

Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades.

Autor(en): **Nagell, Trygve**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10167>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades

Von TRYGVE NAGELL, Uppsala.

Einem Resultate von *Fueter* zufolge ist die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 = 1,$$

wenn sie in einem der beiden Körper $k(\sqrt[3]{m})$ und $k(\sqrt[3]{-3m})$ lösbar ist, auch in dem anderen lösbar¹⁾. In einer vor kurzem publizierten Note habe ich gezeigt, daß dies auch für die allgemeinere Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 = A \tag{1}$$

gilt, wo A eine kubenfreie natürliche Zahl > 2 ist. Es wurde dort sogar folgendes bewiesen: Ist die Gleichung (1) in Zahlen aus dem Rationalitätsbereiche Ω nicht lösbar, so ist sie es auch nicht nach Adjunktion von $\sqrt[3]{-3}$.²⁾ Da der Beweis des letzten Resultates durch einen Rechenfehler entstellt ist, wird er im folgenden verbessert; siehe Satz 2.

Statt der Gleichung (1) wollen wir hier allgemeinere kubische diophantische Gleichungen betrachten und den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω , die weder die Form $27\alpha^6$ noch die Form $-16\alpha^6$ hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung*

$$x^3 - B = y^2 \tag{2}$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt[3]{-3}$ zu Ω .

Vorbemerkungen: Es kann offenbar vorausgesetzt werden, daß Ω die Zahl $\sqrt[3]{-3}$ nicht enthält.

Wegen der Voraussetzung über die Gleichung (2) kann die Zahl B nicht die Form $-\alpha^6$ haben, α Zahl in Ω . Denn die Gleichung

$$x^3 + 1 = y^2$$

¹⁾ *R. Fueter:* Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie d. Wiss. Math.-Naturwiss. Klasse, Jahrg. 1913, 25 Abh.

²⁾ *T. Nagell:* Bemerkungen über die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$, Arkiv f. Matematik, Astronomi o. Fysik, Bd. 25B, Nr. 5, Stockholm 1935.

hat die Lösung $x = 2, y = 3$ in nicht verschwindenden Zahlen, B kann auch nicht die Form $2^4 \cdot 3^3 \alpha^6$ haben, α Zahl in Ω . Denn die Gleichung

$$x^3 - 2^4 \cdot 3^3 = y^2$$

hat die Lösung $x = 12, y = 36$ in nicht verschwindenden Zahlen.

Der Satz gilt nicht für $B = 27\alpha^6$; denn die Gleichung

$$x^3 - 27 = y^2$$

hat im Körper der rationalen Zahlen $R(1)$ nur die Lösung $x = 3, y = 0^3$; in $R(\sqrt{-3})$ hat sie aber die Lösung $x = -6, y = 9\sqrt{-3}$.

Der Satz gilt auch nicht für $B = -16\alpha^6$; denn die Gleichung

$$x^3 + 16 = y^2 \tag{3}$$

hat in $R(1)$ nur die Lösungen $x = 0, y = \pm 4$ (wegen des Beweises siehe *Anmerkung* S. 9); in $R(\sqrt{-3})$ hat sie aber die Lösung $x = -4, y = 4\sqrt{-3}$.

Beweis: Nach der Voraussetzung ist die Gleichung (2) in Ω unlösbar, abgesehen von eventuellen verschwindenden Lösungen. Wir nehmen jetzt an, daß sie in dem durch Adjunktion von $\sqrt{-3}$ entstandenen Körper $\Omega(\sqrt{-3})$ lösbar ist, mit $xy \neq 0$.

Erster Fall: Die Zahl y gehört zu Ω , die Zahl x aber nicht. Es sei $x = a\sqrt{-3} + b$, wo a und b Zahlen in Ω sind, $a \neq 0$. Dann folgt

$$b^3 + 3b^2a\sqrt{-3} - 9ba^2 - 3a^3\sqrt{-3} - B = y^2,$$

mithin $b^2a = a^3$ oder $b = \pm a$, und $x = a(\pm 1 + \sqrt{-3})$. Dann hätte aber die Gleichung (2) gegen die Annahme die Lösung $x = \mp 2a$ und y in Ω .

Zweiter Fall: Die Zahl x gehört zu Ω , die Zahl y aber nicht. Dann ist $y = z\sqrt{-3} + z_1$, wo z und z_1 zu Ω gehören, $z \neq 0$. Es ergibt sich somit

$$x^3 - B = -3z^2 + 2zz_1\sqrt{-3} + z_1^2.$$

Hieraus folgt aber $z_1 = 0$, und wenn

$$x_1 = -3x \quad \text{und} \quad y_1 = 9z$$

gesetzt wird,

$$x_1^3 + 27B = y_1^2, \tag{4}$$

wo x_1 und y_1 nichtverschwindende Zahlen in Ω sind.

³⁾ *T. Nagell:* Über die rationalen Punkte auf einigen kubischen Kurven, Tôhoku Math. Journal, vol. 24, 1924.

Dritter Fall: Weder x noch y ist in Ω enthalten. Dann darf man setzen

$$y = ax + b,$$

wo a und b zu Ω gehören, $a \neq 0$. Die Zahl x ist dann Wurzel der Gleichung in z

$$z^3 - (az + b)^2 - B = 0. \quad (5)$$

Da x vom Relativgrade 2 in bezug auf Ω ist, folgt hieraus, daß die Gleichung (5) eine Wurzel z haben muß, die zu Ω gehört. Dann hat aber die Gleichung (2) die Lösung $x = z$, $y = az + b$ in Ω . Wegen der Voraussetzung über diese Gleichung ist dann entweder $z = 0$ oder $az + b = 0$. Im ersteren Falle wird $B = -b^2$, und x ist Wurzel der Gleichung

$$x^2 - a^2x - 2ab = 0,$$

oder
$$x = \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 8ab}.$$

Es besteht somit eine Gleichung

$$a^4 + 8ab = -3c^2$$

in Zahlen a , b und c aus Ω . Weil $a \neq 0$ ist, können wir setzen

$$x_1 = -\frac{6b}{a}, \quad y_1 = \frac{9bc}{a^2}.$$

Dann ergibt sich wegen $B = -b^2$

$$x_1^3 + 27B = y_1^2. \quad (6)$$

Hier ist $x_1 \neq 0$, weil $b \neq 0$ ist. Es ist ferner $y_1 \neq 0$; denn c kann nicht $= 0$ sein, weil x nicht zu Ω gehört.

In dem Falle $az + b = 0$ wird $B = c^3$, wo c eine Zahl in Ω ist. x ist dann Wurzel der Gleichung

$$x^2 - x(a^2 - c) + a^2c + c^2 = 0,$$

und folglich

$$x = \frac{1}{2}(a^2 - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 6a^2c - 3c^2}.$$

Es besteht somit eine Gleichung

$$a^4 - 6a^2c - 3c^2 = -3d^2$$

in Zahlen a , c und d aus Ω . Setzt man nun hier

$$x_1 = \frac{3c}{2a^2}(a^2 + 3c - 3d)$$

und

$$y_1 = \frac{27c^2}{2a^3}(d - c - a^2),$$

so ergibt sich wegen $B = c^3$

$$x_1^3 + 27B = y_1^2. \quad (7)$$

Hier ist $x_1 \neq 0$; denn sonst würde $a^2 + 3c - 3d = 0$ sein oder

$$a^4 - 6a^2c - 3c^2 = -3d^2 = -\frac{1}{3}a^4 - 2a^2c - 3c^2.$$

Hieraus würde folgen $a^2 = 3c$, also $B = c^3 = 27\left(\frac{a}{3}\right)^6$ gegen die Voraussetzung. Es ist ferner $y_1 \neq 0$; denn sonst würde $a^2 + c = d$ sein oder

$$a^4 - 6a^2c - 3c^2 = -3d^2 = -3a^4 - 6a^2c - 3c^2,$$

was offenbar unmöglich ist, weil $a \neq 0$.

In allen Fällen ergibt sich somit, daß eine Gleichung von der Form (7) bestehen muß, in nichtverschwindenden Zahlen x_1 und y_1 aus Ω . Indem wir eine Idee von *Fueter*⁴⁾ benützen, setzen wir nun

$$u = \frac{y_1^2 + 81B}{9x_1^2},$$

$$v = \frac{y_1(y_1^2 - 243B)}{27x_1^3}.$$

Dann erfüllen die Zahlen u und v , wie man leicht verifiziert, die Relation

$$u^3 - B = v^2.$$

⁴⁾ *R. Fueter*: Über kubische diophantische Gleichungen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 2 (1930), S. 69.

Wegen der Voraussetzung über die Gleichung (2) muß dann entweder $u = 0$ oder $v = 0$ sein. Ist $u = 0$, so wird $y_1^2 = -81B$ und $x_1^3 = -108B$ und folglich

$$B = -16 \cdot \left(\frac{y_1}{3x_1}\right)^6,$$

gegen die Annahme. Ist $v = 0$, so wird $y_1^2 = 243B$ und $x_1^3 = 216B$ und folglich

$$B = 27 \cdot \left(\frac{2y_1}{9x_1}\right)^6$$

gegen die Voraussetzung. Die Gleichung (2) ist folglich in $\Omega(\sqrt{-3})$ unlösbar.

Unser Satz ist somit bewiesen.

Wir wollen jetzt das Resultat auf die Gleichung (1) anwenden. Es sei $B = 2^4 \cdot 3^3 A^2$, wo A eine kubenfreie natürliche Zahl > 2 ist. Die Gleichung (2) erhält dann die Form

$$x^3 - 2^4 \cdot 3^3 A^2 = y^2. \quad (8)$$

Setzen wir hier

$$X = \frac{36A + y}{6x}, \quad Y = \frac{36A - y}{6x}, \quad (9)$$

so zeigt die Ausrechnung, daß die folgende Gleichung besteht

$$X^3 + Y^3 = A. \quad (10)$$

In (9) hätte man X durch ρX ersetzen können, wenn ρ eine Wurzel der Gleichung $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ ist; entsprechendes gilt für Y . Dann können wir das folgende Resultat beweisen:

Satz 2. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine kubenfreie natürliche Zahl > 2 . Ist dann die Gleichung (10) in Zahlen X und Y aus Ω unlösbar, so ist sie es auch nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω . Von Lösungen mit $X^3 = Y^3$ wird hier abgesehen.*

Beweis: Ist nämlich die Gleichung (10) in $\Omega(\sqrt{-3})$ lösbar, so gilt dasselbe für die Gleichung (8). Aus (9) folgt ja

$$x = \frac{12A}{X + Y}, \quad y = \frac{36A}{X + Y}(X - Y),$$

und hier ist $xy \neq 0$. Nach dem Satze 1 ist dann aber die Gleichung (8) schon in Ω lösbar, mit $xy \neq 0$. Wenden wir nochmals die Transformationen (9) an, so ergibt sich, daß die Gleichung (10) schon in Ω lösbar ist, mit $X^3 \neq Y^3$.

Ein Komplement zu Satz 1 ist der folgende Satz:

Satz 3. *Es sei Ω ein Rationalitätsbereich, der die Zahl $\cos \frac{2\pi}{9}$ nicht enthält, und es sei die Gleichung*

$$x^3 - 2^4 \cdot 3^3 = y^2 \quad (11)$$

in nichtverschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar, abgesehen von den Lösungen $x = 12$, $y = \pm 36$. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$, abgesehen von den Lösungen $x^3 = 12^3$, $y = \pm 36$.

Beweis: Die Gleichung (11) hat bekanntlich keine anderen Lösungen in rationalen Zahlen als $x = 12$, $y = \pm 36$.⁵⁾

Genau wie im Beweise von Satz 1 muß man drei Fälle unterscheiden. Der erste Fall ist auch hier unmöglich; man wird nur auf die Lösungen $x = 12\rho$ und $12\rho^2$ geführt, wo ρ eine Wurzel der Gleichung $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ ist. Auch der zweite Fall wird genau wie dort. Die Gleichung (4) erhält hier die Form

$$\left(\frac{x_1}{9}\right)^3 + 16 = \left(\frac{y_1}{27}\right)^2, \quad (12)$$

wo x_1 und y_1 nicht verschwindende Zahlen in Ω sind.

Im dritten Fall muß die Gleichung (5) die Wurzel $z = 12$ haben. Setzen wir $12a + b = 36$, so erhält diese Gleichung die Form

$$z^3 - (az + 36 - 12a)^2 - 2^4 \cdot 3^3 = 0.$$

Wird hier die Lösung $z = 12$ wegdividiert, so erhalten wir für die Zahl x als Wurzel der entstandenen quadratischen Gleichung den Ausdruck

$$x = \frac{1}{2}(a^2 - 12) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 72a^2 + 288a - 432}. \quad (13)$$

Es besteht somit eine Gleichung

$$a^4 - 72a^2 + 288a - 432 = -3c^2$$

⁵⁾ Siehe Anmerkung S. 39.

in Zahlen a und c aus Ω . Hier ist $a \neq 6$; denn sonst würde $c = 0$, was unmöglich ist, da x nicht zu Ω gehört. Dann können wir setzen

$$x_1 = \frac{4a}{6-a}, \quad y_1 = \frac{12c}{(6-a)^2},$$

und es ergibt sich

$$x_1^3 + 16 = y_1^2. \quad (14)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie Gleichung (12). Es ist $x_1 \neq 0$, weil $a \neq 0$ ist; und $y_1 \neq 0$ wegen $c \neq 0$. Auf diese Gleichung führen wir nun die Fuetersche Transformation aus, indem wir setzen

$$u = \frac{y_1^2 + 48}{x_1^2}, \quad (15)$$

$$v = \frac{y_1(y_1^2 - 144)}{x_1^3}. \quad (16)$$

Diese Zahlen u und v gehören zu Ω und sind durch die Gleichung

$$u^3 - 2^4 \cdot 3^3 = v^2$$

verbunden. Wegen der Voraussetzung muß dann $u = 12$, $v = \pm 36$ sein. Aus der Gleichung (15) folgt somit

$$12x_1^2 = y_1^2 + 48.$$

Eliminiert man y_1 zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (14), und setzt man $t = \frac{4}{x_1}$, so ergibt sich

$$t^3 - 3t + 1 = 0. \quad (17)$$

Es wäre folglich $t = 2 \cos \frac{2\pi m}{9}$, mit $m = 1, 2$ oder 4 . Dies ist aber unmöglich, da nach der Voraussetzung die Zahl $\cos \frac{2\pi}{9}$ in Ω nicht enthalten ist. Der Satz 3 ist somit bewiesen.

Ist t eine Wurzel der Gleichung (17), so wird das System der Gleichungen (14), (15) und (16), wie man leicht verifiziert, durch die Werte

$$x_1 = \frac{4}{t}, \quad \pm y_1 = 44 - 8t - 16t^2$$

befriedigt. Dann folgt

$$a = 4 + 2t - 2t^2$$

und

$$\pm c = a^2 - 12 = 12(1 - t),$$

und aus (13)

$$x = 6(1 - t)(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Als Lösung der Gleichung (11) in $R(t, \sqrt{-3}) = R(e^{\frac{2\pi i}{9}})$ ergibt sich somit

$$x = 12(t - 1), \quad y = 12(2t^2 - 2t - 1)\sqrt{-3}.$$

Ob die Gleichung schon in $R(t)$ lösbar ist, abgesehen von den Lösungen $x = 12, y = \pm 36$, ist mir unbekannt.

Setzt man in der Gleichung (11)

$$X = \frac{36 + y}{6x}, \quad Y = \frac{36 - y}{6x}, \quad (18)$$

so erhält man die Relation

$$X^3 + Y^3 = 1. \quad (19)$$

Aus dem Satze 3 folgt nun leicht das folgende Resultat:

Satz 4. *Es sei Ω ein Rationalitätsbereich, der die Zahl $\cos \frac{2\pi}{9}$ nicht enthält. Ist dann die Gleichung (19) in nicht verschwindenden Zahlen X und Y aus Ω unlösbar, so ist sie es noch immer nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω .*

Beweis: Ist nämlich die Gleichung (19) in $\Omega(\sqrt{-3})$ lösbar, mit $XY \neq 0$, so ist auch die Gleichung (11) in $\Omega(\sqrt{-3})$ lösbar mit $y \neq \pm 36$. Denn aus (18) folgt

$$x = \frac{12}{X + Y}, \quad y = \frac{36(X - Y)}{X + Y};$$

und aus $y = \pm 36$ würde folgen $XY = 0$. Nach dem Satze 3 ist dann die Gleichung (11) schon in Ω lösbar, mit $y \neq \pm 36$. Wenden wir nochmals die Transformation (18) an, so ergibt sich, daß die Gleichung (19) schon in Ω lösbar ist, mit $XY \neq 0$.

Anmerkung: Die Gleichung (11) hat keine anderen Lösungen in rationalen Zahlen als $x = 12$, $y = \pm 36$. Denn wenden wir die Transformation (18) an, so erhalten wir die Fermatsche Gleichung

$$X^3 + Y^3 = 1,$$

die bekanntlich in nicht verschwindenden rationalen Zahlen unlösbar ist. Mit $XY = 0$ folgt $x = 12$, $y = \pm 36$.

Ich habe schon früher (siehe S. 2) behauptet, daß die Gleichung

$$x^3 + 16 = y^2$$

in rationalen Zahlen unlösbar ist, abgesehen von $x = 0$, $y = \pm 4$. Setzt man nämlich hier

$$u = \frac{y^2 + 48}{x^2},$$
$$v = \frac{y(y^2 - 144)}{x^3},$$

so erhält man die Gleichung

$$u^3 - 2^4 \cdot 3^3 = v^2.$$

Wie wir soeben sahen, ist dies nur für $u = 12$ möglich. Dann würde aber folgen

$$y^2 = 12x^2 - 48 = x^3 + 16,$$

was offenbar für ein rationales x unmöglich ist.

(Eingegangen den 23. März 1936.)