Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes.

Autor(en): **Blanc, Charles**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10190

Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes

Par Charles Blanc, Lausanne

(suite)

CHAPITRE IV

Le type d'une surface de Riemann et son réseau

§ 11. Les transformations de Bloch

Dans une conférence à la Sorbonne, M. Ahlfors a dit que le problème de la recherche de critères de type de surfaces de Riemann était le plus important de la théorie des fonctions[16]). On connaît un certain nombre de tels critères; la plupart d'entre eux sont des conditions suffisantes pour le cas hyperbolique. On peut se demander jusqu'à quel point le réseau d'une surface nous renseigne sur son type, le mot réseau étant pris dans son sens primitif ou suivant une de nos généralisations.

Certains critères connus sont basés sur l'étude du réseau (par exemple le critère relatif aux surfaces dont la base singulière est formée de trois points[17]); d'autre part, M. Ahlfors a donné des critères où les *valeurs* sont remplacées par des *cercles*[18]); c'est là une généralisation analogue à celle qu'on obtiendrait en passant d'un critère sur les réseaux au sens primitif, à un critère sur les réseaux au sens du § 6. Nous aurons l'occasion, au cours de ce chapitre, de donner de telles généralisations.

Cette idée du passage de critères sur des valeurs à des critères sur des cercles est due à M. Bloch[19]).

Appelons *transformation de Bloch* une transformation d'une surface qui soit

1° topologique,

2° telle que si d est la distance de deux points, d^* la distance des points correspondants, on ait

$$\frac{1}{k} d^* < d < k d^*$$

quels que soient les deux points envisagés.

[16]) Bull. Soc. Math. de France, 60, 1932, p. 197.

[17]) *R. Nevanlinna*, Comm. Math. Helv., 5, 1932, p. 95.

[18]) Comptes Rendus, 194, 1932, p. 245 et 1145.

[19]) *A. Bloch*, Enseignement Mathématique, 25, 1926, p. 83.

Le principe de continuité topologique de M. Bloch affirme en somme qu'une transformation telle que celle que nous venons de définir conserve le type d'une surface. Il ne s'agit pas, évidemment, de donner une démonstration de ce principe très général.

On voit que deux surfaces qui ont le même réseau, au sens du § 6, se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bloch. En effet, soit p l'ordre du réseau, F et F^* les deux surfaces; à F et F^* correspondent deux pavages formés de p pavés. Une première transformation de Bloch transformera F^* en une surface F_1 pour laquelle le pavage est le même que pour F. Puis on modifie F_1 à l'intérieur de chaque pavé, pour l'amener à coïncider avec F.

Soit a une singularité isolée d'une surface de Riemann F. On dira qu'on *déplace* a lorsqu'on remplace a par une autre singularité b, de même nature, située dans une portion Δ de F qui ne contient que la singularité a de F.

Théorème 15: Soient F et F^* deux surfaces de Riemann simplement connexes qui se déduisent l'une de l'autre par le déplacement d'un nombre fini de singularités algébriques. Alors F^* est du même type que F.

Démonstration: Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les singularités de F qui sont déplacées en $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Soit Δ_k la portion qui contient a_k.

Supposons F parabolique; $w = f(z)$ est la fonction qui représente le plan ouvert sur F. Supposons F^* hyperbolique; $w = g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < R$ sur F^*. Otons du plan z les domaines qui correspondent aux Δ_k par la fonction inverse de $w = f(z)$; la frontière de Δ_k est fermée, donc ces domaines sont intérieurs à un cercle de rayon fini. Soit D le reste du plan z, et Δ la partie correspondante du cercle $|\zeta| < R$ par la fonction

$$\zeta = g^{-1}[f(z)] .$$

Dans la représentation de D sur Δ, au point à l'infini de D correspond tout le cercle $|\zeta| = R$; on sait que cela est impossible. Donc F^* est parabolique, et le théorème est démontré.

Nous verrons au paragraphe suivant un exemple de conservation du type dans une transformation qui déplace une infinité de singularités algébriques.

§ 12. Surfaces de Riemann dont le réseau est le même que celui de fonctions inverses de fonctions périodiques

Soit $w = f(z)$ une fonction entière, réelle pour z réel, et périodique de période réelle. Nous nous proposons de reconnaître quel sera, dans certains cas, le type d'une surface de Riemann qui aurait le même réseau que la surface de $z(w)$.

La fonction $f'(z)$ a des racines pour z réel; on peut supposer $f'(0) \neq 0$. Soient *un* la période de $f(z)$, et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les racines de $f'(z)$ pour $0 < z < 1$; $\omega_1, \ldots, \omega_p$ les valeurs $f(a_1), \ldots, f(a_p)$. Les points $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont des singularités algébriques de la surface de Riemann F de l'inverse de $w = f(z)$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des segments intérieurs au segment $(0, 1)$ tels que:

1° a_k est intérieur à α_k;
2° les segments α_k n'empiètent pas;
3° les segments $(0, \varepsilon)$ et $(1 - \varepsilon, 1)$ sont extérieurs aux $\alpha_k (\varepsilon > 0)$.

La fonction $w = f(z)$ fait correspondre aux points d'affixes $z = k + \zeta$ (k entier, et ζ dans un segment α_k), les segments Γ_k de trace γ_k de F; toutes les singularités ω_k se trouvent dans les segments Γ_k.

Soit F^* une surface de Riemann que l'on peut obtenir à partir de F en déplaçant toutes les singularités ω_k à l'intérieur du segment Γ_k correspondant (deux singularités de F qui avaient même trace ont maintenant des traces qui peuvent être différentes, mais sont intérieures à γ_k).

Théorème 16 : F^* est du type parabolique.

Démonstration: Soit $g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c$ sur F^*. On supposera $c < \infty$. La surface F, coupée le long des segments Γ_k est identique à la surface F^*, coupée le long de ces mêmes segments. On peut donc représenter conformément le plan, pourvu des coupures α_k et de celles qu'on obtient par la translation $Z = z + k$ (k entier) sur le cercle $|\zeta| < c$, pourvu des coupures correspondantes; la représentation se fait au moyen de la fonction

$$\zeta = g^{-1}[f(z)] = h(z) .$$

Passons du cercle $|\zeta| < c$ à une bande de largeur 2π au moyen de la transformation

$$t = \log \zeta = H(z) .$$

Soit un cercle C_r $|z| = r$, $r = k + \eta$, k entier, $|\eta| < \varepsilon$. Il ne coupe aucun α; la fonction $H(z)$ transforme ce cercle en une courbe L_r du plan t, courbe de longueur égale ou supérieure à 2π. On a donc

$$2\pi \leqslant \int_0^{2\pi} \left|\frac{dH}{dz}\right| r\,d\varphi \qquad z = re^{i\varphi}$$

ou, suivant l'inégalité de Schwarz

$$4\pi^2 \leqslant \int_0^{2\pi} r\,d\varphi \int_0^{2\pi} \left|\frac{dH}{dz}\right|^2 r\,d\varphi = 2\pi r \int_0^{2\pi} \left|\frac{dH}{dz}\right|^2 r\,d\varphi$$

Donc

$$2\pi \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} \leqslant \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \int_0^{2\pi} \left|\frac{dH}{dz}\right|^2 r\,dr\,d\varphi \qquad k = 1, 2, \cdots$$

L'expression de droite représente l'aire balayée par L_r lorsque r varie de $k - \varepsilon$ à $k + \varepsilon$. On a encore

$$2\pi \sum_1^N \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} \leqslant \sum_1^N \int\int \left|\frac{dH}{dz}\right|^2 r\,dr\,d\varphi$$

quel que soit N, entier positif. Le second membre est borné, si on suppose c fini. Donc

$$\sum_1^\infty \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} < A$$

ce qui est une contradiction. Donc $c = \infty$, et le théorème est demontré.

§ 13. Généralisation d'un théorème de M. R. Nevanlinna

Il s'agit d'un théorème démontré par M. R. Nevanlinna dans son mémoire: *Ein Satz über die konforme Abbildung Riemann'scher Flächen.* Comm. Math. Helv. 5 (1932), p. 95—107.

L'auteur considère les surfaces de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points du plan. On construit l'arbre topologique de cette surface, on y choisit une origine G_0, d'où on déduit les générations $G_1, G_2, \ldots$. Soit $\sigma(n)+2$ le nombre de sommets de G_n; M. Nevanlinna démontre que *si* $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ *diverge, la surface est du type parabolique.*

Nous généralisons ce théorème, en remplaçant trois points par trois cercles du plan.

Supposons donc que la surface de Riemann F, simplement connexe, n'a que des singularités logarithmiques, que leurs traces sont toutes contenues dans trois cercles C_1, C_2, C_3, sans points communs, ni points frontières communs, de rayons r_1, r_2, r_3; de plus, on ne passe d'une singularité d'un cercle à une autre singularité de ce cercle que par un détour autour d'une singularité d'un autre cercle.

Nous pouvons construire un arbre topologique de cette surface. Soient $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ trois nombres supérieurs à *un*, tels que l'un des cercles C_1^*, C_2^*, C_3^* de mêmes centres que C_1, C_2, C_3 et de rayons $r_1\varrho_1, r_2\varrho_2, r_3\varrho_3$ soit tangent aux deux autres, ces derniers ne se coupant pas. Soit I le point d'intersection de deux tangentes: il est clair que les tangentes menées de I à C_1, C_2, C_3 ne coupent aucun de ces cercles, et sont toutes distinctes.

Soit $z = \varphi(w)$ la fonction qui représente F sur le cercle $|z| < R (\leqslant \infty)$. Nous appelons arbre de F l'image, par $\varphi(w)$, des demi-droites $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; α_k étant une demi-droite issue de I et comprise entre C_k et C_{k+1}, et l'image de demi-droites de F, issues de I et passant par les singularités de F; si, pour une branche de $\varphi(w)$, un cercle C_k ne contient aucune singularité, on prend une demi-droite quelconque, issue de I, et coupant ce cercle.

Pour simplifier les calculs, on supposera I à l'origine.

Puisque nous avons construit un arbre, nous pouvons introduire, comme M. Nevanlinna, les générations, puis les quantités $\sigma(n)$. Alors on a le

Théorème 17: Si $\sum \frac{1}{n\,\sigma(n)}$ *diverge, F est du type parabolique.*

La démonstration que nous donnons suit de très près celle de M. Nevanlinna.

On dira qu'un domaine élémentaire H appartient à la n-ième génération si n est le plus petit indice des générations auxquelles appartiennent les sommets de H. On appelle origine de la frontière Γ de H le sommet de Γ appartenant à G_n.

Soit donc H un domaine de G_n. Il lui correspond une singularité a de F, intérieure à C_k; $w(z)$, fonction inverse de $\varphi(w)$, représente H sur une partie F_n de F, qui contient la seule singularité a. La frontière de F_n se compose de demi-droites $(0, \infty)$; elle contient la surface de recouvrement du domaine doublement connexe obtenu en ôtant a de l'angle des tangentes menées de I à C_k.

Soient A_1, A_2, A_3, trois points du plan; A_k est situé dans l'angle formé par les tangentes menées de I à C_{k+1} et C_{k+2}, l'angle ne contenant aucun des trois cercles. Il est clair que F_n ne contient aucun point du secteur qui contient A_k.

Faisons la transformation

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{w(z) - A_k}{w(z) - a} + ic$$

où on prend une détermination quelconque du logarithme et où c, constante réelle, est telle que $\omega(z) = 0$ si z est à l'origine de H; $\omega(z)$ représente H sur un domaine H_ω, et pour tout point de la frontière Γ_ω de H_ω on a $-K_2 < \Re\omega < K_1$, quel que soit H.

D'autre part, la droite $\Im\omega =$ constante coupe Γ_ω en un seul point.

Soit $r > n$; on construit la courbe L_r de la façon suivante:

1° le demi-cercle $|\omega - K_1| = r - n \qquad \Re\omega \geqslant K_1$;

2° les deux segments $\Im\omega = \pm(r-n)$, ω dans H_ω;

L_r coupe Γ_ω en deux points A_r et B_r.

Faisons encore la transformation $t = \log z$ en coupant le cercle $|z| < R$ le long d'un polygone de l'arbre. A H correspond un domaine H_t, et à L_r une section de H_t dont la longueur sera $s(r)$. On a

$$s^2(r) = \Big(\int_{L_r} \left|\frac{dt}{d\omega}\right| \, |d\omega|\Big)^2 \leqslant \int_{L_r} |d\omega| \int_{L_r} \left|\frac{dt}{d\omega}\right|^2 |d\omega|$$

$$< [\pi(r-n) + 2K_1 + 2K_2] \frac{dA(r)}{dr}$$

$A(r)$ étant l'aire de H comprise entre $\Re t = \log R_0$ et la courbe qui correspond à L_r. R_0 est un nombre fixe inférieur à R, et on prend $r > r_0$, r_0 étant choisi assez grand pour que $A(r)$ ait un sens. On a alors

$$s^2(r) < K_3 \pi r \frac{dA(r)}{dr} \qquad\qquad r > r_0$$

puis

$$\sum s^2(r) < K_3 \pi r \frac{d\Im(r)}{dr} \tag{1}$$

la somme étant étendue à tous les domaines H des générations $G_0, G_1, \ldots, G_n$ $(n < r)$ et $\Im = \Sigma A$. Soit $\lambda(r)$ le nombre des sections $s(r)$ et

$$\alpha(r) = \Sigma s(r).$$

On a

$$\sum s^2(r) \geqslant \frac{(\Sigma s(r))^2}{\lambda(r)} = \frac{\alpha^2(r)}{\lambda(r)} \tag{2}$$

Soit

$$\beta(r) = \max\ [0,\ 2\pi - \alpha(r)] \tag{3}$$

Alors

$$\frac{4\pi^2}{\lambda(r)} - \frac{4\pi\beta(r)}{\lambda(r)} < K_3 \pi r \frac{d\mathfrak{J}}{dr}$$

donc, si $r > r_0$

$$4\pi \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\lambda(r)} \leqslant K_3[\mathfrak{J}(r) - \mathfrak{J}(r_0)] + 4\int_{r_0}^{r} \frac{\beta(r)\,dr}{\lambda(r)}\ ; \tag{4}$$

or, pour $\nu - 1 < r \leqslant \nu$, $\lambda(r) = \sigma(\nu) + 2$; donc si $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ diverge, il en est de même pour

$$\int \frac{dr}{r\lambda(r)} \tag{5}$$

d'où il résulte que si $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ diverge et si R est fini, $\int \frac{\beta(r)\,dr}{\lambda(r)}$ diverge.

Il faut montrer que cela est impossible.

Supposons donc R fini; on peut admettre que $R > 1$. Soit $a_r b_r$ la courbe du plan z qui correspond à L_r. Si r est entier, tous les arcs $a_r b_r$ forment un contour simple M_r. Soit r non entier: $n - 1 < r < n$. Les extrémités des $a_r b_r$ peuvent ne pas coïncider. Nous les relions par un segment γ_r de l'arête correspondante de l'arbre topologique, et soit encore M_r le contour fermé obtenu. On passe au plan $t = \log z$; M_r donne une courbe de longueur au moins égale à 2π; soit $\gamma(r)$ la longueur, dans le plan t, d'un arc ajouté. On a

$$\alpha(r) + \sum \gamma(r) \geqslant 2\pi$$

donc, d'après (3)

$$\beta(r) \leqslant \sum \gamma(r) \tag{6}$$

Nous nous proposons d'évaluer les $\gamma(r)$.

Soit P_1P_2 un polygone de l'arbre, sans autres points de ramification que P_1 et P_2. P_1 appartient à G_m, P_2 à G_{m+2p+1}. Lorsque r varie de m à $m + 2p + 1$, les points a_r et b_r se déplacent, d'une façon continue, de P_1 à P_2, en coïncidant aux sommets. Soit K le domaine constitué par les domaines élémentaires des sommets de P_1P_2. A P_1P_2 correspond, dans le plan w, une courbe qui a pour trace deux demi-droites, issues de l'origine. Soient a et b les singularités qui correspondent aux domaines limités par P_1P_2; on supposera que P_1 correspond à $w = 0$. Posons

$$y = \log \frac{w-a}{w-b} + (-1)^p i\pi .$$

On choisit la détermination convenable du logarithme, en sorte qu'à P_1P_2 corresponde une certaine courbe Φ, passant par les points $-p2i\pi, -(p-1)2i\pi, \ldots, 0, \ldots, p2i\pi$. A $\gamma(r)$ correspond un arc de Φ, dont la longueur est bornée; soit K_4 cette borne, et $\bar{\gamma}(r)$ la longueur de γ_r.

Soit y_r le point de γ_r qui correspond à a_r. En appliquant, au besoin plusieurs fois, l'inégalité de Koebe (mais un nombre fini et borné de fois), on voit que

$$\left|\frac{dz}{dy}\right| < K_5 \left|\frac{dz}{dy}\right|_{y=y_r}$$

z étant un point de γ_r.

L'inégalité de Bieberbach donne

$$\left|\frac{dz}{dy}\right|_{y=y_r} < \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

πq étant l'aire (finie) de K, et $\varrho(r)$ le rayon d'un cercle de centre y_r, et contenu dans l'image de K.

Or, pour $m+p+|\nu| \leqslant r < m+p+|\nu|+1$

$$\begin{cases} \varrho(r) > p-|\nu| & \text{si } |\nu| = 0, 1, \ldots, p-1 \\ \varrho(r) > K_6 & \text{si } |\nu| = p \end{cases} \tag{7}$$

on en conclut que

$$\bar{\gamma}(r) < K_7 \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

donc

$$\bar{\gamma}(r) \begin{cases} < K_7 \dfrac{\sqrt{q}}{p-|\nu|} & |\nu| < p \\ < K_8 \sqrt{q} & |\nu| = p \end{cases}$$

et si on suppose r assez grand pour que P_1P_2 soit extérieur à $|z| = 1$

$$\gamma(r) < \begin{cases} K_7 \dfrac{\sqrt{q}}{p-|\nu|} \\ K_8 \sqrt{q} \end{cases} .$$

Alors

$$\int_{m}^{m+2p+1} \gamma(r)dr < 2\left(K_8 + K_7 \sum_1^p \frac{1}{\nu}\right)\sqrt{q} < K_9 \sqrt{q} \ \log \ K_{10}p \ . \qquad (8)$$

Cette relation peut s'écrire aussi entre des limites non entières

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r)dr < K_9\sqrt{q} \ \log \ K_{10}r_2 \ . \qquad (9)$$

Soit maintenant n_0 (entier) assez grand pour que toute la partie correspondante de l'arbre soit extérieure à $|z| = 1$. Soit un intervalle (n_0, r) et $B(n_0, r)$ la partie correspondante de l'arbre. On divise $B(n_0, r)$ en segments $S(P_1P_2)$. Le nombre de ces segments est au plus de $2\lambda(r)$. Pour l'un de ces segments S, avec $r_2 < r$, on a

$$\int_S \gamma(r)dr < K_9\sqrt{q} \ \log \ K_{10}r < K_{11}\sqrt{q} \ \log \ r \ ; \qquad (10)$$

posons

$$b(r) = \int_{n_0}^{r} \beta(u)du \ .$$

On a

$$b(r) \leqslant \int_{n_0}^{r} (\Sigma\gamma(u))du$$

la somme étant étendue à tous les S qui correspondent à $r = u$. On a encore

$$b(r) < K_{11} \log r \cdot \Sigma\sqrt{q}$$

a somme étant étendue aux segments S de $B(n_0, r)$. Mais

$$\Sigma\sqrt{q} \leqslant \sqrt{2\lambda(r)} \cdot \sqrt{\Sigma q}$$

et

$$\Sigma q \leqslant 3R^2 \qquad (11)$$

donc

$$b(r) < K_{12}\sqrt{\lambda(r)} \cdot \log \ r$$

d'où on tire

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\beta(r)}{r\lambda(r)}dr = \int_{r_0}^{r} \frac{db(r)}{r\lambda(r)} < \frac{b(r)}{r\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{b(r)dr}{r^2\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{b(r)d\lambda(r)}{r\lambda^2(r)}$$

$$\leqslant K_{12}\frac{\log r}{r} + K_{12}\int_{r_0}^{r} \frac{\log r\, dr}{r^2} + K_{12}\int_{r_0}^{r} \frac{\log r}{r}\frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}}$$

$$\leqslant K_{12}\left(\frac{\log r_0}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \int_{r_0}^{r} \frac{\log r}{r}\frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}}\right)$$

d'où la convergence de l'intégrale. Le théorème est démontré.

§ 14. Généralisation du théorème précédent

Il y aurait peu à modifier dans la démonstration si, au lieu de trois cercles on avait p cercles $C_1, \ldots, C_p$. En général, dans ce cas, on ne pourra pas trouver un point I et un point E répondant aux conditions requises; ces conditions servent uniquement à nous assurer que le cercle $|\omega| = r - n$ coupe Γ_ω en deux points seulement, ce qui permet d'affirmer ensuite que les arcs γ_r sont situés entièrement dans un intervalle entre deux sommets de l'arbre.

Si on a p cercles $C_1, \ldots, C_p$, soit I un point quelconque, extérieur aux cercles, et E le point à l'infini. Nous relions I à E par des chemins entourant les C_i. On peut choisir ces chemins tels que le nombre de points sur chaque chemin pour lesquels

$$\arg \frac{a+w}{a-w} = 0$$

(a est un point intérieur quelconque de C_i) soit au plus égal à p. Alors un arc γ_r sera compris dans p intervalles au plus du réseau. La relation (9) devient

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r)\,dr < K_9 \sum (\sqrt{q} \log K_{10} r) \tag{9'}$$

la somme étant étendue à p intervalles consécutifs, c'est-à-dire à p valeurs de ϱ consécutives. On a donc

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r)\,dr < K_9 p \sum \sqrt{q} \log K_{10}(r_2 + p)$$

la somme étant étendue à p domaines du plan. Posons

$$Q = \sum q$$

on a

$$\sum \sqrt{q} \leqslant \sqrt{p}\,\sqrt{Q}$$

donc

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r)\,dr < K_9 p \sqrt{p}\,\sqrt{Q} \log K_{10}(r_2 + p)$$

ce qui donne, à la place de (10)

$$\int_S \gamma(r)\,dr < K'_{11} \sqrt{Q} \log r \qquad r > r_0\,. \tag{10'}$$

De plus

$$\sum Q \leqslant p^2 R^2 \tag{11'}$$

donc

$$b(r) < K'_{12} \sqrt{\lambda(r)} \cdot \log r$$

et le

Théorème 18 : Soit F une surface de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et groupées dans p cercles, extérieurs les uns aux autres, et soit $\sigma(n) + 2$ le nombre de sommets de la génération G_n du réseau correspondant; si $\sum \frac{1}{n\,\sigma(n)}$ diverge, F est parabolique.

§ 15. Un critère de type

Théorème 19 : Toutes les surfaces de Riemann qui ont, au sens du § 6, un même réseau que la surface de l'inverse de $w = e^{e^z}$, sont du type parabolique.

Démonstration : Pour plus de commodité, remplaçons e^{e^z} par

$$w = f(z) = \frac{a\,e^{e^z} + b}{c\,e^{e^z} + d}$$

en choisissant les constantes a, b, c, d en sorte que $1, \infty, 0$ deviennent $1, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. On choisit, pour construire le réseau de la surface de Riemann F^* de $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ le cercle $|w| = 1$ pour courbe L, et les points I et E tels que

$$I = f\left(\frac{i\pi}{2}\right) \qquad E = f\left(-\frac{i\pi}{2}\right) .$$

Le réseau est alors constitué par la droite $\Re z = 0$ et par les demi-droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, $\Re z > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ On a, sur les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$

$$\Im w(z) = 0 .$$

Soit H_k la bande

$$(k + \tfrac{1}{2})\pi < \Im z < (k + 1 + \tfrac{1}{2})\pi .$$

Considérons maintenant la surface de Riemann simplement connexe F, qui a même réseau que F^* ; on suppose que la singularité qui correspond à *un* pour F^* a pour trace *un*, que celles qui correspondent à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ont des traces intérieures à un cercle C_1, celles qui correspondent à $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ des traces intérieures à un cercle C_2, les cercles C_1 et C_2 contenant respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, et étant assez petits pour ne pas être coupés par les courbes IE qui donnent les arêtes du réseau.

On peut découper F le long des courbes ayant pour trace les courbes IE qui ont divisé F^* en domaines élémentaires; soit F_k la partie de F qui correspond ainsi à la bande H_k. On peut représenter F_k conformément sur H_k de manière qu'aux points I de F_k correspondent les points M de la frontière de H_k pour lesquels on a

$$f(z) = I$$

En effet, F_k est une surface de recouvrement d'un demi-plan pourvu d'une singularité logarithmique ω_k. On peut représenter conformément le demi-plan $\Im w \gtrless 0$ sur lui-même en sorte que ω_k aille en $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$, et que I reste fixe. Soit $w_1 = \psi_k(w)$ la fonction qui effectue cette représentation. La fonction

$$z = \varphi(w_1) = \varphi[\psi_k(w)] = \Phi_k(w)$$

représente F_k sur H_k; d'autre part on a

$$\Phi_k(I) = \varphi[\psi_k(I)] = \varphi(I) = M$$

ce qui montre que la représentation envisagée est bien possible. On procède ainsi pour chaque domaine H_k.

Soit $w = F(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c (c \leqslant \infty)$ sur F. On supposera $c < \infty$. La fonction

$$\zeta = F^{-1}[\Phi_k^{-1}(z)]$$

donne une représentation de H_k sur une partie du cercle $|\zeta| < c$. On coupe le cercle $|\zeta| < c$ le long de la frontière d'un domaine correspondant à un F_k et on pose

$$t = \log \zeta$$

en fixant une détermination du logarithme; l'image du cercle $|\zeta| < c$ est une bande B.

En vertu de l'hypothèse faite sur les cercles C_1 et C_2, les points du plan z, sur les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, pour lesquels on a

$$\Phi_k^{-1}(z) = 1$$

sont situés dans le demi-plan $\Re z < K_1$, et ceux pour lesquels

$$\Phi_k^{-1}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \infty$$

dans le demi-plan $\Re z > K_1'$, $K_1' > K_1$, K_1 et K_1' étant des constantes qui ne dépendent pas de k. Soit H_k^* la partie de H_k située dans le demi-plan $\Re z > K_1$. La fonction

$$Z = f^{-1}[\psi_k \{f(z)\}]$$

représente H_k^* sur une partie $\overline{H}_k$ de H_k. $\overline{H}_k$ est limité par une courbe L_k reliant les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ et $\Im z = (k + \frac{3}{2})\pi$. Les courbes L_k sont contenues dans une bande

$$-K_2 < \Re z < K_2$$

A $\overline{H}_k$ correspond un domaine T_k de B au moyen de la fonction

$$t = \log\ [F^{-1}(\Phi_k^{-1}(z))] = \chi_k(z)$$

Soit C_R une courbe fermée du plan z composée de la façon suivante:

1° un demi-cercle C': $|z - K_2| = R \qquad \Re z > K_2$;
2° un demi-cercle C'': $|z + K_2| = R \qquad \Re z < -K_2$;
3° deux segments situés respectivement sur les droites $\Im z = \pm R$, reliant les extrémités des deux demi-cercles.

La longueur de C_R est égale à $4K_2 + 2\pi R$.

Soit $\mathfrak{F}_1$ la partie de F qui correspond à l'ensemble des domaines $T_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, et soit $\mathfrak{F}_2 = F - \mathfrak{F}_1$. On peut représenter le demi-plan $\Re z \leqslant 0$ sur $\mathfrak{F}_2$ par la fonction

$$w = f(z + K_1)\ .$$

On posera

$$t = \log [F^{-1}(f(z + K_1))] = \chi(z)$$

en choisissant la même détermination du logarithme que plus haut; $t = \chi(z)$ représente le demi-plan $\Re z < 0$ sur la partie T de B située hors des T_k.

Soit θ la partie de C_R contenue dans le demi-plan $\Re z < 0$, θ_k la partie de C_R contenue dans H_k; $\theta(R)$ et $\theta_k(R)$ les longueurs de θ et de θ_k. Il faut remarquer que, pour certaines valeurs de k et de R, θ_k et θ peuvent avoir un segment commun, mais la longueur de ce segment est bornée, et on a toujours

$$\theta(R) + \Sigma\theta_k(R) < 8K_2 + 2\pi R\ .$$

Soit s_k l'arc qui correspond à θ_k dans la représentation

$$t = \chi_k(z)$$

et s l'arc qui correspond à θ par $t = \chi(z)$. Les arcs s_k et s ne forment pas une courbe connexe, mais on peut réunir les arcs s_k et s de manière à former une courbe d'un seul tenant, les arcs ajoutés correspondant à des segments des droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ et $\Re z = 0$, la longueur de ces segments étant toujours inférieure à celle d'un intervalle compris entre deux points pour lesquels on a $w(z) = I$.

Soit γ_k l'arc ajouté qui correspond à un segment de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, $\gamma_k(R)$ sa longueur. Soient d'autre part μ_1 et μ_2 les arcs qui correspondent à des segments de $\Re z = 0$, et peut-être aussi à des segments de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, dans le cas où C_R coupe L_k en un point qui correspond à un point de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ par la transformation

$$Z = f^{-1}[\psi_k(f(z))];$$

ces segments de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ sont alors certainement contenus dans une bande $|\Re z| < K_2'$. Soient $\mu_1(R)$ et $\mu_2(R)$ les longueurs de μ_1 et de μ_2. On a

$$s(R) + \sum s_k(R) + \sum \gamma_k(R) + \mu_1(R) + \mu_2(R) \geqslant 2\pi$$

les sommes étant étendues à tous les indices k pour lesquels, R étant donné, s_k et γ_k ont un sens. On écrira $\Sigma'\gamma_k(R)$ la somme des $\gamma_k(R)$ étendue à tous ces indices k, moins les deux extrêmes, k' et k'' ($k' > 0$, $k'' < 0$).

On a, d'après l'inégalité de Schwarz

$$s_k^2(R) = \Big(\int_{\theta_k} |\chi_k'| \ |dz|\Big)^2 \leqslant \theta_k(R) \int_{\theta_k} |\chi_k'|^2 R d\varphi \quad z = Re^{i\varphi}$$

d'où

$$\int_{R_0}^{R} \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} dR \leqslant \int_{R_0}^{R} \int_{\theta_k} |\chi_k'|^2 R dR d\varphi$$

et la même inégalité pour $s(R)$. En additionnant, on obtient, si on suppose C fini

$$\int_{R_1}^{R} \left(\sum \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} + \frac{s^2(R)}{\theta(R)}\right) dR < K_3 .$$

Mais on a

$$\sum \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} + \frac{s^2(R)}{\theta(R)} \geqslant \frac{(\Sigma s_k(R) + s(R))^2}{\Sigma \theta_k(R) + \theta(R)}$$

$$\geqslant \frac{(\Sigma s_k(R) + s(R))^2}{2\pi R + 8K_2}$$

donc

$$\int_{R_1}^{R} \frac{(\Sigma s_k(R) + s(R))^2}{R} dR < K_4 \quad \text{pour } R_1 > R_0 . \tag{1}$$

Evaluons $\gamma_k(R)$ et $\mu_i(R)$. Pour cela, nous nous appuyons sur les théorèmes de Koebe et de Bieberbach, comme l'a fait M. R. Nevanlinna dans la démonstration du théorème cité au § 13.

Soit q_k la somme des aires de T_{k-1} et T_k; soit d'autre part q_k^* l'aire du domaine de B qui correspond à la bande

$$(k + \tfrac{1}{2})\pi - K_1' < \Im z < (k + 1 + \tfrac{1}{2})\pi + K_1' \quad , \quad \Re z < K_1'$$

par la représentation $t = \chi(z)$. On trouve, comme plus haut

$$\gamma_k(R) < K_5 \frac{\sqrt{q_k}}{\varrho(R) - 1} .$$

$\varrho(R)$ étant le nombre de points M situés sur la droite $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, à l'intérieur de C_R; pour tous les k, à l'exception de k' et k'', on a

$$\varrho(R) > K_6 e^{\sqrt{R}}$$

donc

$$\gamma_k(R) < K_5 \frac{\sqrt{q_k}}{K_6 e^{\sqrt{R}} - 1} < K_7 \sqrt{q_k} \cdot e^{-\sqrt{R}} \quad \text{pour } R > R_1 ;$$

pour k' et k'' on a simplement

$$\gamma_k(R) < K_8 \sqrt{q_k} .$$

D'autre part on a

$$\mu_1(R) < K_9 \sqrt{q_{k'}^*}$$

$$\mu_2(R) < K_9 \sqrt{q_{k''-1}^*} .$$

Or

$$(\Sigma' \gamma_k(R))^2 < n(R) \cdot \Sigma' \gamma^2(R)$$

$n(R)$ étant le nombre de domaines H_k traversés par C_R .

On a

$$n(R) < K_{10} \cdot R$$

donc

$$(\sum' \gamma_k(R))^2 < K_7 \sum' \frac{q_k}{e^{2\sqrt{R}}} \; K_{10} \; R$$

$$= K_{11} \cdot R \; e^{-2\sqrt{R}} \sum' q_k < K_{12} \; R \cdot e^{-2\sqrt{R}}$$

et

$$\int_{R_1}^{R} \frac{(\Sigma' \gamma(R))^2}{R} dR < \int_{R_1}^{R} K_{12} \, e^{-2\sqrt{R}} dR < K_{13} \qquad (2)$$

quel que soit $R_1 > R_0$.

Evaluons maintenant

$$J(R) = \int_{R_1}^{R} \frac{\gamma_{k'}^2(R)}{R} dR \; .$$

On a

$$J(R) < \int_{R_1}^{R} \frac{K_8^2 q_k'}{R} dR$$

$$< \int_{R_1}^{R} K_8^2 q_k' dR < \pi K_8^2 \sum_{-\infty}^{\infty} q_k = K_{14} \; .$$

De même

$$\int_{R_1}^{R} \frac{\mu_i^2(R)}{R} dR < K_{15} \qquad i = 1, 2$$

d'où

$$\int_{R_1}^{R} \frac{\gamma_{k'}^2 + \gamma_{k''}^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2}{R} dR < 2K_{14} + 2K_{15}$$

et

$$\int_{R_1}^{R} \frac{[\gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2]^2}{R} dR < K_{16} \; . \qquad (3)$$

Les inégalités (1), (2), (3), ajoutées membre à membre, donnent

$$\int_{R_1}^{R} \frac{(\Sigma s_k + s)^2 + (\Sigma' \gamma_k)^2 + (\gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2)^2}{R} dR < K_{17}$$

d'où, par la relation

$$\Sigma s_k + s + \Sigma' \gamma_k + \gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2 \geqslant 2\pi$$

$$\int_{R_1}^{R} \frac{dR}{R} < K_{18} \; .$$

Il y a contradiction, donc le théorème est démontré.

§ 16. Un nouveau critère de type

Arbre dérivé d'un arbre donné: Soit R un arbre topologique; joignons tous ses sommets multiples à un sommet quelconque par des polygones de l'arbre. Soit R' l'arbre ainsi obtenu; on l'appellera le dérivé de R. On définit ensuite le second dérivé, etc. Si l'arbre R est fini (c'est-à-dire s'il limite un nombre fini de domaines du plan), son dérivé n'a qu'un nombre fini de sommets. Si l'arbre R est celui de la surface universelle de recouvrement de la sphère dont on a ôté $p (p \geqslant 3)$ points, $R' = R$.

Remarquons que, même pour des surfaces du type parabolique, on peut avoir $R' = R$ [20]).

Théorème 20: Soit F une surface de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et dont le réseau dérivé est identique à celui de l'inverse de $w = e^{e^z}$. Numérotons, à partir d'une origine quelconque, et dans chaque sens, les points de ramification du réseau de F (c'est un arbre); *soit n le nombre de sommets de ce réseau situés sur le polygone qui relie deux points de ramification d'indices ν et $-\nu$. Si on a*

$$n < K_0 \nu \tag{1}$$

F est du type parabolique.

Démonstration: On supposera que les singularités de F sont les mêmes que celles de la surface F^* de l'inverse de $f(z) = e^{e^z}$, c'est-à-dire que ces singularités sont *un* (une singularité), *zéro* et *infini.*

Traçons dans le plan z les droites

$$\Re z = 0; \quad \Im z = k\pi \ , \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Soient L les courbes correspondantes de la surface F^* par la transformation $w = f(z)$; les courbes L découpent F^*. Appelons F_k^* la partie de F^* qui correspond à la bande H_k^*

$$k\pi \leqslant \Im z \leqslant (k+1)\pi \qquad \Re z > 0$$

On peut découper F au moyen des mêmes courbes que celles qui ont décomposé F^*. On choisit l'origine du réseau telle que la partie de F qui contient cette origine corresponde à la bande $0 < \Im z < \pi$. On fera correspondre à F_0^* la partie F_0 de F qui correspond au premier point de

[20]) voir *E. Ullrich,* Comm. Math. Helv., 7, 1934, p. 63.

ramification du réseau de F, à partir de l'origine choisie, dans le sens positif; F_1, correspondant à F_1^*, sera la partie de F qui correspond au point de ramification suivant, F_{-1} la partie correspondant au premier point de ramification rencontré en parcourant le dérivé du réseau de F dans le sens négatif. F_k est identique à F_k^*.

Les parties F_k ne sont pas seules à former F. Il reste:

1° une partie $\mathfrak{F}$ identique à celle que donne la fonction $f(z)$ dans le demi-plan $\Re z < 0$;

2° des domaines simples $\mathfrak{F}_i$, correspondant aux sommets non ramifiés du réseau de F, situés sur son dérivé.

Soit $w = g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c$ sur F; on supposera $c < \infty$. On coupe le cercle $|\zeta| < c$ le long d'un des arcs de la frontière du domaine qui correspond à $\mathfrak{F}$, puis on pose $t = \log \zeta$, en choisissant une détermination du logarithme; le cercle est représenté ainsi sur une bande $\mathfrak{B}$. Soit $h(t)$ la fonction qui représente $\mathfrak{B}$ sur F; et H_k, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_i$ les domaines qui correspondent à F_k, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_i$, par la représentation

$$t = h^{-1}(w) \ .$$

Par suite de l'identité de F_k et de F_k^*, on peut représenter conformément H_k^* sur H_k par la fonction

$$t = h^{-1}[f(z)] = p_k(z) \ .$$

Soit C_r le demi-cercle $|z| = r$, $\Re z > 0$. Par l'intermédiaire des fonctions $p_k(z)$, C_r est représenté sur le plan t suivant des arcs s_k, situés respectivement dans les domaines F_k. Ces arcs ne forment par une courbe d'un seul tenant, coupant $\mathfrak{B}$. Evaluons la longueur $s_k(r)$ de s_k. Soit $\theta_k(r)$ la longueur de l'arc θ_k de C_r situé dans H_k^*. On a, d'après l'inégalité de Schwarz et suivant un calcul déjà fait

$$s_k^2(r) < \theta_k(r) \frac{dA_k(r)}{dr}$$

$A_k(r)$ étant l'aire du domaine balayé par s_k. Or on a

$$\sum \frac{s_k^2(r)}{\theta_k(r)} \geqslant \frac{(\Sigma s_k(r))^2}{\Sigma \theta_k(r)} = \frac{(\Sigma s_k(r))^2}{\pi r}$$

la somme étant étendue à tous les k, en posant $s_k(r) = 0$ si C_r ne coupe pas le domaine H_k^*. On posera $\Sigma A_k(r) = \mathfrak{I}(r)$, et $\Sigma s_k(r) = S(r)$, d'où

$$\frac{S^2(r)}{\pi r} < \frac{d\mathfrak{J}}{dr}$$

et

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S^2(r)}{\pi r}\, dr < \mathfrak{J}(r) - \mathfrak{J}(r_0) < K_1 \tag{2}$$

puisque $c < \infty$.

Considérons les arcs s_k et s_{k+1}; une extrémité A de s_k et une extrémité B de s_{k+1} correspondent à un même point du plan z, donc en ces points on a

$$h(A) = h(B).$$

Le domaine qui sépare H_k de H_{k+1} correspond à μ_k domaines $\mathfrak{H}_i$: $\mathfrak{H}_{i+1}, \mathfrak{H}_{i+2}, \ldots, \mathfrak{H}_{i+\mu_k}$. On représente le domaine $\mathfrak{H}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{H}_{i+\mu_k}$ sur un domaine de la bande

$$0 < \mathfrak{J} y < 2\mu_k \pi$$

par la fonction

$$y = \log h(t) = u(t)$$

On peut relier A à B par un arc γ_k qui, par l'intermédiaire de $u(t)$, donne un segment du plan y, parallèle à $\mathfrak{R} y = 0$, et de longueur $2\mu_k\pi$. Soit $\gamma_k(r)$ la longueur de γ_k, et soit $y = y_1 + i y_2$. L'inégalité de Schwarz donne encore

$$\gamma_k^2(r) = \left(\int_0^{2\mu_k\pi} \left|\frac{dt}{dy}\right| dy_2\right)^2 \leqslant \int_0^{2\mu_k\pi} dy_2 \int_0^{2\mu_k\pi} \left|\frac{dt}{dy}\right|^2 dy_2$$

donc

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} \leqslant \int_0^{2\mu_k\pi} \left|\frac{dt}{dy}\right|^2 dy_2 = \left|\frac{dB_k(r)}{dy_1(r)}\right|$$

si $B_k(r)$ est l'aire du domaine balayé par γ_k. On a $y = e^z$. Soit ϱ l'abscisse du point où C_r coupe la droite $\mathfrak{J} z = k\pi$. On a $y_1 = \pm e^{\varrho}$, suivant que k est pair ou non. On a donc

$$\left|\frac{dy_1}{d\varrho}\right| = e^{\varrho}$$

et

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} \leqslant \frac{dB_k(r)}{d\varrho}\, e^{-\varrho};$$

or, pour toutes les valeurs de k, sauf les deux extrêmes, on a

$$\varrho \geqslant \sqrt{2\pi r - \pi^2} \geqslant \sqrt{r} \qquad \text{pour} \quad r > r_0$$

d'où

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\gamma_k^2(r)\, e^{\sqrt{r}}}{r\, 2\mu_k\pi}\, dr \leqslant B_k(r) - B_k(r_0).$$

Faisons la somme pour toutes les valeurs de k, sauf les deux extrêmes. On l'écrira Σ'. On a

$$\int_{r_0}^{r} \sum{}' \frac{\gamma_k^2(r)}{\mu_k} \cdot \frac{e^{\sqrt{r}}}{2\pi r} dr < \sum{}' B_k(r) < K_1$$

or

$$\sum{}' \frac{\gamma_k^2}{\mu_k} \geqslant \frac{(\Sigma' \gamma_k)^2}{\Sigma' \mu_k} = \frac{(\Gamma(r))^2}{\Sigma' \mu_k}$$

mais, d'après l'inégalité (1), on a

$$\sum{}' \mu_k + \frac{2r}{\pi} < K_0 \frac{2r}{\pi}$$

ou encore

$$\sum{}' \mu_k < K_2 \frac{2r}{\pi}$$

donc

$$\sum{}' \frac{\gamma_k^2}{\mu_k} > \frac{\pi \Gamma^2(r)}{2 K_2 r}$$

et

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\pi \Gamma^2(r) e^{\sqrt{r}}}{4 K_2 \pi r} dr < K_1$$

qui entraîne l'inégalité

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\Gamma^2(r)}{\pi r} dr < K_3 \,. \tag{3}$$

Considérons maintenant les γ_k correspondant aux valeurs extrêmes de k. L'inégalité

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2 \mu_k \pi} < \left| \frac{dB_k(r)}{dy_1(r)} \right|$$

est encore valable. On a

$$y_1^2(r) = r^2 - k^2 \pi^2$$

d'où

$$y_1 \frac{dy_1}{dr} = r$$

$$\frac{dy_1}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - k^2 \pi^2}} \,.$$

Donc

$$\left| \frac{dB_k(r)}{dy_1(r)} \right| = \frac{dB_k(r)}{dr} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - k^2 \pi^2}}{r}$$

et

$$\int_{r_0}^{r_0+\pi} \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr \leqslant \int_{r_0}^{r_0+\pi} \frac{dB_k(r)}{dr} \cdot \frac{\sqrt{r^2-k^2\pi^2}}{r} dr < K_4[B_k(r_0+\pi)-B_k(r_0)] \; .$$

Intégrons maintenant de r_0 à $r\,(r>r_0)$. On obtient l'inégalité

$$\int_{r_0}^{r} \sum{}'' \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr < K_4 \Sigma B_k(r)$$

en remarquant que la somme située dans le premier membre est étendue aux deux valeurs extrêmes de k, pour chaque valeur de r; par contre, la somme du deuxième membre est étendue à tous les indices k. On a donc

$$\int_{r_0}^{r} \sum{}'' \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr < K_5 \; . \tag{4}$$

Pour compléter la courbe, il faut relier les deux points C et D qui correspondent aux points ir et $-ir$ de C_r, par un arc situé dans $\mathfrak{H}$. On représentera $\mathfrak{H}$ sur le demi-plan $\Re y < 0$ au moyen d'une fonction $y = q(t)$, que l'on peut choisir telle que:

1° $q[h^{-1}(f(0))] = 0$;
2° $h[q^{-1}(2k\pi)] = h[q^{-1}(0)]$.

Aux points C et D correspondent deux points E et F de la droite $\Re y = 0$. Considérons un intervalle $r = k\pi$, $r = (k+1)\pi$; lorsque r varie de $k\pi$ à $(k+1)\pi$, E parcourt le segment $i\varrho$, $i(\varrho+\pi)$ et F le segment $-i\varrho'$, $-i(\varrho'+\pi)$. Traçons dans le demi-plan $\Re y < 0$ un demi-cercle $\mathfrak{C}$ de diamètre EF. Soit ϱ^* le rayon de $\mathfrak{C}$; à $\mathfrak{C}$ correspond une courbe σ du plan t, de longueur $\sigma(r)$. On a encore

$$\sigma^2(r) < \pi\varrho^* \int_{\mathfrak{C}} \left|\frac{dt}{dy}\right|^2 |dy|$$

et, quel que soit r,

$$\frac{d\varrho^*}{dr} = 1$$

donc

$$\int_{\mathfrak{C}} \left|\frac{dt}{dy}\right|^2 |dy| = \frac{dG(r)}{dr}$$

$G(r)$ étant l'aire du domaine balayé par σ. Il en résulte que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi\varrho^*} dr < [G((k+1)\pi) - G(k\pi)] \; .$$

En vertu de l'inégalité (1), on a

$$\varrho^* < K_6 r$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi\varrho^*} dr > \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{K_6 \pi r} dr$$

et

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr < K_7 \{ G[(k+1)\pi] - G(k\pi) \}$$

d'où

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr < K_8 \ . \tag{5}$$

On a

$$\sum_{0}^{\nu-1} (\mu_k + \mu_{-k-1}) + 2\nu + 1 = n$$

donc, en vertu de (1),

$$\sum_{0}^{\nu-1} (\mu_k + \mu_{-k-1}) < (K_0 - 2)\nu + 1 \ .$$

Soit ν pair. Pour $\nu/2$ valeurs au moins de k, on a

$$\mu_k \leqslant 2K_0 \quad \text{et} \quad \mu_{-k-1} \leqslant 2K_0 \, .$$

Soit R_p l'ensemble des valeurs de r comprises dans les p premiers intervalles $k\pi \leqslant r \leqslant (k+1)\pi$, avec $\mu_k \leqslant 2K_0$ et $\mu_{-k-1} \leqslant 2K_0$. Sur R_p, r vérifie l'inégalité $r \leqslant (2p+1)\pi$

donc
$$\int_{R_{2p}} \frac{dr}{r} - \int_{R_p} \frac{dr}{r} \geqslant \frac{p\pi}{(4p+1)\pi} \geqslant \frac{1}{5} \ .$$

Soit $R = \lim\limits_{p=\infty} R_p$. On a

$$\int_R \frac{dr}{r} = \infty \ . \tag{6}$$

D'autre part, les inégalités (2), (3), (4) et (5) donnent

$$\int_R \frac{S^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{\Gamma^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{\Sigma'' \gamma_k^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr$$

$$< K_1 + K_3 + K_5' + K_8 = K_9 \ .$$

Or

$$S(r) + \Gamma(r) + \Sigma'' \gamma_k(r) + \sigma(r) \geqslant 2\pi$$

$$S^2(r) + \Gamma^2(r) + \Sigma'' \gamma_k^2(r) + \sigma^2(r) \geqslant \frac{\pi^2}{2}$$

donc

$$\int_R \frac{\pi^2 dr}{2\pi r} < K_9$$

et

$$\int_R \frac{dr}{r} < \frac{2K_9}{\pi}$$

ce qui est contradictoire avec (6). Donc $c = \infty$, et le théorème est démontré.

§ 17. La fonction $H(r_1, r_2)$

Soient F une surface de Riemann simplement connexe, T une section divisant F en deux parties F_1 et F_2, simplement connexes. Représentons F_1 et F_2 sur les demi-plans $\Im\zeta \geqslant 0$ et $\Im\zeta \leqslant 0$. A T correspond la droite $\Im\zeta = 0$ ou une partie de celle-ci. Dans le dernier cas, F est du type hyperbolique; dans le premier, elle peut être d'un type ou de l'autre. On voit en effet qu'elle peut être du type hyperbolique en prenant pour F l'intérieur d'un cercle et pour T une spirale indéfinie, intérieure à ce cercle.

Nous ne nous occuperons que du cas où toute la droite $\Im\zeta = 0$ (moins le point à l'infini) correspond à T.

A un point de T correspondent deux points de $\Im\zeta = 0$ (celui qui provient de la représentation de F_1 sur $\Im\zeta \geqslant 0$ et celui qui provient de la représentation de F_2 sur $\Im\zeta \leqslant 0$). On établit ainsi une correspondance biunivoque entre deux ponctuelles de support $\Im\zeta = 0$. Soient r_1 et r_2 deux valeurs correspondantes de $\Re\zeta$. Elles vérifient une relation

$$H(r_1, r_2) = 0$$

avec

$$\left.\begin{array}{lll} r_2 \to +\infty & \text{si} & r_1 \to +\infty \\ r_2 \to -\infty & \text{si} & r_1 \to -\infty \end{array}\right\} \qquad \text{(H)}$$

Si T est une courbe analytique, $H(r_1, r_2) = 0$ est une relation analytique, ce que nous supposerons désormais.

Théorème 21: Soit $H(r_1, r_2) = 0$ une relation analytique satisfaisant aux conditions (H). On peut définir, au moyen des deux demi-plans $\Im \zeta \geqslant 0$ et $\Im \zeta \leqslant 0$ liés suivant la relation $H = 0$, une surface de Riemann simplement connexe.

Supposons pour commencer que pour aucune valeur de r, on n'a

$$r_2'(r_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \infty\ ;$$

nous allons montrer que les deux demi-plans $\Im \zeta \geqslant 0$ et $\Im \zeta \leqslant 0$ soudés de manière que pour deux points correspondants on ait $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, forment une surface de Riemann.

On appellera point de F tout point des deux demi-plans, en considérant comme identiques deux points qui coïncident dans la soudure.

Soit ζ un point tel que $\Im \zeta \neq 0$. On prend pour voisinage de ζ un cercle de centre ζ et dont le rayon est inférieur à $|\Im \zeta|$.

Soit ζ tel que $\Im \zeta = 0$ (ζ est donc constitué par deux points ζ_1 et ζ_2, de $\Im \zeta \geqslant 0$ et $\Im \zeta \leqslant 0$). Résolvons $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ autour du point ζ_1: $\zeta_2(\zeta_1)$; cette fonction est régulière et univalente dans un cercle de rayon ϱ_0, de centre ζ_1. On prend pour voisinage de ζ le domaine constitué par:

1° le demi-disque $|\zeta - \zeta_1| < \varrho$, $\Im \zeta \geqslant 0$ avec $\varrho < \varrho_0$;

2° l'image du demi-disque $|\zeta - \zeta_1| < \varrho$, $\Im \zeta \leqslant 0$ par la transformation $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$.

Le voisinage ainsi obtenu est bien représentable topologiquement sur un cercle, le point ζ allant à l'intérieur du cercle.

Ce système de voisinages vérifie les axiomes du § 1:

Axiome 1: Soient V_1 et V_2 deux voisinages de ζ. Si $\Im \zeta \neq 0$, on prend pour voisinage V un cercle dont le rayon est le plus petit des deux rayons de V_1 et V_2. Si $\Im \zeta = 0$, on prend pour ϱ le minimum des valeurs correspondantes de V_1 et V_2.

Axiome 2: Supposons que ζ^* soit intérieur à un voisinage $V(\zeta_0)$. Si $\Im \zeta_0 \neq 0$, on a $\Im \zeta^* \neq 0$ et il suffit de prendre pour rayon du voisinage de ζ^* une longueur assez petite. Si $\Im \zeta_0 = 0$, deux cas peuvent se présenter:

1° $\Im \zeta^* \neq 0$; alors, suivant que $\Im \zeta^* > 0$ ou $\Im \zeta^* < 0$, on prend $V(\zeta^*)$ à l'intérieur du demi-disque $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$, $\Im \zeta > 0$ ou a l'intérieur de l'image de $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$, $\Im \zeta < 0$;

2° $\Im \zeta^* = 0$; on prend un rayon ϱ' assez petit pour que le disque $|\zeta - \zeta^*| < \varrho'$ soit intérieur au disque $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$.

Axiome 3: Soient ζ^* et ζ^{**} deux points différents Il est clair qu'on peut choisir des voisinages $V(\zeta^*)$ et $V(\zeta^{**})$ avec $V(\zeta^*)$. $V(\zeta^{**}) = 0$.

Donc $H = 0$ définit une surface topologique simplement connexe. Or, on peut définir pour chaque voisinage une représentation sur un cercle qui fait de F une surface de Riemann.

Supposons d'abord ζ avec $\Im \zeta \neq 0$; on prend, pour effectuer la représentation, la fonction $w = \zeta$. Passons maintenant à ζ avec $\Im \zeta = 0$. Pour les points du voisinage pour lesquels $\Im \zeta < 0$, on effectue d'abord la transformation inverse de $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$, puis on fait $w = \zeta_1$ ce qui donne une représentation sur un cercle.

On a donc bien une surface de Riemann.

Envisageons le cas où $r_2'(r_1)$ a des zéros. Soit r_1^0 un zéro d'ordre n de $r_2'(r_1)$; n est pair en vertu de la monotonie de $r_2(r_1)$. On fait, pour commencer, la transformation suivante:

$$Z_1 = (\zeta_1 - r_1^0)^{2\frac{n+1}{n+2}}$$

$$Z_2 = (\zeta_2 - r_2^0)^{\frac{2}{n+2}}$$

en choisissant une détermination quelconque. La relation $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ devient $\mathfrak{H}(Z_1, Z_2) = 0$; elle est régulière autour de $Z_1 = 0$. On procède alors comme on l'a fait plus haut. On considère le rayon ϱ_0 d'un cercle de centre $Z_1 = 0$ dans lequel $Z_2(Z_1)$ est régulière et univalente. On définit le voisinage de $Z_1 = 0$:

1° la partie du disque $|Z_1| < \varrho < \varrho_0$ intérieure à la partie du plan qui correspond à $\Im \zeta_1 \geqslant 0$;

2° l'image dans le plan Z_2 du reste de ce disque, au moyen de la transformation $Z_2(Z_1)$.

Le voisinage de ζ est l'image de ce voisinage par les fonctions $\zeta_1(Z_1)$ respectivement $\zeta_2(Z_2)$.

Pour faire la représentation conforme de ce voisinage, on passe par les fonctions inverses au cercle $|Z_1| < \varrho$, d'où il résulte que dans ce cas encore $H = 0$ permet de définir une surface de Riemann.

Si on a $r_2'(r_1) = \infty$, on se contente d'intervertir les variables r_1 et r_2, d'où $r_1'(r_2) = 0$, et le raisonnement est le même.

On montre sans peine que cette surface est simplement connexe. Si on prend pour $H = 0$ non pas *une*, mais *plusieurs* relations analytiques, dont la succession satisfait aux conditions (H), on définit encore une surface de Riemann, mais les valeurs (r_1, r_2) qui correspondent au passage d'une relation H à l'autre ne donnent pas, en général, des points de la surface; il en résulte que celle-là n'est plus toujours simplement connexe.

On appellera surface correspondant à la fonction H la surface qui est définie par la démonstration du théorème 21.

La définition de la fonction H et le théorème 21 nous montrent un nouvel aspect du problème de la détermination du type: H étant donnée, quel est le type de la surface de Riemann F correspondante? Nous donnons quelques solutions partielles de ce problème.

Théorème 22 : Si pour un ensemble E de valeurs de r_1 on a

$$\int_E \frac{dr_1}{r_1} \to \infty \tag{1}$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} > K_0 \frac{dr_1}{r_1} \tag{2}$$

avec $\varrho = \dfrac{r_2^* + r_2^{**}}{2}$, *où* r_2^* *est la racine de* $H(r_1, r_2) = 0$ *et où* $-r_2^{**}$ *est la racine de* $H(-r_1, r_2) = 0$;

$$K_1 < \left| \frac{dr_2^*}{dr_2^{**}} \right| < K_2 \qquad K_1 > 0 \tag{3}$$

alors F est du type parabolique.

Décrivons un demi-cercle Γ_r de rayon r dans le demi-plan $\Im \zeta \geqslant 0$, ayant son centre à l'origine. Aux extrémités de ce demi-cercle correspondent deux points A_r et B_r de $\Im \zeta = 0$, d'affixes r_2^* et $-r_2^{**}$. Décrivons un demi-cercle Γ_ϱ, dans le demi-plan $\Im \zeta \leqslant 0$, de diamètre $A_r B_r$. Soit C_r l'image de $\Gamma_r + \Gamma_\varrho$ dans le plan $s = \log z$, si on suppose qu'on a représenté F sur le cercle $|z| < R$.

Soient $\varphi_1(\zeta)$ et $\varphi_2(\zeta)$ les fonctions qui effectuent la représentation de $\Im \zeta \geqslant 0$ et $\Im \zeta \leqslant 0$ sur les domaines correspondants du plan s, $\sigma_1(r)$ et $\sigma_2(r)$ les longueurs des arcs correspondant à Γ_r et Γ_ϱ. On a

$$\sigma_1(r) + \sigma_2(r) \geqslant 2\pi$$

et

$$\sigma_1^2(r) \leqslant \pi r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} |\varphi_1'|^2 \, r d\theta \qquad \zeta = re^{i\theta}$$

et, si on suppose R fini

$$\int_E \frac{\sigma_1^2(r)dr}{r} < K_3 \tag{4}$$

puis

$$\sigma_2^2(r) \leqslant \pi\varrho \int_{\Gamma_\varrho} |\varphi_2'|^2 \, |d\zeta|$$

ou

$$\sigma_2^2(r) \leqslant \pi\varrho \, K_4 \frac{dA(\varrho)}{d\varrho} \text{ pour } r \text{ dans } E\,, \tag{5}$$

en vertu de (3), $A(\varrho)$ étant l'aire du domaine limité par l'image de Γ_ϱ. Donc

$$\int_{r \subset E} \frac{\sigma_2^2(r)\, d\varrho(r)}{\varrho(r)} < K_5$$

et

$$\int_E \frac{\sigma_2^2(r)\, dr}{r} < K_6 \tag{6}$$

d'après (2). Il résulte de (4) et de (6)

$$\int_E \frac{dr}{r} < K_7$$

en contradiction avec (1). Donc $R = \infty$, et le théorème est démontré.

Supposons que $H = 0$ est une relation algébrique. Si on prend pour E les valeurs de r supérieures à r_0, les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. On a donc le

Théorème 23: Si $H = 0$ est algébrique, F est du type parabolique.

On peut encore énoncer le théorème suivant:

Théorème 24: Supposons la relation $H = 0$ symétrique (c'est-à-dire que $H(-r_1, -r_2) = H(r_1, r_2)$) *avec de plus, pour r_1 assez grand*

$$\frac{dr_2}{r_2} > K_0 \frac{dr_1}{r_1}\,. \tag{1}$$

Alors F est du type parabolique.

C'est un cas particulier du théorème 22. En effet, l'hypothèse de la symétrie équivaut à poser

$$r_2^* = r_2^{**} = \varrho$$

donc, pour toute valeur de r_1 supérieure à r_0, on a

$$\int_E \frac{dr_1}{r_1} \to \infty$$

et

$$\frac{d\varrho}{\varrho} > K_0 \frac{dr_1}{r_1}$$

ce qui démontre le théorème.

La condition (1) du dernier théorème ne peut pas être complètement supprimée: il existe des fonctions H, vérifiant les conditions (H), symétriques au sens du théorème précédent, et qui sont hyperboliques.

Voici quelques exemples simples de fonctions H auxquelles s'appliquent les théorèmes précédents. Soit

$$H(r_1\,,\ r_2) \equiv r_1 - r_2^3 = 0 \ ;$$

l'image de T dans le plan est formée de deux demi-droites faisant un angle droit (au sommet de l'angle correspond $r_1 = r_2 = 0$, qui est une singularité de la relation $H = 0$). Si on a

$$H(r_1\,,\ r_2) \equiv r_2 - (e^{r_1} - e^{-r_1}) = 0$$

le type est encore parabolique, en vertu du théorème 24; à T correspond alors une parabole.

§ 18. Exemple de cas hyperbolique

Dans le cas où une fonction H donne une surface hyperbolique, les domaines du cercle $|z| < 1$ auxquels correspondent les deux demi-plans $\Im\zeta \geqslant 0$ et $\Im\zeta \leqslant 0$ dans la représentation de la surface sur un cercle peuvent être limités par des courbes en spirale (domaines spiralés). L'exemple que nous allons donner est de cette nature.

Considérons la bande B

$$0 \leqslant \Im z \leqslant \pi \qquad \Re z \geqslant 0 \ ;$$

nous établissons une correspondance biunivoque entre les points des deux demi-droites $\Im z = 0$ et $\Im z = \pi$, $\Re z > 0$. Soient P et Q deux points correspondants, on posera $\Re P = u$ et $\Re Q = v$.

Supposons pour commencer que $v = ku$. Nous allons construire dans B une fonction analytique univalente $f(z) = f(x + iy)$, telle que $|f(z)| =$ constante sur chaque segment PQ, et telle que

$$\arg f(Q) - \arg f(P) = \pi .$$

Posons $f(z) = re^{i\varphi}$, et $r(P) = \Phi(u)$; $\Phi(u)$ est une fonction croissante de u; $r(x, y)$ est une constante sur la droite

$$-\pi x + y(k - 1)u + \pi u = 0 .$$

On a

$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = \Phi'_u \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = \Phi'_u \frac{\partial u}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial x}$$

et sur un segment PQ

$$d\varphi = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy$$

d'où

$$\pi = \frac{\Phi'}{\Phi}\int_0^\pi \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy$$

$$= \frac{\Phi'}{\Phi}\int_0^\pi \frac{\pi^2 + u^2(k-1)^2}{\pi\,[y(k-1) + \pi]} dy$$

$$= \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\pi^2 + u^2(k-1)^2}{\pi(k-1)} \log k$$

donc

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\pi^2(k-1)}{[\pi^2 + u^2(k-1)^2] \log k}$$

ce qui permet de calculer Φ . On voit que l'on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log \Phi = 0$$

donc que $\log r(x, y)$ est une fonction harmonique; $f(z) = re^{i\varphi}$ est donc une fonction analytique. Elle est univalente; $f(z)$ représente B sur un domaine spiralé intérieur à un cercle de rayon fini.

Considérons maintenant une relation plus générale

$$v = v(u)\,;$$

on pose $u = \log r_1$, $v = \log r_2$ et on fait l'hypothèse que la fonction

$$H(r_1, r_2) \equiv \log r_2 - v(\log r_1) = 0$$

vérifie les conditions (H), que

$$H(-r_2, -r_1) = 0 \quad \text{si} \quad H(r_1, r_2) = 0$$

et que de plus

$$v'(u) > K_1 > 2 \quad \text{et} \quad v''(u) \geqslant 0 \text{ pour } u > u_0\,. \tag{1}$$

Il s'agit de représenter la bande B sur un domaine spiralé D, au moyen d'une fonction $t = h(z)$, de manière que l'on ait

$$|h(u)| = |h(v + i\pi)| \qquad u > u_0$$
$$\arg h(v + i\pi) - \arg h(u) = \pi\,;$$

cette représentation est possible. En effet, on représente la bande $0 \leqslant \Im z \leqslant \pi$ sur le demi-plan $\Im\zeta \geqslant 0$ en posant $\zeta = \log z$ et on considère la relation

$$H(r_1, r_2) \equiv \log r_2 - v(\log r_1) = 0\,;$$

on représente la surface correspondante sur le cercle $|t| < c\,(\leqslant \infty)$, de sorte que $t = 0$ si $\zeta = 0$. Le point $\zeta = 0$ est un centre de symétrie de la surface, en ce sens qu'il existe une transformation biunivoque et conforme $\zeta^* = S(\zeta)$, de la surface sur elle même, qui conserve $\zeta = 0$ et telle que $S[S(\zeta)] = \zeta$. On pose en effet, si $\Im\zeta \neq 0$, $\zeta^* = -\zeta$, et si $\Im\zeta = 0$, $\zeta_1^* = -\zeta_2$ et $\zeta_2^* = -\zeta_1$; le point $\zeta^*(\zeta_1^*, \zeta_2^*)$ est bien sur la surface.

Dans le cercle $|t| < c$, la transformation S donne une transformation $t^* = T(t)$, biunivoque et conforme, qui conserve le point $t = 0$; donc

$$t^* = t \cdot e^{i\theta}$$

et de plus

$$t = t \cdot e^{2i\theta}$$

donc $\theta = \pi$, et $t^* = -t$. Il en résulte que les domaines D et D^* qui correspondent à $\Im \zeta \geqslant 0$ et à $\Im \zeta \leqslant 0$ se déduisent l'un de l'autre par une rotation de π autour de $t = 0$. Soit $z = g(t)$ la fonction qui représente D sur B. Considérons le cercle

$$|t| = r < c$$

et les arcs de ce cercle intérieurs à D. Il leur correspond des arcs intérieurs à B: l'un, MN, relie les deux droites $y = 0$ et $y = \pi$, les autres, P_1Q_1, P_2Q_2, ... relient chacun deux points situés sur la même droite, alternativement $y = 0$ et $y = \pi$.

Soit $f(z)$ la fonction qui a été construite au début de ce paragraphe, pour la valeur $k = \frac{K_1}{2}$, et soit

$$\zeta = F(t) = \log f[g(t)]\,;$$

$F(t)$ représente la partie de D extérieure au cercle $|t| = r_0$ sur un domaine Γ, dont l'aire est finie. Aux arcs du cercle $|t| = r$ correspondent des arcs intérieurs à Γ. Soit $S(r)$ la longueur totale de ces arcs.

Evaluons la variation de φ, argument de $f(z)$ sur MN et sur P_iQ_i.

On a
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Or

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\pi x(k-1)}{[\pi + y(k-1)]^2} = \frac{2\pi x(K_1-2)}{[2\pi + y(K_1-2)]^2} > K_2 x \quad , \quad K_2 > 0$$

donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} > \frac{2\pi^2 K_2 (K_1-2)\,x}{[4\pi^2 + x^2(K_1-2)^2]\,\log\frac{K_1}{2}} > \frac{K_3}{x} \qquad K_3 > 0$$

si $x > x_0$.

D'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{\pi + y(k-1)} \geqslant \frac{2}{K_1}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} > 0\,.$$

Sur MN, la variation $\Delta\varphi$ de φ vérifie donc l'inégalité

$$\Delta\varphi > K_3 \log\frac{v_1}{u_1}$$

où on a posé $u_1 = \Re M$ et $v_1 = \Re N$.

Soit un arc $P_1 Q_1$ dont les extrémités sont sur $y = 0$. Pour cet arc,

$$\Delta \varphi > K_3 \log \frac{Q_1}{P_1} .$$

Soit enfin un arc $P_2 Q_2$ dont les extrémités sont sur $y = \pi$; on a encore

$$\Delta \varphi > K_3 \log \frac{\Re Q_2}{\Re P_2} .$$

Mais $\Re P_2 = v(Q_1)$ et $\Re Q_2 = v(P_3)$; et

$$\frac{\Re Q_2}{\Re P_2} > \frac{P_3}{Q_1}$$

puisque $v'(u) > 1$, et $v''(u) \geqslant 0$.

On en tire que

$$S(r) \geqslant \sum \Delta\varphi > K_3 \left[\log \frac{v_1}{u_1} + \log \frac{Q_1}{P_1} + \log \frac{P_3}{Q_1} + \cdots \right]$$

$$= K_3 \log \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{Q_n}{P_1} .$$

Mais

$$v_1 = v(P_1) > K_1 P_1$$

et

$$Q_n = v(u_1) > K_1 u_1$$

donc

$$S(r) > K_3 \log \cdot K_1^2 = K_4 > 0$$

puisque $K_1 > 1$.

Soit

$$\overline{F}'(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t \text{ est dans } D \\ 0 & \text{si } t \text{ est hors de } D , \end{cases}$$

alors

$$\int_0^{2\pi} | \overline{F}'(t) | \, r d\theta > K_4 \qquad t = re^{i\theta}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^{2\pi} | \overline{F}'(t) |^2 r d\theta > K_4^2$$

$$\int_0^{2\pi} | \overline{F}'(t) |^2 r d\theta > \frac{K_4^2}{2\pi r}$$

$$\int_{r_0}^{r} \int_0^{2\pi} | \overline{F}'(t) |^2 r dr d\theta > \frac{K_4^2}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} .$$

L'intégrale du premier membre est bornée, puisqu'elle représente l'aire d'un domaine intérieur à Γ; donc

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} < K_5 ;$$

il en résulte que r est borné, donc $H(r_1, r_2)$ correspond à une surface du type hyperbolique.

Prenons pour $H = 0$ la relation

$$H \equiv e^{-e^{-r_1}} + e^{-e^{r_2}} - 1 = 0$$

pour laquelle on a $H(-r_2, -r_1) = H(r_1, r_2)$. On pose $u = \log r_1$, $v = \log r_2$, et de $H = 0$ on tire

$$e^{-e^{e^v}} = 1 - e^{-e^{-e^u}}$$

on voit que pour $u > u_0$, on a $v > 0$, $v' > K_1 > 2$ et $v'' \geqslant 0$. Donc la relation $H = 0$ est du type hyperbolique.

Prenons dans le demi-plan $\Im \zeta \geqslant 0$ la fonction

$$w_1(\zeta) = e^{-e^{-\zeta}}$$

et dans le demi-plan $\Im \zeta \leqslant 0$,

$$w_2(\zeta) = 1 - e^{-e^{\zeta}} .$$

Les surfaces F_1 et F_2 qu'elles définissent peuvent se souder le long du segment (0, 1) qui correspond à l'axe $\Im \zeta = 0$. Soit F la surface que l'on obtient en soudant F_1 et F_2 ; F est hyperbolique, car si ξ_1 et ξ_2 sont les affixes de deux points de $\Im \zeta = 0$ qui donnent le même point de F, ils vérifient la relation

$$e^{-e^{-\xi_1}} = 1 - e^{-e^{\xi_2}}$$

donc la relation $H = 0$ que nous venons d'étudier.

On voit par là que l'ensemble des singularités d'une surface du type hyperbolique peut être dénombrable, de même que l'ensemble des singularités d'une surface du type parabolique peut ne pas l'être[21]). Dans ce dernier cas, on arrive au résultat, en raréfiant suffisamment les singularités; dans notre exemple, c'est la dissymétrie qui donne à la surface son type hyperbolique.

[21]) M. Valiron a déjà donné, par une tout autre méthode, des exemples de surfaces du type hyperbolique, dont l'ensemble des singularités est dénombrable ; voir Comptes Rendus, *198*, 1934, p. 2065–2067, et J. de Math. pures et appl. *15*, 1936, p. 423–435. Pour les surfaces du type parabolique, dont l'ensemble des singularités a la puissance du continu, voir le mémoire cité à la note 20).

§ 19. Conclusions: quelques remarques sur la fonction $\mathbf{H}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

Il y a un cas particulier où l'étude de la relation $H(r_1, r_2) = 0$ présente un certain intérêt.

Considérons une fonction méromorphe $w = f(z)$ dans le cercle $|z| < R(\leqslant \infty)$; soit $w = \omega$ une singularité logarithmique de la fonction inverse, Δ une portion circulaire dont le centre est la trace de ω, et qui contient la singularité ω. On coupe la surface F de $z(w)$ le long de la frontière de Δ, et on représente Δ et $F - \Delta$ sur les demi-plans $\Im \zeta > 0$ et $\Im \zeta < 0$; on suppose que pour les deux demi-plans la droite $\Im \zeta = 0$ (moins le point à l'infini) correspond à la frontière de Δ. On définit ainsi une fonction H.

Supposons que nous connaissions le type d'une surface F, ainsi qu'une relation $H = 0$ obtenue à partir de F suivant le procédé donné ci-dessus. Posons

$$H^*(r_1, r_2) \equiv H(r_1 + k \sin r_1, r_2)$$

avec $0 < k < 1$. Quel est le type de la surface F^* qui fournit H^*? Si on peut montrer que dans tous les cas le type de F^* est le même que celui de F, on aura montré que la surface obtenue à partir de F en déplaçant seulement une singularité logarithmique à l'intérieur d'une portion qui ne contient que cette singularité, est du même type que F. Il convient de remarquer que si l'un des théorèmes 22 ou 24 s'applique à H, il en résulte que H^* est aussi parabolique.

La démonstration de l'identité des types de H et de H^* établirait de façon rigoureuse le principe de Bloch dans sa forme la plus simple, relativement à une seule singularité transcendante.

(Reçu le 16 février 1937.)