ci-dessus définie est appelée la transformée de Fourier de f. On la norme quelquefois en la multipliant par le facteur

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\,.$$

4. Soit T une transformation linéaire bornée de $L_2^{(n)}$. Donc:

1. Pour toute fonction $f \varepsilon L_2^{(n)}$, $F(x) = T(f\,;\,x) \varepsilon L_2^{(n)}$.
2. Pour toutes fonctions $f_1, f_2 \varepsilon L_2^{(n)}$ et toutes constantes complexes a_1, a_2

$$T(a_1 f_1 + a_2 f_2) \sim a_1 T f_1 + a_2 T f_2.$$

3. Il existe un nombre b fini, tel que pour toute fonction f de $L_2^{(n)}$

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^n} |T(f\,;\,x)|^2 dx \leqq b^2 \int\limits_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

La borne inférieure de b sera désignée par b_T et appelée la borne de T.

A toute transformation linéaire bornée T, définie dans $L_2^{(n)}$, on peut associer une transformation T^*, elle aussi linéaire et bornée dans $L_2^{(n)}$, caractérisée par la relation

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^n} Tf \cdot \bar{g}\, dx = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f \cdot \overline{T^* g}\, dx\ ,\ f \varepsilon L_2^{(n)},\ g \varepsilon L_2^{(n)}. \tag{4}$$

T^* est appelée *l'adjointe* ou *l'associée* de T. Sa borne b_{T^*} est égale à b_T [4]. On a $(T^*)^* = T$. $\bar{g}$ désigne le conjugué complexe de g.

Une transformation linéaire bornée possède une *génératrice* $\tau(x\,;\,y) = \tau(x_1, \ldots, x_n\,;\,y_1, \ldots, y_n)$ ayant les propriétés suivantes:

a) $\tau(x\,;\,y)$ est pour tout y, une fonction absolument continue de x et $D_x^n \tau(x\,;\,y)$ est équivalente dans $\mathfrak{R}^n(x)$ à une fonction de x de carré intégrable.

---

[4]) L'existence d'une adjointe T^* unique, bornée, peut se déduire de la proposition suivante: Soit $l(f)$ une fonctionnelle linéaire bornée de $L_2^{(n)}$, c'est-à-dire une fonction numérique telle que $l(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)) = a_1 l(f_1) + a_2 l(f_2)$, $|l(f)|^2 \leqq m^2 \int\limits_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx$. Il existe une fonction g de $L_2^{(n)}$, telle que $l(f) = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f \bar{g}\, dx$. Car, si φ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ est un système orthogonal normé complet de $\mathfrak{R}^n$ et si $l(\varphi_\nu) = a_\nu$, si $b_\nu = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f \bar{\varphi}_\nu\, dx$, la continuité de $l(f)$ entraîne $l(f) = \sum\limits_1^\infty a_\nu b_\nu$. De l'inégalité $|\,l(f)\,|^2 = |\sum\limits_1^\infty a_\nu b_\nu\,|^2 \leqq m^2 \sum\limits_1^\infty |\,b_\nu\,|^2$, valable pour toute suite b_ν telle que $\sum\limits_1^\infty |\,b_\nu\,|^2$ converge, découle $\sum\limits_1^\infty |\,a_\nu\,|^2 \leqq m^2$ et d'après le théorème de Riesz-Fischer l'existence d'une fonction g ayant les a_ν comme coefficients de Fourier et répondant à la question. L'application de cette proposition à la fonctionnelle linéaire bornée $l(f) = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} Tf\,.\,\bar{h}\, dx$ fait correspondre à tout h de $L_2^{(n)}$ une fonction $h^* = T^* h$ telle que $l(f) = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f \bar{h}\, dx$. Au sujet de la notion d'adjointe en général, voir l'ouvrage de Stone cité sous [3]).

b) $\tau(x\,;y)$ est, pour tout x, une fonction absolument continue de y et $D_y^n\tau(x\,;y)$ est équivalente dans $\mathfrak{R}^n(y)$ à une fonction de y de carré intégrable.

c) $\tau(x;y)$ est une fonction continue de (x,y) dans $\mathfrak{R}^{2n}(x,y)$.

$D_x^n\tau(x;y)$ et $D_y^n\tau(x\,;y)$ sont équivalentes dans $\mathfrak{R}^{2n}$ à des fonctions mesurables de (x,y) ; $\int\limits_{\mathfrak{R}^n} |D_x^n\tau(x\,;y)|^2 dx$ est une fonction continue de y, $\int\limits_{\mathfrak{R}^n} |D_y^n\tau(x\,;y)|^2 dy$ est une fonction continue de x.

d) Pour toute fonction f de $L_2^{(n)}$, et pour tout point x

$$\int\limits_0^x T(f\,;\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,D_\xi^n\overline{\tau(\xi\,;x)}\,d\xi\,, \tag{5}$$

d'où l'équivalence

$$T(f;x) \sim D_x^n \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,D_\xi^n\overline{\tau(\xi\,;x)}\,d\xi\,. \tag{6}$$

e) Pour toute fonction f de $L_2^{(n)}$ et pour tout point x

$$\int\limits_0^x T^*(f\,;\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,D_\xi^n\tau(x\,;\xi)\,d\xi\,, \tag{7}$$

$$T^*(f\,;x) \sim D_x^n \int\limits_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,D_\xi^n\tau(x\,,\xi)\,d\xi\,. \tag{8}$$

f) $\tau(x\,;y)$ est univoquement déterminée par les conditions a et d et par la condition (de normation)

$$\tau(x\,;y) = \int\limits_0^x D_\xi^n\tau(\xi\,;y)\,d\xi\,. \tag{9}$$

J'ai donné, il y a longtemps, une démonstration de l'existence de la génératrice τ[5]) dans le cas $n=1$. Cette démonstration, qui s'étend sans autre au cas $n>1$, se basait sur la construction suivante de $\tau(x\,;y)$.

Soit $\varphi_\mu(x)$, $\mu=1,2,3,\ldots$ un système orthogonal normé et complet de $\mathfrak{R}^n$ et soit $\Phi_\mu = T\varphi_\mu$. τ est alors donnée par

$$\tau(x\,;y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_0^x \varphi_\mu(\xi)\,d\xi \int\limits_0^y \overline{\Phi_\mu(\eta)}\,d\eta \tag{10}$$

[5]) *M. Plancherel*, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. 30 (1910), p. 289—335, § 6).

Si on suppose l'existence de l'adjointe T^* déjà démontrée, on peut donner une autre construction de τ et une vérification plus rapide de ses propriétés. Désignons pour cela par $I_x(\xi)$ la fonction égale à 1 aux points ξ appartenant à l'intervalle I_x et égale à zéro aux points extérieurs à I_x. $I_x(\xi)$ étant une fonction de carré intégrable dans $\mathfrak{R}^n(\xi)$, ses transformées $T(I_x;\xi)$, $T^*(I_x;\xi)$ ont la même propriété et

$$\operatorname{sgn} x \cdot \int_0^x T(f;\xi)\,d\xi = \int_{I_x} T(f;\xi)\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} T(f;\xi)\,\overline{I_x(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,\overline{T^*(I_x;\xi)}\,d\xi \tag{11}$$

ceci en vertu de la définition de I_x et de la formule (4). De même,

$$\operatorname{sgn} x \cdot \int_0^x T^*(f;\xi)\,d\xi = \int_{I_x} T^*(f;\xi)\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} T^*(f;\xi)\,\overline{I_x(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)\,\overline{T(I_x;\xi)}\,d\xi . \tag{12}$$

D'autre part,

$$\int_{I_y} T(I_x;\xi)\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} T(I_x;\xi)\,\overline{I_y(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} I_x(\xi)\,\overline{T^*(I_y;\xi)}\,d\xi = \int_{I_x} \overline{T^*(I_y;\xi)}\,d\xi . \tag{13}$$

Donc, si on définit $\tau(x;y)$ par une des égalités

$$\begin{aligned}\tau(x;y) &= \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \cdot \int_{I_x} T^*(I_y;\xi)\,d\xi = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \int_{I_y} \overline{T(I_x;\xi)}\,d\xi \\ &= \operatorname{sgn} y \cdot \int_0^x T^*(I_y;\xi)\,d\xi = \operatorname{sgn} x \cdot \int_0^y \overline{T(I_x;\xi)}\,d\xi ,\end{aligned} \tag{14}$$

les formules (11), (12), (13) montrent que τ vérifie les conditions a, b, d, e, car dans $\mathfrak{R}^n(x)$, resp. $\mathfrak{R}^n(y)$,

$$D_x^n \tau(x;y) \sim \operatorname{sgn} y \cdot T^*(I_y;x)\,,\ D_y^n \tau(x;y) \sim \operatorname{sgn} x \cdot \overline{T(I_x;y)}\,; \tag{15}$$

elles montrent aussi que la génératrice $\tau^*(x;y)$ de T^* est donnée par

$$\tau^*(x;y) = \overline{\tau(y;x)} . \tag{16}$$

La continuité de τ comme fonction du point (x, y) de l'espace $\mathfrak{R}^{2n}(x, y)$ se démontre en considérant la différence $\tau(x+h;y+k)-\tau(x;y)$ c'est-à-dire $\tau(x_1+h_1,\ldots;\ldots y_n+k_n)-\tau(x_1,\ldots;\ldots, y_n)$ qui est égale à

$$\operatorname{sgn}(x+h) \cdot \operatorname{sgn}(y+k) \int_{I_{y+k}} T(I_{x+h};\xi)\,d\xi - \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \cdot \int_{I_y} T(I_x;\xi)\,d\xi . \tag{17}$$

Dans le cas où sgn $(x+h) \cdot$ sgn $(y+k) =$ sgn $x \cdot$ sgn y, cette différence est, au signe près, égale à

$$\int_{I_y} T(I_{x+h} - I_x;\ \xi)\, d\xi + \int_{\Re^n} T(I_{x+h};\ \xi)\ [I_{y+k}(\xi) - I_y(\xi)]\, d\xi\ .$$

Le carré de la valeur absolue du premier terme est, comme le montrent l'inégalité de Schwarz et la définition de b_T, inférieur au produit de $b_T^2 \prod\limits_{\nu=1}^{n} |y_\nu|$ par la mesure totale des parties non communes des intervalles I_x et I_{x+h}, mesure qui tend vers zéro avec h. Le second terme s'estime, lui aussi, à l'aide de l'inégalité de Schwarz et le carré de sa valeur absolue est inférieur à

$$b_T^2 \int_{\Re^n} |\, I_{x+h}(\xi)\, |^2 d\xi \cdot \int_{\Re^n} |\, I_{y+k}(\xi) - I_y(\xi)\, |^2 d\xi,$$

donc inférieur au produit de $b_T^2 \prod\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu + h_\nu|$ par la mesure totale des parties non communes des intervalles I_y et I_{y+k}; il tend vers zéro avec k.

Le cas où sgn $x \cdot$ sgn y et sgn $(x+h) \cdot$ sgn $(y+k)$ sont différents ne se présente, lorsque h et k sont suffisamment petits, que si une des quantités x_ν ou y_ν est nulle. Dans ce cas I_x ou I_y sont des intervalles de dimension inférieure à n, le second terme de (17) est nul et l'estimation du premier terme montre encore qu'il tend vers zéro avec h ou avec k.

La continuité de $\int_{\Re^n} |\, D_\xi^n \tau(x\,;\ \xi)|^2 d\xi$ et celle de $\int_{\Re^n} |\, D_\xi^n \tau(\xi,\ x)|^2\ d\xi$ se démontrent aussi simplement en partant de la formule (15) qui donne, p. ex.

$$\int_{\Re^n} |\, D_x^n \tau(x\,;\, y)\, |^2 dx = \int_{\Re^n} |\ T^*(I_y;\ \xi)\, |^2 d\xi\ .$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

De la continuité de $\tau(x\,;\, y)$ découle que τ est une fonction mesurable du point $(x,\, y)$ de $\Re^{2n}$ et que $D_x^n \tau$, $D_y^n \tau$ sont équivalentes dans $\Re^{2n}$ à des fonctions mesurables de $(x\,;\, y)$.

Il reste à prouver le point f). Soit $\sigma(x\,;\, y)$ une fonction que nous supposons absolument continue de x pour toute valeur de y, normée par

$$\sigma(x\,;\, y) = \int_0^x D_\xi^n \sigma(\xi\,;\, y)\, d\xi$$

et telle que, pour toute fonction f de $L_2^{(n)}$

$$\int_0^x T(f;\ \xi)\, d\xi = \int_{\Re^n} f(\xi)\, D_\xi^n \overline{\sigma(\xi\,;\, x)}\, d\xi\ .$$

La différence $\theta(x\,;y)=\tau(x\,;y)-\sigma(x\,;y)$, où τ est la fonction définie par (14), est pour tout y une fonction absolument continue de x. $\theta(x\,;y)$ s'annule avec sgn x et $\int\limits_{\mathfrak{R}^n} f(\xi)D_\xi^n\overline{\theta(\xi\,;x)}d\xi=0$ pour tout x, quelle que soit la fonction f de $L_2^{(n)}$. Par suite, dans $\mathfrak{R}^n(\xi)$,

$$D_\xi^n\theta(\xi;x)\sim 0\ ,\ \text{pour tout } x\ .$$

$\theta(\xi\,;x)$ est donc indépendante de ξ. Comme elle s'annule avec sgn ξ, elle est identiquement nulle.

L'identité des définitions (10) et (14) de $\tau(x\,;y)$ est une conséquence du fait que les quantités $\int\limits_0^y\overline{\Phi_\nu(\eta)}\;d\eta$ sont les coefficients de Fourier de la fonction sgn $y\cdot T^*(I_y\,;\xi)$ relativement au système orthogonal complet φ_ν. Car

$$\operatorname{sgn} y\cdot\int\limits_{\mathfrak{R}^n}T^*(I_y\,;\xi)\,\overline{\varphi_\nu(\xi)}d\xi=\operatorname{sgn} y\cdot\int\limits_{\mathfrak{R}^n}I_y(\xi)\,\overline{T\varphi_\nu(\xi)}\,d\xi=\operatorname{sgn} y\cdot\int\limits_{I_y}\overline{T\varphi_\nu(\xi)}\,d\xi\ .$$

5. Si T_1 et T_2 sont deux transformations linéaires bornées de $L_2^{(n)}$ et si $\tau_1(x\,;y),\tau_2(x\,;y)$ sont leurs génératrices, la transformation $T_1T_2=T_1(T_2)$ est elle aussi linéaire bornée et sa génératrice $\tau_{12}(x\,;y)$ est donnée par

$$\tau_{12}(x;y)=\int\limits_{\mathfrak{R}^n}D_\xi^n\tau_2(x;\xi)\,D_\xi^n\tau_1(\xi;y)d\xi\ . \tag{18}$$

On a, en effet, $(T_1\,T_2)^*=T_2^*\,T_1^*$ et, par conséquent, d'après (4) et (14)

$$\begin{aligned}\tau_{12}(x;y)&=\operatorname{sgn} x\cdot\operatorname{sgn} y\int\limits_{I_x}T_2^*T_1^*(I_y\,;\xi)\,d\xi\\&=\operatorname{sgn} x\cdot\operatorname{sgn} y\int\limits_{\mathfrak{R}^n}T_2^*\,T_1^*(I_y\,;\xi)\,I_x(\xi)\,d\xi\\&=\operatorname{sgn} x\cdot\operatorname{sgn} y\int\limits_{\mathfrak{R}^n}T_1^*(I_y\,;\xi)\,\overline{T_2(I_x\,;\xi)}\,d\xi\\&=\int\limits_{\mathfrak{R}^n}D_\xi^n\tau_2(x\,;\xi)\,D_\xi^n\tau_1(\xi\,;y)\,d\xi\ .\end{aligned}$$

6. La transformation linéaire T de $L_2^{(n)}$ est dite *unitaire* si, pour toute fonction f de $L_2^{(n)}$, $\int\limits_{\mathfrak{R}^n}|\,T(f\,;x)\,|^2dx=\int\limits_{\mathfrak{R}^n}|\,f(x)|^2\,dx$ (isométrie) et si elle possède une inverse T^{-1}. Si T est unitaire, $T^*=T^{-1}$; réciproquement, si la transformation linéaire bornée T possède une inverse T^{-1} identique à son adjointe T^*, elle est unitaire. T^* est unitaire, si T est unitaire. On a, si T est unitaire, la formule, dite de Parseval,

$$\int_{\mathfrak{R}^n} T(f_1; x)\, \overline{T(f_2; x)}\, dx = \int_{\mathfrak{R}^n} f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx \; . \tag{19}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation T soit unitaire est que dans l'expression (10) de sa génératrice la suite des fonctions $\Phi_\nu = T\varphi_\nu$ forme un système orthogonal normé et complet de $\mathfrak{R}^n$ [6]). On peut mettre avec Bochner et Kaczmarz[7]) cette condition sous la forme suivante:

Pour qu'une fonction $\tau(x; y)$ soit la génératrice d'une transformation *unitaire* T de $L_2^{(n)}$, il faut et il suffit qu'elle soit pour tout x une fonction absolument continue de y, pour tout y une fonction absolument continue de x, que

$$\tau(x; y) = \int_0^x D_\xi^n \tau(\xi; y)\, d\xi = \int_0^y D_\xi^n \tau(x; \xi)\, d\xi \tag{20}$$

et que, pour tous x, y ,

$$\int_{\mathfrak{R}^n} D_\xi^n \tau(\xi; x)\, D_\xi^n \overline{\tau(\xi; y)}\, d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} D_\xi^n \tau(x; \xi)\, D_\xi^n \overline{\tau(y; \xi)}\, d\xi = \int_{\mathfrak{R}^n} I_x(\xi) I_y(\xi)\, d\xi \; . \tag{21}$$

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette proposition. Elle est analogue dans le cas $n > 1$ à celle qu'ont donnée Bochner et Kaczmarz dans le cas $n = 1$ et à celle que j'ai donnée dans le même cas d'un théorème de Watson qui en est un cas particulier[8]).

Il suffit maintenant de prendre

$$\tau(x; y) = \int_0^x \int_0^y e^{-i(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta = \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^{x_\nu} \int_0^{y_\nu} e^{-i\xi_\nu \eta_\nu} d\xi_\nu\, d\eta_\nu$$

et de vérifier (21) pour cette fonction, pour établir les propositions IIa et IIb du no 3 et pour conclure que la transformation de Fourier convenablement normée est unitaire. Les propositions Ia et Ib du no 3 découlent des propositions II en remarquant que si les Ω_μ sont des ensembles mesurables bornés, tels que $\lim\limits_{\mu \to \infty} \Omega_\mu = \mathfrak{R}^n$, les fonctions $f_\mu(x)$ équivalentes à $f(x)$ dans Ω_μ et à zéro dans son complémentaire convergent en moyenne vers $f(x)$ dans $\mathfrak{R}^n$ et que, par suite, leurs transformées de Fourier convergent aussi en moyenne vers la transformée de Fourier de f.

---

[6]) loc. cit. [5]) § 8.

[7]) *S. Bochner*, Inversion formulae and unitary transformations (Annals of Mathematics, vol. 35 (1934), p. 111—115); *S. Kaczmarz*, Note on general transforms (Studia mathematica, t. IV [1933], p. 146—151).

[8]) *M. Plancherel*, Sur les formules de réciprocité du type de Fourier (Journal of the London Mathematical Society, vol. 8 [1933], p. 220—226).

7. Soient $T^{(p)}$ une transformation linéaire bornée de $L_2^{(p)}$, $T^{(q)}$ une transformation linéaire bornée de $L_2^{(q)}$; τ_p, τ_q leurs génératrices, b_p, b_q leurs bornes respectives et $n = p + q$. $T^{(p)}$ et $T^{(q)}$ permettent de définir une transformation linéaire bornée $T^{(pq)}$ de $L_2^{(n)}$ comme suit. On peut approcher en moyenne une fonction $f(x) = f(x', x'')$ de $L_2^{(n)}$ par des fonctions $f_r(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} f_\varrho^{(p)}(x') f_\varrho^{(q)}(x'')$ où $f_\varrho^{(p)}(x')$ appartient à $L_2^{(p)}$ et $f_\varrho^{(q)}(x'')$ appartient à $L_2^{(q)}$. (On peut, p. ex., partir d'un système orthogonal $\varphi_\varrho{}^{(p)}(x')$, $(\varrho = 1, 2, 3 \cdots)$ normé et complet de $\mathfrak{R}^p(x')$ et d'un système orthogonal $\varphi_\sigma^{(q)}(x'')$, $(\sigma = 1, 2, 3 \ldots)$ normé et complet de $\mathfrak{R}^q(x'')$, et développer $f(x)$ suivant le système orthogonal des $\varphi_\varrho^{(p)}(x')\, \varphi_\sigma{}^{(q)}(x'')$ normé et complet de $\mathfrak{R}^n(x', x'')$). On voit aisément que la fonction définie par

$$\underset{r \to \infty}{\text{l.e.m.}}\; f_r(x) = \text{l.e.m.} \sum_{\varrho=1}^{r} T^{(p)}(f_\varrho^{(p)}; x')\, T^{(q)}(f_\varrho^{(q)}; x'')$$

appartient à $L_2^{(n)}$ et est indépendante de la suite particulière $f_r(x)$. Elle définit une transformation linéaire bornée de $L_2^{(n)}$ que nous noterons $T^{(p,q)}$ et dont nous montrerons que $\tau_p(x'; y')\, \tau_q(x''; y'')$ est la génératrice.

La transformée $T^{(p,q)}(f; x)$ peut aussi se définir d'une autre manière. D'après le théorème de Fubini sur les intégrales multiples[9]) l'ensemble e_p des points x' de $\mathfrak{R}^p$ pour lesquels $\int_{\mathfrak{R}^q} |f(x', x'')|^2 dx''$ est infinie ou n'existe pas (parce que f n'est pas une fonction mesurable de x'') a une mesure p-dimensionnelle nulle. Donc, si $x' \varepsilon (\mathfrak{R}^p - e_p)$, on peut effectuer sur $f(x', x'')$, considérée comme fonction de x'', la transformation $T^{(q)}$. Le résultat $T^{(q)}(f; x'') = F_q(x', x'') = F_q(x)$ appartient à $L_2^{(q)}$ relativement à x'' et dans $\mathfrak{R}^q$

$$F_q(x', x'') \sim D_{x''}^q \int_{\mathfrak{R}^q} f(x', \xi'')\, D_{\xi''}^q \overline{\tau_q(\xi''; x'')}\, d\xi'' . \tag{22}$$

f et τ_q étant des fonctions mesurables de $x = (x', x'')$ et e_p étant de mesure p-dimensionnelle nulle, F_q est équivalente à une fonction mesurable de $\mathfrak{R}^n(x', x'')$. On a aussi en tout point x' de $\mathfrak{R}^p - e_p$

$$\int_{\mathfrak{R}^q} |F_q(x', x'')|^2 dx'' \leqq b_q^2 \int_{\mathfrak{R}^q} |f(x', x'')|^2 dx''$$

et, par conséquent, en vertu du théorème de Fubini,

---

[9]) *G. Fubini*, Sugli integrali multipli (Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (Roma), 5 (1907). Voir, *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire (Paris 1918), p. 50—53; *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918), p. 621—641.

$$\int_{\mathfrak{R}^n} |F_q(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{R}^p} dx' \int_{\mathfrak{R}^q} |F_q(x', x'')|^2 dx'' \leqq b_q^2 \int_{\mathfrak{R}^p} dx' \int_{\mathfrak{R}^q} |f(x', x'')|^2 dx$$

$$= b_q^2 \int_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx \,.$$

$F_q(x)$ appartient donc à $L_2^{(n)}$. Le raisonnement que nous venons de faire sur $f(x', x'')$ et sur $T^{(q)}$ peut maintenant se répéter sur $F_q(x', x'')$ et sur $T^{(p)}$. L'ensemble e_q des points x'' de $\mathfrak{R}^q$, ou $\int_{\mathfrak{R}^p} |F_q(x', x'')|^2 dx'$ est infinie ou n'existe pas est de mesure q-dimensionnelle nulle. Donc, si $x'' \varepsilon (\mathfrak{R}^q - e_q)$, on peut former la transformée $T^{(p)}(F_q\,; x')$ de F_q considérée comme fonction de x'. Si nous désignons par F_{pq} cette transformée, nous voyons, comme plus haut, que F_{pq} est équivalente dans $\mathfrak{R}^n$ à une fonction mesurable et que

$$\int_{\mathfrak{R}^n} |F_{pq}(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{R}^p} dx' \int_{\mathfrak{R}^q} |F_{pq}(x', x'')|^2 dx'' \leqq b_p^2 b_q^2 \int_{\mathfrak{R}^n} |f(x)|^2 dx \,.$$

La transformation faisant correspondre à f la fonction F_{pq} est donc une transformation linéaire bornée de $L_2^{(n)}$. Elle n'est autre que la transformation $T^{(pq)}$. Car, on vérifie immédiatement que

$$T^{(pq)}(f\,; x) = F_{pq}(x)$$

lorsque f est de la forme $\sum_{\varrho=1}^{r} f_\varrho^{(p)}(x') f_\varrho^{(q)}(x'')$ et, par conséquent, en vertu de la continuité (en moyenne) des transformations linéaires bornées, cette relation subsiste dans le cas général. On voit aussi que $T^{(pq)}$ a $b_p b_q$ pour borne.

Ce résultat montre, $T^{(pq)}$ ne dépendant que de f, que $F_{pq} \sim F_{qp}$, proposition que nous allons d'ailleurs obtenir encore par une autre voie. F_{pq} appartenant à $L_2^{(n)}$, nous pouvons écrire, d'après le théorème de Fubini

$$\int_{I_x} F_{pq}(\xi) d\xi = \int_{I_{x'}} d\xi' \int_{I_{x''}} F_{pq}(\xi', \xi'') d\xi'' = \int_{I_{x''}} d\xi'' \int_{I_{x'}} F_{pq}(\xi', \xi'') d\xi' \,. \quad (23)$$

Or, d'après (5)

$$\int_{I_{x'}} F_{pq}(\xi', \xi'') d\xi' = \int_{\mathfrak{R}^p} F_q(\eta', \xi'') D_{\eta'}^p \overline{\tau_p(\eta'\,; x')} d\eta' \,.$$

Donc

$$\int_{I_x} F_{pq}(\xi) d\xi = \int_{I_{x''}} d\xi'' \int_{\mathfrak{R}^p} F_q(\eta', \xi'') D_{\eta'}^p \overline{\tau_p(\eta'\,; x')} d\eta' \,. \quad (24)$$

L'interversion des intégrales dans le second membre est légitime parce que l'intégrale $\int\limits_{I_{x''}} d\xi'' \int\limits_{\mathfrak{R}^p} |F_q D^p_{\eta}\overline{\tau_p}|\, d\eta'$ a une valeur finie. En effet, on peut voir par application répétée de l'inégalité de Schwarz que cette intégrale est au plus égale à

$$\int\limits_{I_{x''}} d\xi'' \Big(\int\limits_{\mathfrak{R}^p} |F_q|^2 d\eta'\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\mathfrak{R}^p} |D^p_{\eta'}\, \tau_p|^2 d\eta'\Big)^{\frac{1}{2}}$$

et, par conséquent, au plus égale à la racine carrée du produit des intégrales

$$\int\limits_{I_{x''}} d\xi'' \int\limits_{\mathfrak{R}^p} |F_q|^2 d\eta' \quad \text{et} \quad \int\limits_{I_{x''}} d\xi'' \int\limits_{\mathfrak{R}^p} |D^p_{\eta'}\tau_p|^2 d\eta' \;.$$

Or, chacune de ces intégrales est finie, la première parce que $F_q \varepsilon L_2^{(n)}$, la seconde parce que l'intégrale intérieure existe comme nous l'avons vu au no 4, et est indépendante de ξ''. En permutant l'ordre des intégrations dans (24) et tenant compte de (22) et de (5), il vient

$$\begin{aligned}\int\limits_{I_x} F_{pq}(\xi)\, d\xi &= \int\limits_{\mathfrak{R}^p} d\eta'\, D^p_{\eta'}\, \overline{\tau_p(\eta'\,;\, x')} \int\limits_{I_{x''}} F_q(\eta',\, \xi'')\, d\xi'' \\ &= \int\limits_{\mathfrak{R}^p} d\eta' \int\limits_{\mathfrak{R}^q} f(\eta',\, \eta'')\, D^p_{\eta'}\, \overline{\tau_p(\eta'\,;\, x')}\, D^q_{\eta''} \overline{\tau_q(\eta''\,;\, x'')}\, d\eta'' \;.\end{aligned} \tag{25}$$

L'intégrale du second membre reste finie si on y remplace f, $D^p_{\eta'}\tau_p$, $D^q_{\eta''}\tau_q$ par leurs valeurs absolues. On peut donc y permuter l'ordre des intégrations. Mais le résultat qu'on obtient ainsi n'est autre que celui que l'on aurait en calculant $\int\limits_{I_x} F_{qp}(\xi)d\xi$. (25) montre ainsi que $F_{pq} \sim F_{qp}$ dans $\mathfrak{R}^n$. (25) montre encore que la génératrice $\tau_{pq}(x\,;\,y)$ de $T^{(pq)}$ est donnée par

$$\tau_{pq}(x\,;\,y) = \tau_p(x'\,;\,y')\, \tau_q(x''\,;\,y'') \;. \tag{26}$$

Si l'on définissait τ_{pq} par (26), on pourrait montrer que τ_{pq} est la génératrice d'une transformation linéaire bornée identique à $T^{(pq)}$ et l'on obtiendrait ainsi une autre démonstration des résultats ci-dessus.

8. En particulier, si les transformations $T^{(p)}$, $T^{(q)}$ du no 7 sont unitaires, il en est de même de $T^{(pq)}$. Ceci peut se prouver soit directement en établissant que l'inverse de $T^{(pq)}$ existe et est identique à $T^{(pq)*}$, soit en vérifiant pour τ_{pq} les formules (20) et (21).

L'application de ces résultats au cas de la transformation de Fourier des fonctions de plusieurs variables est immédiate. Si l'on admet comme déjà démontré que dans le cas $n = 1$ la transformation de Fourier est unitaire, nous voyons qu'elle l'est encore dans le cas $n > 1$ (proposition I et II du no 3) et nous obtenons une démonstration de la proposition III du no 3, relative à l'itération des intégrales de Fourier multiples.

Cette proposition III pourrait aussi s'établir directement en la vérifiant d'abord pour une fonction $I_a(x)$, puis en approchant $f(x)$ en moyenne par des combinaisons linéaires de fonctions $I_a(x)$.

(Reçu le 14 mars 1937.)