Sopra alcune curve e superficie covarianti delle rigate sghembe

Di Ambrogio Longhi, a Lugano

1. In questo lavoro tratto succintamente di certe curve e superficie, annesse ad ogni rigata gobba, le quali credo non siano state finora oggetto di particolari indagini.

Come già in precedenti studî sulle rigate[1]) ricorro qui pure al metodo iperspaziale identificando, secondo il noto punto di vista del Klein, l'ordinaria geometria della retta con la geometria di una quadrica V_4^2 dello spazio S_5 a cinque dimensioni.

Per brevità, circa ad esempio le *falde* di una rigata algebrica, i loro *caratteri*, le rispettive *varietà osculatrici* di rette e totalità di tangenti a contatto *generalmente* $(i+1)$-*punto*, rimando senz'altro alla prima delle due Memorie testè citate, richiamandola con la semplice indicazione «F».

2. In tutto il seguito si designerà con R_n^p una superficie gobba d'ordine n e di genere p, con C_n^p la curva (del medesimo ordine e genere) che la rappresenta (n. 1) su V_4^2, e con n_k il k-esimo rango (in particolare la classe) di tale curva; onde sarà[2]):

$$n_k = (k+1)\ (n+kp-k) - \sum\left[k\alpha + (k-1)\,\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} - \frac{k\,(k+1)}{2}\right],$$

la sommatoria estendendosi ai rami singolari $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ di C_n^p, o, ciò che è lo stesso («F», n. 1), alle falde singolari $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ di R_n^p.

La R_n^p si dirà *generica* quando (appartenendo eventualmente a complessi lineari) fra tutte le rigate di ordine n e di genere p, non offra altre particolari singolarità che linee multiple ordinarie: ogni sua falda ha quindi i caratteri («F», n. 1) eguali ad 1, tranne al più l'ultimo che può essere 2.

La rigata sarà per altro quasi sempre supposta dotata di falde comunque singolari. Per ottenere allora dai risultati generali stabiliti in tale ipotesi, quelli relativi al caso di una rigata con le più comuni singolarità,

[1]) Vedasi la Memoria: Ricerche sulle falde delle rigate algebriche [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 67, (2), 1933]; e l'altra: Le tangenti multiple delle rigate algebriche [ibidem, 68, (2), 1935].

[2]) Cfr., ad es., *F. Severi*, Trattato di geometria algebrica, Vol. 1, Parte I (Bologna, 1926), p. 142.

si tenga presente che («F», n. 1) una generatrice origine di una falda $g(\alpha\alpha_1\alpha_2...)$ diviene: una ordinaria generatrice stazionaria quando $\alpha = 2$ e $\alpha_i = 1$ per $i \geqslant 1$, una generatrice d'inflessione quando $\alpha_1 = 2$ e $\alpha = \alpha_i = 1$ per $i \neq 1$, ed una generatrice iperbolica quando $\alpha_2 = 2$ e $\alpha = \alpha_i = 1$ per $i \neq 2$.

3. Sia $g(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ una falda, di origine g e di caratteri $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_4$ (cfr. «F», n. 1), della rigata R_n^p: supposta questa non contenuta in alcun complesso lineare; e sia t una sua tangente principale (col punto di contatto sulla generatrice g) avente la proprietà di appartenere al complesso lineare osculatore lungo g alla falda stessa («F», n^i 1 e 2). In S_5 la t è rappresentata (n. 1) da un punto T, della quadrica V_4^2, comune all'S_4 osculatore in G al ramo $G(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$, immagine della falda sulla curva C_n^p, e all'S_2' polare, rispetto a V_4^2, dell'S_2 osculatore pure in G a tale ramo.

Ora, può avvenire che l'iperpiano S_4 contenga interamente il piano S_2', oppure lo seghi in una retta di V_4^2: perchè nessuno di questi casi si verifichi, è necessario e sufficiente ammettere che il piano S_2 non appartenga alla quadrica V_4^2 e neppure la tocchi lungo una retta, e che lo stesso S_2 e l'S_4 non siano contemporaneamente tangenti a V_4^2 (nè in un medesimo punto, che dovrebbe allora essere G, nè in punti diversi).

In tali ipotesi esistono due soli punti T, che sono precisamente le intersezioni T_1 e T_2, con V_4^2, della retta S_1 comune agli spazi S_4 ed S_2': variando la falda $g(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$ della rigata R_n^p, le due tangenti principali t_1 e t_2 di essa, rappresentate da T_1 e T_2, generano un'altra rigata Ω; l'ordine di Ω uguaglia quello della curva luogo delle coppie di punti T_1, T_2 ed è quindi il doppio dell'ordine x della superficie V_2^x descritta dalla retta $S_1 \equiv (S_2'S_4)$.

Per determinare x si osserva che sopra un generico S_3^* il piano variabile S_2' segna una curva W (sezione di S_3^* con la varietà polare, rispetto a V_4^2, della seconda sviluppabile osculatrice di C_n^p), d'ordine n_2 (n. 2) e di genere p. Da ogni punto P di W esce un S_2', polare dell' S_2 osculatore nell'origine G ad un ramo di C_n^p; l' S_4 osculatore in G a questo ramo incontra W in n_2 punti P'; e poichè da ogni punto P' partono n_4 (n. 2) iperpiani osculatori di C_n^p, fra i punti P e P' di W esiste una corrispondenza algebrica (n_4, n_2): il numero dei suoi punti uniti è pure quello delle rette $S_1 \equiv (S_2'S_4)$ incidenti ad S_3^*, ossia è l'ordine cercato x.

È ora evidente che, sulla curva W, il gruppo costituito dagli n_2 punti P', corrispondenti ad un punto mobile P, varia entro una serie lineare d'ordine n_2: quella segnata su W da tutti i piani di S_3^*. Ciò basta[3]) per

[3]) Cfr. *F. Severi*, Trattato citato, p. 198.

concludere che si tratta di una corrispondenza (n_4, n_2) a valenza zero; onde, per il principio di Cayley-Brill, si ha:

$$x = n_2 + n_4,$$

cioè (n. 2):

$$x = 8n + 26p - 26 - \sum(6\alpha + 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 13). \qquad (1)$$

Considerando di nuovo la generatrice $S_1 \equiv (S'_2 S_4)$ della superficie V_2^x, importa notare come essa debba necessariamente appoggiarsi e all'S_3 osculatore in G al ramo $G(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di C_n^p e all'S'_1 polare di tale S_3 rispetto a V_4^2: infatti S_1 ed S_3 appartengono insieme all'iperpiano S_4 (osculatore in G a quel ramo), mentre S_1 ed S'_1 sono insieme contenuti nel piano S'_2 (polare dell'S_2 osculatore in G al medesimo ramo).

I punti T_1 e T_2, intersezioni di S_1 con V_4^2, sono quindi coniugati nell'omografia involutoria avente per spazî fondamentali, supposti indipendenti, S_3 ed S'_1 (e trasformante in sè la quadrica V_4^2); ne deriva[4]) che nello spazio ordinario le corrispondenti rette t_1 e t_2 (generatrici della rigata Ω) sono coniugate in una involuzione gobba: gli assi a_1, a_2 della quale hanno per immagini in S_5 i punti d'incontro di V_4^2 con S'_1, e per conseguenza («F», n. 3, III) coincidono con le due[5]) tangenti a contatto generalmente quadripunto («F», n. 2) relative alla falda $g(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di R_n^p.

Quando poi S_3 ed S'_1 non sono indipendenti, e per ciò si verifica la coincidenza di a_1 e a_2 in una sola retta, in questa cade pure una almeno delle rette t_1, t_2; le quali, in ogni caso, sono sempre o distinte (e allora anche sghembe) o entrambe sovrapposte ad una delle altre rette a_1, a_2, g: come si preciserà meglio nell'enunciato che segue.

Circa il genere π della rigata Ω, si può intanto osservare che esso è uguale a quello della curva V_1^{2x} (rappresentativa di Ω in S_5) intersezione di V_4^2 con la superficie V_2^x; questa ha le sue generatrici $S_1 \equiv (S'_2 S_4)$ in corrispondenza biunivoca con gli S_4 osculatori di C_n^p, ed è quindi di genere p. Sussiste allora la formula[6]):

$$2x - \pi - \delta = x - 2p + 1,$$

[4]) Cfr. *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî, seconda edizione (Messina, 1923), p. 161.

[5]) L'esistenza (di più che due e quindi) di tutto un fascio di tali tangenti, ossia l'eventualità per la falda $g(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di ammettere una congruenza lineare osculatrice degenere («F», n. 3, III), è impossibile a causa dell'ipotesi che gli spazî S_2 ed S_4, osculatori in G al ramo $G(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di C_n^p, non siano entrambi tangenti a V_4^2.

[6]) *C. Segre*, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (Math. Annalen, 34, 1889, p. 2—3).

nella quale δ è almeno uguale al numero dei rami di C_n^p aventi l'S_2 osculatore nell'origine tangente a V_4^2, ossia al numero:

$$\delta' \equiv 2\,(n+2\,p-2) - \sum(\alpha+\alpha_1-2) \tag{2}$$

delle falde di R_n^p dotate di regolo osculatore degenere («F», n. 7).

Si trova così[7]) che in generale il valore di π è:

$$x+2\,p-1-2\,(n+2\,p-2)+\sum(\alpha+\alpha_1-2),$$

con x dato dalla (1).

Riassumendo e completando, si può enunciare:

Sia R_n^p una rigata gobba irriducibile, di ordine n e di genere p, non contenuta in alcun complesso lineare e tale che una sua falda variabile $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ ammetta sempre («F», n. 1) *un regolo osculatore: mai degenere quando il complesso lineare γ osculatore lungo g alla stessa falda è speciale, ed eventualmente composto di due distinti fasci di raggi in ogni altro caso.*

Fra le tangenti principali («F», n. 2) *della falda, coi punti di contatto su g, ne esistono allora due, t_1 e t_2, che appartengono al complesso γ.*

Il luogo delle coppie di tangenti principali t_1, t_2 è una rigata Ω di ordine:

$$16\,n+52\,(p-1)-2\sum(6\,\alpha+4\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-13),$$

e di genere ordinariamente uguale[8]) *a:*

$$6\,n+24\,p-23-\sum(5\,\alpha+3\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-11)\,;$$

le somme estendendosi a tutte le falde singolari di R_n^p.

Se a_1 e a_2 sono le tangenti[9]) *della falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ con contatto* (*in punti di g*) *generalmente quadripunto* («F», n. 2 e n. 3, III), *si ha inoltre:*

1. *Quando $a_1 \neq a_2$, le rette t_1 e t_2 sono coniugate nella involuzione gobba di assi a_1, a_2: e coincidono con uno a_i di questi solo se il complesso γ è speciale (di asse a_i), oppure con g solo se il regolo osculatore alla falda lungo g è degenere.*

---

[7]) E si ritroverà per altra via al n° seguente, trattandosi del genere (eguale a quello di Ω) della curva luogo dei punti di contatto, con R_n^p, delle generatrici di Ω.

[8]) E in ogni caso mai superiore: vedasi il successivo n. 4.

[9]) Cfr. nota [5]).

2. *Quando* $a_1 \equiv a_2 \neq g$, *una delle rette* t_1, t_2 *coincide sempre con* $a_1 \equiv a_2$, *e avviene lo stesso anche dell'altra se il complesso* γ *è speciale* (*di asse* $a_1 \equiv a_2$).

3. *Quando* $a_1 \equiv a_2 \equiv g$, *è pure* $t_1 \equiv t_2 \equiv g$.

Tutte e sole le generatrici di R_n^p *origini di falde con regolo osculatore degenere sono generatrici anche della rigata* Ω, *alla quale appartengono pure le tangenti di* R_n^p *a contatto generalmente cinquepunto* («F», n. 2 e n. 3, IV).

4. Supposta la rigata R_n^p non contenuta in complessi lineari, le tangenti di una sua falda $g(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$, in punti di g, che hanno la proprietà di appartenere al complesso lineare γ osculatore alla stessa falda lungo g, sono rappresentate in S_5 («F», n. 3) dai punti della quadrica V_4^2 comuni all'S_4 osculatore in G al ramo $G(\alpha\alpha_2...\alpha_4)$ della curva C_n^p e all'S_3' polare dell'S_1 tangente in G a tale ramo.

Se si ammette che il polo P di S_4 (rispetto a V_4^2) non sia un punto di S_1, l'S_4 non può contenere l'S_3', e quindi lo sega in un piano S_2'' il quale giace su V_4^2 solo se vi giacciono insieme P ed S_1: ciò escluso, sarà S_2'' (come S_3') tangente a V_4^2 o in G o lungo una retta per G, e la sua sezione con V_4^2 rappresenterà una coppia di fasci (distinti o no) costituiti da tangenti della falda che appartengono al complesso γ.

Sia Γ la curva descritta dai centri di tali fasci al variare della falda: l'ordine di Γ, come pure la classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo Γ, sono entrambi eguali all'ordine z della varietà V_3^z generata dal piano $S_2'' \equiv (S_3'S_4)$; infatti z è anche l'ordine, e insieme la classe, della congruenza di rette a cui dà origine la coppia variabile di quei fasci.

Mediante il principio di corrispondenza di Cayley-Brill si trova[10]):

$$z = n_1 + n_4,$$

ove n_1 ed n_4 sono (n. 2) il primo rango e la classe di C_n^p.

Noto l'ordine $n_1 + n_4$ della curva Γ, se ne determina subito il genere π.

---

[10]) Cfr., nel n. 3, la determinazione dell'ordine x della superficie V_2^x. — Il valore di z si può del resto ricavare dalla formula (1) del n° seguente, applicata al sistema Σ degli iperpiani S_4 e a quello Σ' degli spazî S_3' considerati, e quindi supponendo:

$$x = z\,,\quad r = 5,\quad h = 3\,,\quad n = 1\,,\quad n' = 1\,,\quad \varrho = n_4\,(\text{n.}2)\,,\quad \varrho' = n_1\,(\text{n.}2)\,,\quad \alpha = 1\,,\quad \alpha' = 1\,.$$

Infatti, appartenendo Γ alla rigata R_n^p, di cui incontra ogni generatrice in due punti, per una formula del Segre[11]) si ha:

$$\pi = n_1 + n_4 + 2\,(p - 1) - n + 1$$

cioè (n. 2):

$$\pi = 6\,n + 24\,p - 23 - \sum (5\alpha + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

fatta però l'ipotesi, d'altronde generalmente verificata, che su Γ non esistano certi particolari punti multipli[12]), per la presenza dei quali il valore di π risulterebbe minore del precedente.

Si può così concludere:

Essendo R_n^p una rigata gobba irriducibile d'ordine n e di genere p, non contenuta in complessi lineari, si supponga che il complesso lineare γ osculatore ad ogni sua falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$, lungo la generatrice origine g, non sia mai speciale di asse g e neppure, quando g è singolare per la falda, speciale con l'asse passante pel punto cuspidale di g o appartenente al rispettivo piano tangente singolare («F», n$^{\mathrm{i}}$ 1 e 3).

Su g esistono allora sempre due punti, distinti o no, aventi la proprietà che tutte le tangenti alla falda in ciascuno di essi appartengono al complesso γ.

Il luogo delle coppie di tali punti, relative a tutte le falde di R_n^p, è una linea Γ di ordine:

$$7\,n + 22\,p - 22 - \sum (5\alpha + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

e di genere ordinariamente uguale[13]) *a:*

$$6\,n + 24\,p - 23 - \sum (5\,\alpha + 3\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

estese le somme alle varie falde singolari di R_n^p.

L'ordine di Γ è pure la classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo la linea stessa Γ.

Si può inoltre dimostrare facilmente che:

1. *Tutte e sole le generatrici di R_n^p tangenti alla linea Γ sono: le generatrici singolari, che toccano Γ nei rispettivi punti cuspidali*; *e le generatrici origini*

---

[11]) *C. Segre*, Intorno alla geometria su una rigata algebrica [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 3, (4), 1887].

[12]) Vedasi su ciò l'altro lavoro del Segre citato nella nota [6]).

[13]) E in ogni caso mai superiore.

di falde col complesso lineare osculatore speciale, ciascuna delle quali è tangente a Γ nel suo punto d'incontro con l'asse di tale complesso[14]).

2. *Supposte verificate per R_n^p le ipotesi*[15]) *del teorema del* n. 3, *la linea Γ diviene il luogo dei punti di contatto con R_n^p delle coppie di tangenti principali t_1, t_2 ivi considerate*[16]), *e per conseguenza* (n. 3,1.) *i due punti d'incontro con Γ di una generatrice di R_n^p separano armonicamente i due punti, della stessa generatrice, nei quali una tangente ha con R_n^p un contatto generalmente quadripunto* («F», n. 3, III).

5. Generalizzando il procedimento applicato nel n. 3 a determinare l'ordine x della superficie V_2^x, si perviene alla proposizione che segue, di uso frequente più innanzi:

In uno spazio lineare S_r, ad r dimensioni, siano dati un sistema algebrico Σ di ∞^1 ipersuperficie V_{r-1}^n d'ordine n, ed un sistema algebrico Σ' di ∞^1 varietà $V_h^{n'}$ della stessa dimensione h (con $o < h < r$) e di ordine n'.

Se fra gli elementi V_{r-1}^n di Σ e gli elementi $V_h^{n'}$ di Σ' esiste una corrispondenza algebrica (α, α'), la varietà W_h^x luogo della intersezione $V_{h-1}^{nn'}$ di due elementi corrispondenti variabili (supposti sempre distinti e non appartenentisi) ha l'ordine x dato dalla formula :

$$x = \alpha n \varrho' + \alpha' n' \varrho \,, \tag{1}$$

ove ϱ è il numero delle ipersuperficie di Σ passanti per un punto generico e ϱ' è quello delle varietà di Σ' incidenti ad un generico spazio S_{r-h-1}.

Infatti, se $h=r-1$ la formula (1) è facile conseguenza del principio di corrispondenza di Chasles. Supposto poi $h < r-1$, si osserva che una $V_h^{n'}$ del sistema Σ' incontra un S_{r-h}, fissato in modo generico, in n' punti, i quali, al variare di $V_h^{n'}$ entro Σ', descrivono una curva $V_1^{\varrho'}$ di ordine ϱ' (intersezione dell'S_{r-h} con la V_{h+1}, evidentemente d'ordine ϱ', luogo di tutte le $V_h^{n'}$ di Σ').

Per ogni punto M (considerato come origine di un ramo) di $V_1^{\varrho'}$ passa una varietà $V_h^{n'}$ di Σ', alla quale corrispondono a ipersuperficie V_{r-1}^n di Σ: sia M' uno qualunque dei loro $\alpha\, n\, \varrho'$ punti d'intersezione con $V_1^{\varrho'}$. Da M' escono ϱ ipersuperficie V_{r-1}^n di Σ, a ciascuna delle quali corrispondono

[14]) Il quale asse ha con R_n^p, nel medesimo punto, un contatto generalmente di 4° ordine («F», n. 3, IV).

[15]) Implicanti quelle del precedente enunciato.

[16]) Che debba intendersi per punto di contatto di t_1 o t_2 con R_n^p, quando t_1 e t_2 coincidono con una generatrice di R_n^p, appare ovviamente dalla dimostrazione svolta in questo n. 4.

α' varietà $V_h^{n'}$ di Σ' seganti l'S_{r-h}, ossia incidenti a $V_1^{\varrho'}$, in altrettanti gruppi di n' punti M.

Sulla curva $V_1^{\varrho'}$ esiste pertanto fra i punti M ed M' una corrispondenza algebrica $(\alpha' n' \varrho, \alpha n \varrho')$.

Ora, è evidente che i punti M', in numero di $\alpha n \varrho'$, corrispondenti ad un punto M formano un gruppo di una serie lineare d'ordine $\alpha n \varrho'$: quella segnata su $V_1^{\varrho'}$ da tutte le ipersuperficie di S_r (o dell'S_{r-h} cui appartiene $V_1^{\varrho'}$) di ordine αn.

Ne deriva che si tratta di una corrispondenza $(\alpha' n' \varrho, \alpha n \varrho')$ a valenza zero, cui è applicabile il principio di Cayley-Brill, e quindi dotata di un numero di punti uniti eguale a:

$$\alpha' n' \varrho + \alpha n \varrho',$$

qualunque sia il genere di $V_1^{\varrho'}$.

Tale è dunque il numero dei punti di un generico S_{r-h} comuni ciascuno a due elementi corrispondenti di Σ e Σ', ossia l'ordine x che figura nella formula (1).

Osservazione. — La formula (1) rimane valida anche se qualche varietà $V_h^{n'}$ di Σ' appartiene ad alcune delle ipersuperficie corrispondenti di Σ, o coincide con esse: però la varietà W_h^x è allora necessariamente riducibile, essendone parte quella $V_h^{n'}$ contata un certo numero di volte.

6. Sia Δ un sistema, d'indice λ[17]), di ∞^1 complessi di rette, tutti di grado ν e posti in corrispondenza algebrica (k, k') con le falde di una rigata gobba R_n^p.

In S_5 (n. 1), mentre R_n^p ha per immagine una curva C_n^p della quadrica V_4^2, tali complessi sono rappresentati, come è noto[18]), dalle varietà intersezioni complete di V_4^2 con ∞^1 ipersuperficie di ordine ν, pure formanti un sistema algebrico Σ d'indice λ, e riferite ai rami di C_n^p in una corrispondenza (k, k').

I k complessi di Δ, corrispondenti ad ogni falda $g(\alpha\alpha_1 ...)$ di R_n^p, contengono sempre ciascuno 2ν, e quindi insieme $2k\nu$, delle sue tangenti principali (coi punti di contatto su g): ammesso però che non ne contengano mai infinite[19]).

---

[17]) Cioè tale che per una retta generica passino λ complessi del sistema.

[18]) *F. Klein*, Über einen liniengeometrischen Satz (Math. Annalen, 22, 1883).

[19]) La quale ipotesi implica che nessuna falda di R_n^p sia priva di regolo osculatore («F», n. 1).

Siano esse t_i $(i = 1, 2, ..., 2\,k\,\nu)$: i punti T_i, che le rappresentano in S_5, sono allora («F», n. 3) le intersezioni di V_4^2 con le k curve in cui l'S_2' polare dell'S_2 osculatore in G al ramo $G(\alpha\alpha_1 ...)$, di C_n^p, sega le k ipersuperficie a questo corrispondenti in Σ.

Ora, l'ordine x della superficie W_2^x descritta da tali curve, al variare di G su C_n^p, si desume dalla proposizione del n. precedente, applicata in S_5 al sistema Σ già considerato di ipersuperficie e a quello Σ' dei piani S_2'; è quindi da supporre in questo caso:

$$r=5, \quad h=2, \quad n=\nu, \quad n'=1, \quad \varrho=\lambda, \quad \varrho'=n_2\,(\text{n}\cdot 2), \quad \alpha=k, \quad \alpha'=k',$$

e si ha (n. 5):

$$x = k\nu n_2 + \lambda k'. \tag{1}$$

Ne segue che *l'ordine della rigata costituita dalle tangenti principali* t_i, *relative a tutte le falde di* R_n^p, *è:*

$$2\,(k\nu n_2 + \lambda k').$$

Basta infatti osservare che in S_5 il luogo dei corrispondenti punti T_i è la linea W_1^{2x} (d'ordine $2\,x$) intersezione completa della quadrica V_4^2 con la superficie W_2^x predetta.

Fra i punti G di C_n^p e i punti T_i di W_1^{2x} esiste una corrispondenza $(1, 2\,k\,\nu)$, immagine di quella in cui sono omologhe ogni generatrice g di R_n^p, come origine di una falda, e una qualunque delle $2\,k\,\nu$ tangenti principali t_i (sopra considerate) relative alla falda stessa.

I $2\,k\,\nu$ punti T_i corrispondenti ad un punto G, origine di un ramo $G(\alpha\alpha_1 ...)$ di C_n^p, appartengono tutti al piano S_2' polare dell'S_2 osculatore in G a tale ramo[20]), e sono quindi coniugati di G rispetto alla quadrica V_4^2. Questa contiene allora per intero (quando $G \neq T_i$) le rette GT_i, le quali, variando G su C_n^p, descrivono una superficie V_2^ξ rappresentativa della congruenza Γ luogo di tutti i fasci di raggi (gt_i) inerenti alle diverse falde $g(\alpha\alpha_1 ...)$ di R_n^p.

Importa ora notare che le $2\,k\,\nu$ rette GT_i, variabili col ramo $G(\alpha\alpha_1 ...)$, formano la completa intersezione di V_4^2 coi k coni Γ_j $(j = 1, 2, ..., k)$ proiettanti da G le curve (d'ordine ν) sezioni del piano S_2' con le k ipersuperficie di Σ corrispondenti a quel ramo di C_n^p[21]).

---

[20]) Affinchè il punto G sia unito nella corrispondenza occorre pertanto (ma non basta) che esso appartenga a entrambi i piani S_2 ed S_2', cioè che questi piani siano (l'uno e quindi anche l'altro) tangenti (almeno) in G alla quadrica V_4^2 (con nessun piano della quale essi possono coincidere, per l'osservazione fatta nella nota precedente).

[21]) Quando il piano S_2' passa per G (ossia è ivi tangente a V_4^2) tali coni si riducono ciascuno al piano stesso ripetuto ν volte.

Ne deriva che la superficie V_2^{ξ} è l'intersezione *completa* della quadrica V_4^2 con la varietà $V_3^{\xi'}$ generata dai coni variabili Γ_j; pertanto fra gli ordini ξ e ξ' si ha la relazione $\xi = 2\,\xi'$, e un piano generico S_2^* situato su V_4^2 dev'essere incidente a V_2^{ξ} negli stessi punti in cui incontra $V_3^{\xi'}$: i quali sono sempre in numero di ξ', tanto se S_2^* è immagine di un piano rigato, quanto se esso rappresenta una stella di raggi. In altri termini: l'ordine e la classe della congruenza Γ (rappresentata in S_5 dalla V_2^{ξ}) luogo dei fasci (gt_i) sono entrambi eguali a $\frac{1}{2}\,\xi$. E per conseguenza: *$\frac{1}{2}\,\xi$ è l'ordine della curva luogo dei centri G_i dei fasci (gt_i), ossia dei punti di contatto con R_n^p delle tangenti t_i, ed è insieme la classe dell'inviluppo dei piani di tali fasci, ossia dei piani tangenti ad R_n^p nei punti G_i.*

Resta da determinare l'ordine ξ della rigata V_2^{ξ}, le cui generatrici congiungono ciascuna (come fu già osservato) un punto G della curva C_n^p e un punto T_i della curva W_1^{2x}, omologhi in una corrispondenza $(1, 2\,k\,\nu)$.

Quando G, come origine di un ramo $G(\alpha\alpha_1 ...)$ di C_n^p, è un punto unito di tale corrispondenza, l'S_2' polare dell'S_2 osculatore in G al ramo stesso è tangente[22]) almeno in G alla quadrica V_4^2, che sega perciò in una coppia di rette S_1' ed S_1'', distinte o no, uscenti da G. Di più, il punto G appartiene allora ad un certo numero γ $(\geqslant 1)$ delle k ipersuperficie (d'ordine ν) che corrispondono al ramo nel sistema Σ, e che vengono incontrate dalle rette S_1' ed S_1'' nei $2k\nu$ punti T_i omologhi di G: fra questi, quelli che coincidono con G, senza essere consecutivi a G su alcuna delle γ ipersuperficie suddette, sono quindi generalmente in numero di $2\,\gamma$, e in ogni caso[23]) in numero pari.

Considerando, dopo ciò, in un generico fascio d'iperpiani di S_5, la corrispondenza $(2x, 2k\nu n)$ che ha luogo fra due iperpiani proiettanti i punti omologhi G e T_i rispettivamente variabili su C_n^p e su W_1^{2x}, si trova che l'ordine cercato ξ è esprimibile con la formula:

$$\xi = 2\,x + 2\,k\,\nu\,n - 2\,\omega\,,$$

ove x è dato dall'altra formula (1), e ω è il numero dei punti G di C_n^p, contati ciascuno un debito numero di volte, origini di rami con l'S_2 osculatore in G ivi tangente a V_4^2, e situati sopra una almeno delle ipersuperficie del sistema corrispondenti ai rami stessi.

In conclusione:

Sia Δ un sistema di ∞^1 complessi di grado ν, tale che per una retta

[22]) Vedasi la nota [20]).

[23]) Ad esempio anche quando G fosse multiplo per qualcuna delle medesime γ ipersuperficie.

generica ne passino λ; *e sia* R_n^p *una rigata gobba irriducibile, di ordine n e di genere p, priva di falde ammettenti* («F», n. 1) *un piano rigato osculatore o una stella osculatrice di raggi, ed eventualmente contenuta in un complesso o in una congruenza lineari: anche speciali, ma con l'asse o le direttrici non appartenenti a tutti i complessi di* Δ.

Se fra i complessi di Δ *e le falde di* R_n^p *esiste una corrispondenza algebrica* (k, k'), *ogni falda* $g(aa_1...)$ *di* R_n^p *possiede* $2\,k\nu$ *tangenti principali, coi punti di contatto su g, appartenenti ciascuna ad uno dei k complessi corrispondenti di* Δ: *supposto che mai alcuno di questi contenga per intero il regolo costituito da tutte le tangenti principali della falda (nei punti della sua generatrice origine).*

L'ordine della rigata luogo delle $2\,k\nu$ *tangenti principali siffatte, relative alle varie falde di* R_n^p, *è:*

$$6\,k\nu\,(n+2\,p-2)+2\,\lambda\,k'-2\,k\nu\sum(2\alpha+\alpha_1-3),$$

mentre l'ordine della curva luogo dei loro punti di contatto, e la classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p *lungo tale curva, sono entrambi eguali a:*

$$2\,k\nu\,(2\,n+3\,p-3)-\omega+\lambda k'-k\nu\sum(2\alpha+\alpha_1-3),$$

estendendosi i sommatorî a tutte le falde singolari di R_n^p *e significando* ω $(\geqslant 0)$ *il numero delle falde, contate ciascuna un certo numero di volte*[24]), *aventi il rispettivo regolo osculatore degenere e nello stesso tempo la propria generatrice origine appartenente ad uno almeno dei corrispondenti complessi di* Δ.

Inoltre[25]) *se* R_n^p *possiede solo falde lineari, col primo rango eguale ad* 1 *e col regolo osculatore mai ridotto ad un fascio doppio di raggi* («F», n. 1), *il genere comune della rigata, della curva e della sviluppabile suddette, vale:*

$$4\,k^2\nu^2\,(n+2\,p-2)-k\nu n+(2k\nu-1)\,(\lambda k'-\omega)+1.$$

I successivi n.ⁱ 7—11 concernono alcune delle molteplici proposizioni particolari a cui dà luogo la precedente: dalla quale si possono far derivare, in parte, anche i risultati dei nⁱ 3 e 4 (cfr. n. 8, Oss. 1a).

---

[24]) Che in generale è uguale al numero di quelli, fra i k corrispondenti complessi di Δ, che contengono la sua generatrice origine.

[25]) Come risulta dalla formula del Segre, citata alla nota [11]), sul genere di una curva appartenente ad una rigata: o meglio da una facile estensione della stessa formula al caso in cui tale curva possiede punti con multiplicità maggiore di 2.

Osservazione. — Si può notare che *gli ordini dei due luoghi, rigata e curva, sopra considerati* (nell'ultimo enunciato) *sono anche eguali rispettivamente a:*

$$2\,(k\nu\tau + \lambda k')\,,$$

e a:

$$k\nu\,(n+\tau) + \lambda k' - \omega\,,$$

ove τ è l'ordine (e insieme la classe) della congruenza costituita delle tangenti principali di R_n^p[26]).

7. Suppongasi, nel teorema del n. 6, stabilita la corrispondenza (k, k') definendo come omologhi un complesso di Δ e una falda di R_n^p quando il primo contiene la generatrice origine della seconda: con l'avvertenza di contare una tal falda, fra quelle corrispondenti al complesso, un numero di volte eguale alla sua *multiplicità d'intersezione* con questo[27]).

È allora $k = \lambda$ e $k' = n\nu$; inoltre si trova che $\omega = \lambda\delta'$, avendo δ' lo stesso significato che nel n. 3 [formula (2)].

Per conseguenza:

Sia R_n^p una rigata gobba d'ordine n e di genere p, senza falde prive di regolo osculatore («F», n. 1), *ed eventualmente contenuta in un complesso, o in una congruenza, lineare (anche speciale).*

Data allora, in modo generico rispetto ad R_n^p, una totalità Δ di ∞^1 complessi di grado ν, tale che per ogni retta (non comune a tutti) ne passino λ, si ha che:

Le tangenti principali di R_n^p, aventi ciascuna la proprietà di appartenere ad un medesimo complesso di Δ insieme con la generatrice contenente il rispettivo punto di contatto[28]), *formano una rigata Φ di ordine:*

$$4\,\lambda\nu\,(2\,n + 3\,p - 3) - 2\,\lambda\nu\Sigma(2\,\alpha + \alpha_1 - 3)\,,$$

mentre i loro punti di contatto hanno per luogo una linea Ψ di ordine:

$$\lambda(5\,\nu - 2)\,n + 2\lambda(3\,\nu - 2)\,(p-1) - \lambda(2\,\nu - 1)\,\Sigma(\alpha - 1) - \lambda(\nu - 1)\,\Sigma(\alpha_1 - 1)\,,$$

eguale alla classe della sviluppabile S circoscritta ad R_n^p lungo la linea stessa.

I sommatorî vanno estesi alle varie falde singolari $g(\alpha\alpha_1\ldots)$ di R_n^p.

---

[26]) Vedasi il § 1 della seconda Memoria citata nella nota [1]).

[27]) Ossia (cfr. «F», n. 1) alla multiplicità d'intersezione, in S_5, del ramo di C_n^p rappresentativo della falda, con l'ipersuperficie segante la quadrica V_4^2 nella varietà immagine del complesso.

[28]) Intendasi, più precisamente, la generatrice origine di quella falda (sempre unica, poichè Δ è in posizione generica rispetto ad R_n^p) con la quale la tangente principale ha un contatto generalmente tripunto («F», n. 2).

Se è sempre $\alpha = \alpha_1 = 1$ e se nessun regolo osculatore di R_n^p riducesi ad un fascio doppio di raggi, il genere comune di Φ, di Ψ e di S è:

$$2\lambda(2\lambda\nu^2 - 2\lambda\nu + 1)(n + 2p - 2) + 4\binom{\lambda\nu}{2}n + 1.$$

Introducendo il rango r della rigata R_n^p e l'ordine τ (eguale alla classe) della congruenza costituita dalle sue tangenti principali[26]*), gli ordini di Φ e di Ψ si possono sempre rispettivamente esprimere nella forma:*

$$2\lambda\nu(n + \tau),$$

e:

$$\lambda(2\nu - 1)n + \lambda(\nu - 1)\tau + \lambda r.$$

Se, in particolare, Δ è un fascio di complessi lineari, si ha $\lambda = \nu = 1$ e quindi:

L'ordine[29]*) della linea luogo dei punti di R_n^p che corrispondono ai rispettivi piani tangenti in un sistema nullo variabile in un fascio generico*[30]*), come pure la classe dell'inviluppo di tali piani, sono entrambi eguali a:*

$$n + r,$$

ossia a:

$$3n + 2p - 2 - \Sigma(\alpha - 1).$$

E le tangenti principali di R_n^p nei punti stessi generano una rigata di ordine:

$$2(n + \tau),$$

ossia:

$$4(2n + 3p - 3) - 2\Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3).$$

Il genere, sia di questa rigata che di quella linea, vale:

$$2n + 4p - 3$$

quando R_n^p è generica (n. 2).

Se invece si suppone che Δ sia il sistema di tutti i complessi lineari osculatori alle falde di una rigata $R_{n'}^{p'}$, di ordine n' e di genere p', è $\nu = 1$ e λ eguale alla classe n_4' (cfr. n. 2) della curva $C_{n'}^{p'}$ rappresentativa di $R_{n'}^{p'}$ sulla quadrica V_4^2 di S_5.

---

[29]) Cfr. *A. Voss*, Zur Theorie der windschiefen Flächen (Math. Annalen, 8, 1875, p. 84—85): ove si determina tale ordine nell'ipotesi che la rigata R_n^p sia intersezione di tre complessi.

[30]) Ossia: *nel sistema nullo inerente ad un complesso lineare variabile in un fascio generico.*

Ammettendo, per semplicità, che R_n^p e $R_{n'}^{p'}$ siano generiche (n. 2), si può dire:

Date, in posizione mutua generica, due rigate gobbe generiche (n. 2) R_n^p *ed* $R_{n'}^{p'}$ *(la seconda delle quali non sia contenuta in complessi lineari), di ordini n e n', e di generi p e p', si ha che:*

La curva luogo dei punti di R_n^p coniugati ai rispettivi piani tangenti nel sistema nullo inerente al complesso lineare osculatore ad $R_{n'}^{p'}$ lungo una sua generatrice variabile, è di ordine:

$$5\,(3\,n+2\,p-2)\,(n'+4\,p'-4)\,,$$

eguale alla classe della sviluppabile inviluppo di quei piani tangenti. Mentre la rigata luogo delle tangenti principali di R_n^p, nei punti di tale curva, è di ordine:

$$20\,(2\,n+3\,p-3)\,(n'+4\,p'-4)$$

e, come la curva stessa, di genere:

$$4n\binom{5n'+20p'-20}{2}+10(n+2p-2)\,(n'+4p'-4)+1\,.$$

8. Quando R_n^p non appartiene a complessi lineari, il penultimo risultato del n. 7 rientra pure come caso particolare (corrispondente alle ipotesi $h=1$, $k=0$) nel seguente altro:

Sia $g(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ una falda variabile, supposta sempre dotata di regolo osculatore, di una qualunque rigata gobba irriducibile R_n^p, d'ordine n e di genere p, non contenuta in complessi lineari.

Esiste allora un complesso lineare (e uno solo) avente lungo g, con la falda, una multiplicità d'intersezione («F», n. 1) *eguale a $\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_{h-1}$*[31]*), e passante per $5-h$ rette fisse, k delle quali siano generatrici generiche di R_n^p.*

Fra le tangenti principali, nei punti di g, della falda variabile, ve ne sono due appartenenti a tale complesso; il loro luogo è una rigata di ordine:

$$2\,(h+3)\,n+2\,(h^2-h+6)\,(p-1)-2hk-2\,\xi-2\sum(2\,\alpha+\alpha_1-3)\,,$$

ove:

[31]) Si ritenga tale somma eguale ad α quando $h=1$.

$$\xi = \sum [(h-1)\,\alpha + (h-2)\,\alpha_1 + \cdots + \alpha_{h-2} - \frac{1}{2}h\,(h-1)]\,,$$

mentre il luogo dei loro punti di contatto è una curva di ordine:

$$(h+2)\,n + (h^2 - h + 2)\,(p-1) - hk - \xi - \sum(\alpha - 1)$$

eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo la curva stessa.

Tutti i sommatorî si estendono alle varie falde singolari $(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ *di* R_n^p.

Se R_n^p è generica (n. 2), *i due luoghi sono entrambi di genere:*

$$(h+1)\,n + (h^2 - h + 4)\,(p-1) - hk + 1\,.$$

Per la dimostrazione si osserva intanto che il complesso lineare suddetto, variabile con la falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$, descrive una totalità Δ i cui elementi corrispondono biunivocamente alle falde di R_n^p.

Il numero λ dei complessi di Δ contenenti una data retta generica è poi eguale al numero degli iperpiani di S_5 passanti: per un punto generico O della quadrica V_4^2 (n. 1), per uno spazio fisso S_{4-h} incidente a C_n^p (n. 2) in k punti, e per l'S_{h-1} osculatore nell'origine a qualche ramo di C_n^p.

Proiettando dallo spazio $S_{5-h} \equiv OS_{4-h}$ sopra un generico S_{h-1}^*, risulta che λ è pure il numero degli iperpiani stazionari della curva C^*, d'ordine $n-k$ e di genere p, proiezione di C_n^p. Quindi:

$$\lambda = h\,[n-k+(h-1)\,(p-1)] - \sum[(h-1)\,\alpha + (h-2)\,\alpha_1 + \cdots + \alpha_{h-2} - \frac{1}{2}h(h-1)]\,,$$

estesa la somma a tutti i rami singolari di C^* (o di C_n^p).

Dopo ciò, basta applicare la proposizione del n. 6, attribuendo a λ il valore ora indicato, a k, k', ν il valore 1, e ad ω il valore δ' espresso dalla formula (2) del n. 3.

Osservazione 1a. — Applicando il teorema nell'ipotesi $h = 5$, e quindi $k = 0$, si ritrovano alcuni dei risultati esposti nei n[i] 3 e 4.

Osservazione 2a. — Il teorema vale anche se le k generatrici fisse di R_n^p sono, tutte o in parte, coincidenti o consecutive: purchè le falde a cui appartengono abbiano i loro caratteri («F», n. 1) eguali ad 1. Si ha così, ad esempio:

Essendo R_n^p una generica (n. 2) *rigata gobba d'ordine n e di genere p, non appartenente a complessi lineari, si consideri la rete Σ di tutti i com-*

plessi lineari passanti per un dato regolo osculatore ad R_n^p (lungo una sua generatrice fissa).

In Σ esiste allora un (unico) complesso avente la proprietà di contenere una generatrice variabile g di R_n^p e la sua consecutiva in qualche falda di origine g: le due tangenti principali di questa falda (in punti di g), che appartengono a tale complesso, generano una rigata di ordine:

$$2\,(5\,n+8\,p-14)$$

e di genere:

$$3\,n+6\,p-11\ ;$$

mentre i loro punti di contatto descrivono una curva (dello stesso genere e) di ordine:

$$2\,(2\,n+2\,p-5)\ ,$$

eguale alla classe della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti alla falda nei punti stessi.

9. Sia $\varDelta$ il sistema di tutti i complessi lineari osculatori alla rigata R_n^p (cioè alle sue falde): l'indice λ (n. 6) di $\varDelta$ è evidentemente la classe n_4 (n. 2) della curva C_n^p che rappresenta in S_5 la R_n^p. Supposta questa generica (n. 2), si facciano corrispondere fra di loro un complesso di $\varDelta$ e una falda di R_n^p quando la generatrice origine della falda appartiene al complesso, senza però essere una delle cinque generatrici consecutive di R_n^p individuanti il complesso medesimo.

Si ha così una corrispondenza algebrica $(n_4-5,\ n-5)$ fra i complessi di $\varDelta$ e le falde di R_n^p: infatti, in S_5, l'iperpiano osculatore in un punto generico G della curva C_n^p incontra questa in altri $n-5$ punti, mentre da G escono n_4-5 iperpiani che osculano altrove C_n^p.

Le falde di R_n^p per le quali la generatrice origine è singolare («F», n. 3, I) sono in questo caso le sole («F», n. 7) dotate di regolo osculatore degenere. Il loro numero è:

$$2\,(n+2\,p-2)\ ,$$

e ciascuna di esse ha la propria generatrice origine contenuta (per la definizione stessa della corrispondenza) in tutti gli n_4-5 complessi corrispondenti di $\varDelta$.

Si può allora applicare il teorema del n. 6 nelle ipotesi:

$$\lambda = n_4 \quad , \quad \nu = 1 \quad , \quad k = n_4 - 5 \quad , \quad k' = n - 5$$

e:

$$\omega = 2\,(n + 2\,p - 2)\,(n_4 - 5).$$

In tal modo, tenendo anche presente il n. 2, si trova che:

Il luogo delle coppie di tangenti principali di una generica (n. 2) *rigata gobba R_n^p (d'ordine $n > 5$, di genere p e non contenuta in complessi lineari) aventi i punti di contatto su una generatrice variabile g e appartenenti con g al complesso lineare osculatore ad R_n^p lungo* un'altra *generatrice, è una rigata di ordine:*

$$20\,(n + 3\,p - 5)\,(2\,n + 5\,p - 5) - 60\,p\,(p - 1)$$

e di genere:

$$100\,(n - 5)\binom{n + 4p - 4}{2} + 20\,(n + 4p - 4)\,p + 1\,,$$

mentre il luogo dei loro punti di contatto è una curva (*dello stesso genere e*) *di ordine:*

$$5\,(n + 2\,p - 2)\,(3\,n + 8\,p - 15) - 40\,p\,(p - 1)$$

eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo la curva stessa.

10. Data una superficie gobba R_n^p, che non stia in un complesso lineare, esiste tutto un sistema Δ di ∞^1 complessi lineari aventi ciascuno la proprietà di contenere per intero i regoli osculatori a due diverse falde di R_n^p (lungo le rispettive generatrici origini).

Il numero λ dei complessi, di Δ, a cui appartiene una retta generica, è anche quello degli iperpiani di S_5 passanti per un punto generico O della quadrica V_4^2 (n. 1) e aventi due contatti di 2° ordine (almeno) con la curva C_n^p immagine di R_n^p su V_4^2.

Proiettando da O sopra un generico iperpiano S_4^*, si vede che λ è pure il numero degli spazî S_3^* (di S_4^*) aventi due contatti tripunti con la curva C^* (di ordine n e di genere p) proiezione di C_n^p. Supposta questa, e quindi C^*, non dotata di altre singolarità che di punti multipli ordinarî, si ha[32]:

$$\lambda = \frac{9}{2}\,(n - 4)\,(n - 5) + 18\,(n - 5)\,p + 18\,p\,(p - 1)\,.$$

Chiamando ora corrispondenti un complesso di Δ ed una falda di R_n^p quando il regolo osculatore a questa appartiene al complesso, si

[32]) Per una nota formula di E. De-Jonquières: cfr. *F. Severi*, Trattato citato, Vol. I, Parte I, p. 244.

stabilisce fra i complessi di Δ e le falde di R_n^p una corrispondenza (k, k'), con $k' = 2$ e k eguale al numero degli S_4 di S_5 che, passando per l'S_2 osculatore nell'origine a un dato ramo generico di C_n^p, hanno con C_n^p un ulteriore contatto di 2° ordine. E' quindi ovvio che k è pure il numero dei flessi della curva, di ordine $n - 3$ e di genere p, proiezione di C_n^p da quell' S_2 sopra un piano generico; dunque:

$$k = 3\,(n + 2\,p - 5).$$

Dopo ciò, dal teorema del n. 6, per la cui applicazione è in questo caso da porre (cfr. n. 9):

$$\omega = 2\,(n + 2\,p - 2)\,k,$$

si deduce:

Sia R_n^p una rigata gobba generica (n. 2) *di ordine $n > 5$, di genere p e non contenuta in complessi lineari.*

I regoli osculatori ad R_n^p si possono associare a due a due in modo che entrambi quelli di una stessa coppia appartengano insieme ad un complesso lineare γ[33]).

Sulla generatrice di contatto, con R_n^p, di ciascun regolo di una tale coppia variabile esistono allora due punti P_i $(i = 1, 2)$ aventi per coniugati, nel sistema nullo inerente a γ, i rispettivi piani tangenti π_i ad R_n^p.

L'ordine della linea luogo dei punti P_i, e la classe della sviluppabile inviluppo dei piani π_i, sono entrambi eguali a:

$$3\,(n + 4\,p - 4)\,(n + 4\,p - 5) + 6\,(n - 5)\,(2\,n + 5\,p - 5),$$

mentre le tangenti principali di R_n^p, nei punti P_i, generano una rigata di ordine:

$$36\,(n + 3\,p - 3)\,(n + p - 5) + 36\,p\,(p - 1)$$

e (come la linea e la sviluppabile suddette) di genere:

$$324\binom{n+2p-3}{3} - 228\binom{n+2p-4}{2} - 318\,(n+2p-5)\,p + 54p + 1\,.$$

11. Sia la rigata R_n^p, di cui al n. 10, di ordine $n > 7$: la curva C_n^p, sua immagine sulla quadrica V_4^2 di S_5, possiede allora ∞^1 iperpiani quadritangenti, fra i quali quelli passanti per un dato punto sono in numero di:

[33]) Variabile con la coppia di regoli.

$$\lambda = 16 \sum_{i=0}^{4} \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i}, \tag{1}$$

altrettanti essendo[32]) gli spazî a tre dimensioni quadritangenti di una curva di ordine n e di genere p (con soli punti multipli ordinarî) appartenente ad uno spazio a quattro dimensioni.

Fra gli iperpiani suddetti e i loro punti di contatto esiste una corrispondenza (k, k'), con $k' = 4$ e k eguale al numero degli iperpiani tangenti a C_n^p in un dato punto generico G, e aventi con C_n^p tre ulteriori contatti (semplici).

Ora, k è pure il numero dei piani tritangenti della curva, d'ordine $n-2$ e di genere p, proiezione di C_n^p dall'S_1 tangente in G sopra un S_3. Quindi[32]):

$$k = 8 \sum_{i=0}^{3} \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i}, \tag{2}$$

Interpretando tutto nello spazio ordinario, e applicando poi il teorema del n. 6, con l'avvertenza di attribuire ad ω (cfr. n^{i} 9 e 10) il valore:

$$2\,(n+2\,p-2)\,k,$$

si perviene alla seguente proposizione:

Una generica (n. 2) *rigata gobba R_n^p, di ordine $n > 7$, di genere p, e non contenuta in complessi lineari, ammette ∞^1 complessi lineari quadritangenti, cioè tali che delle n generatrici di R_n^p situate in ciascuno di essi, otto coincidano a due a due in quattro* «generatrici di contatto» *del complesso con R_n^p.*

Fra le tangenti principali di R_n^p nei punti delle generatrici di contatto di un complesso lineare quadritangente, ve ne sono quattro coppie (*una per ciascuna di quelle generatrici*) *appartenenti al complesso medesimo; al variare di questo esse generano una rigata di ordine:*

$$16 \sum_{i=0}^{4} (20+3\,i) \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i} + 48 \sum_{i=0}^{3} (2+3i) \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i},$$

mentre i loro punti di contatto descrivono una curva di ordine:

$$128 \sum_{i=0}^{4} \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i} + 16 \sum_{i=0}^{3} (3+2i) \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i}$$

eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo la curva stessa.

Il genere comune della rigata, della curva e della sviluppabile è:

$$4\,\lambda\,(2\,k - 1) + k\,(n + 4\,p - 4) + 1\,,$$

con λ e k definiti dalle formule (1) *e* (2).

In modo analogo si dimostra che:

Supposto $n > 8$, i punti P_i ($i = 1, 2, \ldots, 2\,n - 16$) della rigata R_n^p, che corrispondono ai rispettivi piani tangenti π_i nel sistema nullo inerente ad un complesso lineare quadritangente variabile, e non appartengono alle generatrici di contatto di questo, formano una linea di ordine:

$$16 \sum_{i=0}^{5} (15 - i) \binom{n-4-i}{5-i} \binom{p}{i} + 32 \sum_{i=0}^{4} (3 + 2i) \binom{n-5-i}{4-i} \binom{p}{i}$$

eguale alla classe dell'inviluppo dei piani π_i; mentre le tangenti principali di R_n^p nei punti P_i generano una rigata di ordine:

$$64 \sum_{i=0}^{5} (10 + i) \binom{n-4-i}{5-i} \binom{p}{i} + 96 \sum_{i=0}^{4} (2 + 3i) \binom{n-5-i}{4-i} \binom{p}{i}$$

e (come la linea e l'inviluppo predetti) di genere:

$$\lambda\,(2\,\bar{k} - 1)\,(n - 8) + \bar{k}\,(n + 4\,p - 4) + 1\,,$$

ove λ è dato dalla formula (1) *e:*

$$\bar{k} = 16 \sum_{i=0}^{4} \binom{n-5-i}{4-i} \binom{p}{i}\,.$$

12. Sia G un punto *generico* della curva C_n^p rappresentativa, sulla quadrica V_4^2 di S_5 (n. 1), di una rigata R_n^p, d'ordine n e di genere p, non appartenente a complessi lineari.

L'S_4 polare del punto G, immagine di una generatrice g di R_n^p, sega ulteriormente C_n^p in $n - 2$ punti G_i' ($i = 1, 2, \ldots\ldots, n - 2$), ai quali corrispondono su R_n^p altrettante generatrici g_i' incidenti a g: ciò vale anche per un punto G *qualunque* di C_n^p se si conviene di contare fra i punti G_i' (coniugati a G su C_n^p) lo stesso G ripetuto $\mu - 2$ volte, essendo μ la molteplicità d'intersezione, in G, della curva C_n^p con l'S_4 polare di G.

Si consideri ora lo spazio S_3 osculatore in G ad un ramo $G(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$

di C_n^p e il suo S_1' polare (rispetto a V_4^2), che si supporrà sempre non incidente a C_n^p nè appartenente a V_4^2. Ogni punto G_i' è pertanto esterno ad S_1', e individua con S_1' un piano S_2^* mai situato su V_4^2: sia poi S_4^* l'iperpiano congiungente S_3 con lo stesso punto G_i', oppure con un punto fisso U generico, secondochè G_i' è esterno o no ad S_3.

Perchè S_2^* appartenga ad S_4^* occorre e basta che S_3 ed S_1' abbiano in comune un punto D (e quindi siano tangenti in D a V_4^2) e che il punto G_i'[34]) sia coniugato a D (rispetto a V_4^2).

Ammettendo allora che, quando una falda $g(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di R_n^p possiede una congruenza lineare osculatrice speciale di direttrice d, non esista nessuna generatrice g_i' (distinta da g) incidente ad entrambe le rette g e d, il piano S_2^* non potrà mai appartenere all'iperpiano S_4^*: onde S_2^* ed S_4^* avranno sempre in comune una retta S_1^*.

Al variare del ramo $G(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$ di C_n^p, tale retta descrive una superficie V_2^x, la quale, corrispondendosi gli spazî S_2^* ed S_4^* biunivocamente, è di ordine (n. 5):

$$x = y + z\,, \tag{1}$$

supposto che le varietà descritte da S_2^* e da S_4^* abbiano rispettivamente l'ordine y e la classe z.

La retta S_1^* passa per il punto G_i' (comune ad S_2^* e ad S_4^*) di C_n^p e, quando non giace sulla quadrica V_4^2, incontra questa in un ulteriore punto G_i''; inoltre $S_1^* \equiv (S_2^* S_4^*)$ è incidente a entrambi gli spazî, polari l'uno dell'altro, S_3 (contenuto in S_4^*) ed S_1' (contenuto in S_2^*).

Ne segue[35]) che, nello spazio ordinario, le rette g_i' e g_i'', corrispondenti ai punti G_i' e G_i'' di S_5, sono coniugate nella involuzione gobba avente per assi le rette rappresentate in S_5 dalle intersezioni di S_1' con V_4^2, cioè («F», n. 3, III) le direttrici della congruenza lineare osculatrice lungo g alla falda $g(\alpha\alpha_1 ... \alpha_4)$: si noti che, secondo una precedente considerazione, g_i' è una qualunque delle $n - 2$ generatrici di R_n^p incidenti a g.

Qual è l'ordine ξ della superficie luogo di tutte le rette g_i'' relative alle varie falde di R_n^p?

Tale ordine è pure quello della curva luogo di tutti i punti G_i'', e quindi parziale intersezione della quadrica V_4^2 con la rigata V_2^x prima considerata: la residua intersezione di V_4^2 con V_2^x si compone della curva C_n^p, contata $n - 2$ volte (giacchè da un punto generico G_i' di C_n^p, coniugato ad altri $n - 2$ punti G della stessa curva, escono $n - 2$ generatrici S_1^* di V_2^x) e di tutte le rette $S_1^* \equiv (S_2^* S_4^*)$ aventi la proprietà di appartenere a V_4^2.

[34]) Allora (attesa la genericità di U) certamente esterno ad S_3.

[35]) Cfr. *E. Bertini*, loc. cit., p. 161.

Queste ultime sono, come è facile stabilire, in numero eguale a quello degli iperpiani S_4^* tangenti a V_4^2: ammesso però che, quando l'S_3 osculatore in G ad un ramo $G(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$ è tangente a V_4^2 [36]), gli $n-2$ punti G_i' di C_n^p coniugati a G siano tutti distinti da G[37]).

Ora, si è già supposto che per un punto generico di S_5 passino z iperpiani S_4^*: perciò z è anche l'ordine della linea luogo dei poli di tali iperpiani rispetto a V_4^2, e quindi $2z$ è il numero di quelli, fra questi iperpiani, che hanno il proprio polo su V_4^2, ossia sono tangenti a V_4^2.

Ne deriva, per il calcolo di ξ, la formula:

$$\xi = 2x - n(n-2) - 2z,$$

cioè, tenendo conto della (1):

$$\xi = 2y - n(n-2). \tag{2}$$

Rimane da determinare l'ordine y della varietà descritta dal piano $S_2^* \equiv (G_i' S_1')$, ovvero l'ordine, che è lo stesso, della varietà polare descritta dal piano intersezione dell'iperpiano S_4' polare di G_i' con l'S_3 polare di S_1'.

Ad ogni S_4' corrispondono $n-2$ spazî S_3 (osculatori a rami di C_n^p negli $n-2$ punti G coniugati a G_i'), e inversamente ad ogni S_3 corrispondono $n-2$ iperpiani S_4'. Inoltre per un punto generico di S_5 passano n iperpiani S_4', mentre sono n_3 (n. 2) gli spazî S_3 incidenti ad una generica retta.

Dalla proposizione del n. 5 segue allora che l'ordine y della varietà luogo di tutti i piani $(S_3 S_4')$ è:

$$(n-2)n + (n-2)n_3 ;$$

onde, per la (2), si ha infine:

$$\xi = (n-2)(n + 2n_3).$$

A questo stesso risultato si perviene anche nel caso che la rigata R_n^p appartenga ad un complesso lineare non speciale, e si può quindi concludere:

[36]) In un punto necessariamente diverso da G, per l'ipotesi già fatta che l'S_1' polare di S_3 non sia incidente a C_n^p.

[37]) Ciò equivale a supporre [«F», n. 4, A), III] che le falde di R_n^p dotate di congruenza lineare osculatrice speciale abbiano ciascuna come origine una generatrice g semplice per R_n^p e non singolare.

Essendo R_n^p una rigata gobba d'ordine n e di genere p, eventualmente contenuta in un complesso lineare non speciale, si supponga che ogni sua falda ammetta una congruenza lineare osculatrice non degenere («F», n. 3, I e III) *con le direttrici mai situate su R_n^p, e che, quando tale congruenza è speciale con la direttrice δ, l'origine g della falda sia una generatrice non singolare, nè multipla, per R_n^p: mentre nello stesso tempo il punto $(g\delta)$ sia semplice e il piano $[g\delta]$ non sia bitangente per R_n^p.*

Qualunque sia la generatrice g, sulla rigata R_n^p esistono sempre $n-2$ generatrici incidenti a g: purchè si convenga di includere fra queste la stessa g contata $\mu-2$ volte, se μ è la multiplicità d'intersezione (lungo g) di R_n^p col complesso lineare speciale di asse g[38]).

Considerando allora una falda di R_n^p e l'involuzione gobba avente per assi le due tangenti della falda, in punti della sua generatrice origine g, a contatto generalmente quadripunto («F», n. 2 e n. 3, III) *si ha che le rette coniugate, in tale involuzione*[39]), *delle $n-2$ generatrici di R_n^p incidenti a g, descrivono, al variare della falda, una rigata di ordine:*

$$3(n-2)(3n+8p-8)-2(n-2)\sum(3\alpha+2\alpha_1+\alpha_2-6),$$

estesa la somma a tutte le falde $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ singolari di R_n^p.

13. È facile verificare che (con opportuni adattamenti) le considerazioni svolte nel n. 6 non cessano di essere valide quando il sistema Δ di complessi, ivi supposto semplicemente infinito, si riduce ad un unico complesso: purchè, naturalmente, si faccia allora $\lambda = 0$ e $k = 1$. Ne consegue:

Sia R_n^p una rigata gobba irriducibile, d'ordine n e di genere p, priva di falde ammettenti («F», n. 1) *un piano rigato osculatore o una stella osculatrice di raggi, ed eventualmente contenuta in un complesso, o in una congruenza, lineare (anche speciale).*

Dato allora, in posizione generica rispetto ad R_n^p, un qualunque complesso di rette, di grado ν, si ha che le tangenti principali («F», n. 2) *di R_n^p, appartenenti a tale complesso, formano una rigata di ordine:*

$$6\nu(n+2p-2)-2\nu\sum(2\alpha+\alpha_1-3),$$

[38]) Intendasi che μ è la somma delle multiplicità d'intersezione («F», n. 1), con tale complesso, delle varie falde di R_n^p uscenti da g: se g è generica si ha $\mu = 2$.

[39]) Quando gli assi dell'involuzione coincidono in una sola retta (il che si verifica per le falde dotate di congruenza lineare osculatrice speciale), in questa va intesa coincidente la coniugata di ogni altra retta (non contenuta in quella congruenza: nel qual caso la retta stessa sarebbe unita nella involuzione).

mentre i loro punti di contatto costituiscono una linea di ordine[40]:

$$2\,\nu\,(2\,n+3\,p-3)-\nu\sum(2\,\alpha+\alpha_1-3)$$

eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad R_n^p lungo la linea stessa.

I sommatorî si estendono a tutte le falde singolari $g(\alpha\alpha_1 ...)$ di R_n^p.

Supposta la rigata R_n^p in posizione generica rispetto al circolo assoluto C_∞, sia S_∞ la sua sezione col piano improprio e S'_∞ la polare reciproca di S_∞ rispetto a C_∞.

Se ad un punto T'_∞ di S'_∞ corrisponde, nella polarità assoluta, la retta t_∞ tangente ad S_∞ in un punto T_∞, si ha che una qualunque t' delle tangenti principali di R_n^p, uscenti da T'_∞, è perpendicolare al piano asintotico relativo alla generatrice g, di R_n^p, passante per T_∞: ossia al piano $\gamma\equiv[gt_\infty]$, tangente ad R_n^p nel punto improprio T_∞ di g.

Variando T'_∞ su S'_∞, la retta t' descrive la rigata luogo delle tangenti principali di R_n^p che si appoggiano alla curva S'_∞ (di ordine eguale al rango di R_n^p), mentre γ genera la sviluppabile asintotica di R_n^p. Come corollario della proposizione che precede, si ha quindi l'altra:

Le tangenti principali di una rigata gobba, d'ordine n e di genere p, aventi la proprietà di essere perpendicolari a piani della sua sviluppabile asintotica [ossia parallele a tangenti della sua linea di stringimento, quando questa è una traiettoria ortogonale delle generatrici[41]*] costituiscono una rigata di ordine:*

$$2\,(2\,n+2\,p-\varrho-2)\,(3\,n+6\,p-2\,\varrho-\varrho_1-6)\,,$$

e i loro punti di contatto una linea di ordine:

$$(2\,n+2\,p-\varrho-2)\,(4\,n+6\,p-2\,\varrho-\varrho_1-6)\;;$$

ammesso che la rigata non abbia speciali relazioni con l'assoluto dello spazio, nè altre particolari singolarità che (n. 2): *ϱ generatrici stazionarie, ϱ_1 generatrici d'inflessione, e quante si vogliano generatrici multiple ordinarie.*

---

[40]) Circa gli altri principali caratteri di tale linea, nel caso di una rigata R_n^p generica (n. 2), cfr. *A. Longhi*, Sopra le tangenti principali e i punti circolari delle superficie algebriche (Commentarii math. Helvetici, vol. VI, fasc. IV, 1934), n. 19.

[41]) Si può notare che tale circostanza si verifica soltanto se la rigata è il luogo delle binormali di una curva: cfr. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale (Pisa, 1894), p. 211.

14. Si supponga la superficie gobba R_n^p contenuta in un complesso di rette, di grado ν. Sopra ogni generatrice g di R_n^p si possono allora considerare[42]) due punti tali che il cono del complesso, col vertice in ciascuno M_i di essi ($i = 1, 2$), è toccato lungo g dal piano tangente in M_i ad R_n^p.

Al complesso corrisponde in S_5 (n. 1) una varietà $W_3^{2\nu}$ passante per la curva C_n^p (immagine di R_n^p) e intersezione completa della quadrica V_4^2 con una ipersuperficie W_4^ν d'ordine ν; invece la congruenza di tutte le tangenti ad R_n^p, nei punti di g, viene rappresentata («F», n. 3, I) dal cono V_2^2 sezione di V_4^2 con l'S_3' polare della tangente a C_n^p in un suo punto G: ed è subito visto che, in particolare, i due fasci costituiti dalle tangenti ad R_n^p in M_1 e M_2 hanno per immagini le generatrici μ_1 e μ_2 di V_2^2 che appartengono all'iperpiano S_4^* tangente in G a W_4^ν.

Quando il punto G percorre la linea C_n^p, il cono V_2^2 descrive una varietà di ordine $2\,n_1$ (n. 2), mentre l'iperpiano S_4^* genera un inviluppo la cui classe eguaglia il numero $n\,(\nu - 1)$ delle intersezioni di C_n^p con la prima polare di un punto generico rispetto a W_4^ν.

Risultando inoltre biunivoca la corrispondenza fra V_2^2 ed S_4^*, si può applicare il teorema del n. 5 nelle ipotesi:

$$\alpha = 1 \;,\quad \alpha' = 1 \;,\quad \varrho = 2\,n_1 \;,\quad \varrho' = n\,(\nu - 1) \;,\quad n = 2 \;,\quad n' = 1$$

e quindi dedurne che il luogo delle coppie di rette μ_1, μ_2, è una superficie V_2^x di ordine:

$$x = 2\,n_1 + 2\,n\,(\nu - 1).$$

Ma le rette μ_1 e μ_2 si ottengono pure segando la quadrica V_4^2 col piano $S_2^* \equiv (S_3' S_4^*)$, onde V_2^x è l'intersezione completa di V_4^2 con la varietà $V_3^{x'}$ descritta da S_2^* ed avente quindi l'ordine $x' = \dfrac{x}{2}$.

Ne deriva (cfr. n. 6) che la congruenza rappresentata dalla superficie V_2^x (costituita dalle tangenti ad R_n^p nelle ∞^1 coppie di punti M_1, M_2) è di ordine e classe entrambi eguali ad x'. Pertanto:

Se una qualunque rigata gobba R_n^p, d'ordine n e di genere p, appartiene, in modo generico, ad un complesso Θ^ν di grado ν, sopra ogni sua generatrice g esistono due punti (distinti o no) caratterizzati dalla proprietà che il cono del complesso col vertice in ciascuno di essi, e il piano ivi tangente ad R_n^p, si tocchino lungo g.

---

[42]) Cfr. *F. Klein*, Über Liniengeometrie und metrische Geometrie (Math. Annalen, 5, 1872), § 4.

Al variare di g, tali punti generano una curva di ordine[43]*):*

$$(\nu+1)\,n+2\,p-2-\sum(\alpha-1)\,,$$

eguale anche alla classe della sviluppabile descritta dai piani tangenti ad R_n^p *nei punti stessi.*

Il sommatorio si estende a tutte le falde superlineari («F», n. 1) *di* R_n^p.

In modo simile può dimostrarsi che:

Sulla generatrice variabile g, della rigata anzidetta R_n^p *(da supporre ora non contenuta in complessi lineari), esistono due punti* G_1 *e* G_2 *tali che il cono del complesso* Θ^ν*, col vertice in* G_i $(i = 1, 2)$*, è toccato lungo g dal piano* γ_i *del fascio di tutte le rette passanti per* G_i *e appartenenti al complesso lineare osculatore lungo g ad* R_n^p.

L'ordine della linea luogo dei punti G_i*, e la classe della sviluppabile inviluppo dei piani* γ_i*, sono entrambi eguali a:*

$$(\nu+5)\,n+20\,p-20-\sum(4\,\alpha+3\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-10),$$

estesa la somma alle varie falde singolari di R_n^p.

15. Sia la rigata R_n^p generica (n. 2) e si indichi con $C_{m,s}^t$ una sua curva s-upla (ordinaria) d'ordine m, che ne incontri ogni generatrice in t punti.

Il contorno apparente di R_n^p rispetto ad un punto generico è una curva $C_{m',s'}^{t'}$, per la quale si ha:

$$m' = 2\,(n+p-1)\,,\quad s' = 1\,,\quad t' = 1\,.$$

Le due curve hanno in comune un numero di punti eguale a[44]):

$$mst' + m's't - ntt'\,.$$

[43]) Quando $\nu = 1$, questa curva diviene la nota asintotica di Lie esistente su ogni rigata gobba contenuta in un complesso lineare. Circa gli altri caratteri di tale asintotica, pel caso di una R_n^p generica (n. 2), veggasi: *A. Voss*, loc. cit. (Math. Annalen, 8, p. 114); *G. Pittarelli*, Le asintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque, che fanno parte di una congruenza lineare [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 9, (5), 1900]; *A. Longhi*, loc. cit. in [40]), n. 17.

[44]) Cfr. *B. Levi*, Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi (Atti della R. Accademia di Torino, 34, 1899), n. 1.

Se, fra tali punti, k sono cuspidali per R_n^p, ne deriva che:

I piani tangenti ad una generica rigata gobba R_n^p (n. 2), *nei punti di una sua linea irriducibile s-upla, d'ordine m, passante (semplicemente) per k punti cuspidali e t-secata da ogni generatrice, costituiscono un inviluppo di classe:*

$$ms + (n + 2\,p - 2)\,t - k.$$

Per dualità:

È:

$$\mu\sigma + (\mu + 2\,p - 2)\,\tau - \chi$$

l'ordine della linea di contatto, con R_n^p, *di una sviluppabile irriducibile* Ω *di classe* μ, *quando: ogni piano di* Ω *contenga* σ *generatrici di* R_n^p, *ogni generatrice di* R_n^p *appartenga a* τ *piani di* Ω, *ed esistano* χ *piani (semplici) di* Ω *tangenti ciascuno ad* R_n^p *lungo una generatrice singolare.*

Ponendo:

$$m = \mu = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p, \quad s = \sigma = 2, \quad t = \tau = n-2, \quad k = \chi = 2\,(n + 2p - 2),$$

si trova in particolare che:

La classe della sviluppabile circoscritta alla rigata R_n^p *lungo la sua linea doppia, supposta irriducibile, e l'ordine della curva luogo dei punti di contatto di un piano bitangente variabile di* R_n^p, *valgono entrambi:*

$$\binom{2n-4}{2} + 2\,(n-5)\,p\,.$$

Siano g_1 e g_2 le due generatrici che escono da un punto doppio M di R_n^p. Il piano $\gamma \equiv [g_1 g_2]$ è allora tangente ad R_n^p in due punti: M_1 (su g_1) e M_2 (su g_2). Al variare di M sulla curva doppia di R_n^p, essi descrivono una linea Γ_ν, il cui ordine ν risulta dal precedente enunciato; e in generale solo quando M diviene il punto cuspidale di una generatrice singolare g di R_n^p, si verifica che M_1 ed M_2 coincidono (nel centro di uno dei due fasci costituenti il regolo osculatore ad R_n^p lungo g).

Su Γ_ν esiste quindi fra M_1 ed M_2 una corrispondenza biunivoca e simmetrica, con:

$$2\,(n + 2\,p - 2)$$

punti uniti; onde la retta $M_1 M_2$ ha per luogo una superficie di ordine:

$$\nu - n - 2\,p + 2\,.$$

Ragionando anche dualmente, si conclude che:

La retta passante pei punti di contatto di un piano bitangente variabile di R_n^p genera una superficie Σ' di ordine:

$$2(n-2)(n-3)+2(n-6)p,$$

eguale a quello della superficie Σ descritta dalla retta intersezione dei due piani tangenti ad R_n^p in un suo punto doppio variabile.

È subito visto che:

Le superficie Σ e Σ' sono rispettivamente le sviluppabili osculatrici della curva doppia Δ di R_n^p e dello spigolo di regresso Δ' della sviluppabile bitangente di R_n^p.

Per conseguenza:

1. *Le linee Δ e Δ' hanno entrambe il rango:*

$$2(n-2)(n-3)+2(n-6)p$$

e il genere:

$$\frac{1}{2}(n-5)(n+2p-2)+1.$$

2. *La classe di Δ e l'ordine di Δ' sono eguali a:*

$$\frac{3}{2}(n-2)(3n-11)+3(2n-11)p.$$

3. *Il numero dei piani osculatori stazionari di Δ, e quello delle cuspidi di Δ', è:*

$$8(n-2)(n-4)+4(3n-16)p.$$

Conoscendosi[45]) il numero dei piani tripli e dei piani tritangenti di R_n^p, da quanto precede si deduce pure che:

4. *È:*

$$\frac{1}{4}(n^2-5n+8)\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{2}p+\binom{p}{2}$$

il numero dei punti doppi apparenti di Δ, e quello degli assi[46]) *di Δ' situati in un piano generico.*

[45]) Cfr. *G. Castelnuovo,* Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche (Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, 3, 1887), n. 4.

[46]) Cioè delle rette intersezioni ciascuna di due distinti piani osculatori di Δ'.

Sia g_1 una generatrice di R_n^p tangente a Δ in un punto M_2, e g_2 l'ulteriore generatrice di R_n^p passante per M_2. Il piano γ di g_1 e g_2 è allora tangente in M_2 alla falda di R_n^p con l'origine g_2, mentre è tangente in un certo punto M_1 di g_1 alla falda che esce da g_1: la retta g_1, congiungendo i punti di contatto M_1 ed M_2 di γ con R_n^p, deve quindi (secondo una precedente proposizione) essere una tangente della curva Δ'. Pertanto:

5. *Le generatrici di R_n^p tangenti a Δ sono tangenti anche a Δ', e il loro numero è* [47]):

$$2\,(n-2)\,(n-3)+2\,(n-6)\,p,$$

eguale al rango comune di Δ e Δ'.

16. Due generatrici variabili g e g' della rigata generica R_n^p (n. 2), fra loro incidenti, sono rappresentate, sulla quadrica V_4^2 di S_5, da due punti G e G', della curva C_n^p, coniugati nella polarità rispetto a V_4^2.

La corrispondenza fra i punti G e G', simmetrica d'indice $n-2$, è di valenza 2 e possiede quindi un numero di punti uniti[48]) eguale a:

$$2\,(n+2\,p-2)\,.$$

Una corrispondenza pure simmetrica, dello stesso indice e con altrettanti punti uniti, intercede allora fra i poli P e P' degli iperpiani osculatori a C_n^p in G e G': le cui sezioni con V_4^2 sono immagini dei due complessi lineari osculatori ad R_n^p lungo le generatrici g e g'.

La congruenza comune a tali complessi ha per direttrici le rette che corrispondono nello spazio ordinario ai punti d'incontro Q e Q' di V_4^2 con la retta PP'. Questa, variando P e P' sulla curva Γ polare reciproca (rispetto a V_4^2) di C_n^p, e quindi di ordine:

$$\nu \equiv 5\,(n+4\,p-4)\,,$$

descrive una rigata V_2^x, il cui ordine è:

$$x=\nu\,(n-2)-(n+2\,p-2).$$

Risulta così determinato anche l'ordine $2\,x$ della curva V_1^{2x}, intersezione di V_2^x con V_4^2, luogo delle coppie di punti Q, Q'.

---

[47]) Come si trova applicando la formula di Zeuthen alla corrispondenza $(2,n-2)$ esistente fra le generatrici di R_n^p e i loro punti di appoggio con Δ.

[48]) Immagini delle generatrici singolari di R_n^p.

Il genere π' della rigata V_2^x è evidentemente eguale a quello della superficie descritta dalla retta variabile GG', che appartiene a V_4^2 ed è l'immagine del fascio di raggi individuato dalle generatrici g e g' di R_n^p. Dunque π' è pure il genere della curva doppia di R_n^p; se quindi tale curva è irriducibile, si ha (n. 15):

$$\pi' = \frac{1}{2}(n-5)(n+2p-2)+1.$$

Dopo ciò, la formula del Segre già applicata al n. 4, fornisce pel genere di V_1^{2x} il valore[49]):

$$x+2\pi'-1.$$

Concludendo:

Se g e g' sono due generatrici di una generica (n. 2) *rigata gobba R_n^p (d'ordine n, di genere p e non contenuta in complessi lineari) uscenti da un punto variabile sulla sua curva doppia (supposta irriducibile), le direttrici della congruenza intersezione dei complessi lineari osculatori ad R_n^p, uno lungo g e l'altro lungo g', descrivono una superficie di ordine:*

$$2(5n-21)(n+2p-2)+20np$$

e di genere:

$$2(3n-13)(n+2p-2)+10np+1.$$

---

[49]) Si avverta che la presenza, su V_1^{2x}, dei 2ν punti $(n-2)$-upli situati nelle intersezioni della curva Γ con V_4^2, non infirma la validità della formula del Segre: perchè delle $n-2$ generatrici di V_2^x uscenti da uno qualunque Q di quei punti multipli, nessuna ha i suoi due punti di appoggio con V_1^{2x} riuniti in Q.

(Reçu le 5 mars 1936.)