Über eine bemerkenswerte Klasse von Hyperflächen.

Über eine bemerkenswerte Klasse von Hyperflächen

Von Arnold Emch, Urbana (Illinois, U. S. A.)

1. Einleitung. Die bekannte Römerfläche von Steiner ergibt sich als die dualistische Form der Cayley'schen kubischen Fläche, welche kollinear reduziert als

$$x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0$$

geschrieben werden kann. Daraus kann man dualistisch leicht die Steinersche Fläche

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

ableiten. Die interessanten Eigenschaften dieser beiden Flächen spiegeln sich nun in höhern Räumen wieder, und es ist der Zweck der folgenden Zeilen, dies darzutun. Die beiden Flächen sollen bezüglich mit Γ (Cayley) und S (Steiner) bezeichnet werden.

2. Die Γ-Hyperfläche in einem S_{2n-1}. In einem Überraume von $2n$—1 Dimensionen hat die Γ-Hyperfläche die Form

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i} = 0 , \tag{1}$$

oder

$$x_2 x_3 x_4 \cdots x_{2n} + x_1 x_3 x_4 \cdots x_{2n} + \cdots + x_1 x_2 x_3 \cdots x_{2n-1} = 0 \tag{2}$$

und kann aus der Hypereinheitsebene

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0 \tag{3}$$

durch die involutarische Transformation $\varrho x_i' = \frac{1}{x_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2n$, erhalten werden. Die Eigenschaften von Γ lassen sich durch diese Transformation ableiten, können jedoch direkt aus der Gleichung (2) oder (1) erhalten werden. Aus der Form (2) folgt z. B. sofort, daß die Ecken $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ des Koordinaten Hyperpolyeders (A) $2(n-1)$-fache Punkte sind. Ferner sind die Unterüberräume S_{2n-3} $(x_i = 0,\ x_k = 0)$ auf der Γ. Diese S_{2n-3} haben eine besondere Eigenschaft. Man nehme z. B.

den als Schnitt von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Dann ist $(a) \equiv (0\ 0\ a_3\ a_4 \cdots a_{2n})$ irgend ein Punkt dieses S_{2n-3}, der auch auf Γ liegt. Nun kann man Γ oder (2) auch so schreiben

$$\Gamma = (x_1 + x_2)(x_3 x_4 \cdots x_{2n-1} \cdot x_{2n}) + x_1 x_2 (\cdots) .$$

Dann ist für (a)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} = a_3 \cdot a_4 \cdots a_{2n-1} \cdot a_{2n}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} = a_3 \cdot a_4 \cdots a_{2n-1} \cdot a_{2n}$$

. . . .

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 0 , \quad i \neq 1, 2$$

Daraus folgt, daß Γ in jedem Punkte dieses S_{2n-3} dieselbe Hypertangentialebene $x_1 + x_2 = 0$ hat. Ähnliches gilt natürlich für jeden $S^{ik}_{2n-3} \equiv (x_i = 0,\ x_k = 0)$.

Nimmt man für ik irgend eine Reihe wie 12, 34, 56, $\cdots$, $2n - 1$, $2n$, in welcher keine zwei (ik) eine Ziffer gemein haben, so ist klar, daß die Unterhyperräume

$$S^{12}_{2n-3}, \quad S^{34}_{2n-3}, \quad S^{56}_{2n-3}, \quad \cdots, \quad S^{(2n-1)(2n)}_{2n-3},$$

mit den Gleichungen $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$, $\ldots$, $x_{2n-1} + x_{2n} = 0$, sich alle in einem Unterraume S_{n-1} schneiden, der auf Γ sowohl als auf der Einheitsebene $\Sigma x_i = 0$ liegt. Zusammenfassend hat man den

Satz 1. *In einem Hyperraume S_{2n-1} hat die Cayley'sche Hyperfläche $\sum 1/x_i = 0$ einen $(2n-2)$-fachen Punkt in jeder Koordinatenecke. Alle Unterhyperräume S^{ik}_{2n-3} $(x_i = 0,\ x_k = 0)$ haben in allen demselben angehörigen Punkten dieselbe Hypertangentialebene $x_i + x_k = 0$.*

Die Tangentialhyperebenen von Γ in den Punkten von S^{12}_{2n-3}, S^{34}_{2n-3}, $\ldots$, $S^{2n-1 \cdot 2n}_{2n-3}$ sind beziehungsweise $y_1 + y_2 = 0$, $y_3 + y_4 = 0$, $\ldots$, $y_{2n-1} + y_{2n} = 0$. Sie schneiden sich in einem S_{n-1}, welcher auf Γ sowohl als auch auf der Einheitshyperebene liegt. Man lege jetzt eine beliebige Hyperebene durch S_{n-1}:

$$p(\lambda) = \lambda_1 (y_1 + y_2) + \lambda_2 (y_3 + x_4) + \cdots + \lambda_n (y_{2n-1} + y_{2n}) = 0 . \tag{4}$$

Die Tangentialhyperebene in einem Punkte (x) von S_{n-1} an Γ hat die Gleichung

$$\begin{aligned} & y_1 x_3^2 x_5^2 \cdots x_{2n-1}^2 \\ + & y_2 x_3^2 x_5^2 \cdots x_{2n-1}^2 \\ + & y_3 x_1^2 x_5^2 \cdots x_{2n-1}^2 \\ + & y_4 x_1^2 x_5^2 \cdots x_{2n-1}^2 \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & y_{2n} x_1^2 x_3^2 x_5^2 \cdots x_{2n-3}^2 = 0 \ , \end{aligned}$$

welche identisch mit (4) wird, wenn

$$\frac{x_1^2}{x_{2n-1}^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\,, \quad \frac{x_3^2}{x_{2n-1}^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda_3}\,, \quad \frac{x_5^2}{x_{2n-1}^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda_5}\,, \ \ldots\,,$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \pm\sqrt{\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}\,, & x_2 &= -x_1 \\ \varrho x_3 &= \pm\sqrt{\lambda_1\lambda_4\cdots\lambda_n}\,, & x_4 &= -x_3 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \varrho x_{2n-1} &= \pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}} & x_{2n} &= -x_{2n-1}\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

Satz 2. *Eine Hyperebene durch den auf Γ und der Hypereinheitsebene E gelegenen S_{n-1}, $p(\lambda)$, berührt Γ in 2^{n-1} Punkten.*

Die Anzahl dieser S_{n-1} in E ist gleich der Anzahl der möglichen Anordnungen von $2n$ Zahlen in n Paare wie $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot \cdots \cdot 2n - 1 \cdot 2n$ mit keinen gemeinsamen Ziffern. Man kann dies dadurch erreichen, daß man zuerst jede der $(2n)!$ Permutationen nimmt und sie von links nach rechts laufend in n Paare teilt. Man erhält offenbar dieselbe Gruppe von Paaren für jede Permutation der n Paare. Dann kann man der Reihe nach die Ziffern jedes Paares vertauschen, dann von je zwei, dann von je drei usw., ohne die Gesamtgruppe zu verändern. Auf diese Weise liefern die $n!$ Permutationen von n Paaren je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

der $(2n)!$ Permutationen ohne die Gruppe zu beeinträchtigen. Demnach gibt es

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

solche Gruppen oder S_{n-1} in E.

Nimmt man irgend eine Kombination der $2n$ Variabeln x zur $n$ten Klasse, so gehen mit ihr $n!$ Permutationen der n übrigen Variabeln. Gibt man den n ersten Variabeln den Wert $+1$, den übrigen den Wert -1, so sind das die Koordinaten eines Punktes in E. Solcher Punkte P gibt es

$$\frac{1}{2} C_n^{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} .$$

Sei

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)(x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \ldots x_{2n})$$

eine solche Kombination und $x_i x_j x \ldots x_z$ irgend eine der $n!$ Permutationen der Reihe $x_{n+1} \ldots x_{2n}$ und S_{n-1} der durch

$$x_1 + x_i = 0,\ x_2 + x_j = 0,\ x_3 + x = 0,\ \ldots,\ x_n + x_z = 0$$

gebildete Überraum. Dann liegt offenbar der Punkt $P\ (111 \cdots 1, -1, -1, -1, \cdots -1)$ auf S_{n-1} und E. Somit gibt es $n!$ S_{n-1}-Überräume, welche je einen Punkt P gemein haben.

Die Hypertangentialebene in einem Punkte (x) von Γ hat in laufenden Koordinaten y die Form

$$\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} + \frac{y_3}{x_3^2} + \cdots + \frac{y_{2n}}{x_{2n}^2} = 0 , \tag{5}$$

so daß sie in jedem Punkte P mit E zusammenfällt. Als Resultat hat man

Satz 3. *Die Hyperfläche Γ hat die Hypereinheitsebene E als*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\text{ - fache}$$

Hypertangentialebene. Die $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 5 . 3 . 1$ in E gelegenen Hyperräume S_{n-1} haben zu je $n!$ die Punkte P gemein.

Um die Klasse von Γ von der Ordnung $2n-1$ zu bestimmen, kann man in S_{2n-1} $2n-2$ Punkte (y^i) in allgemeiner Lage annehmen. Sie bestimmen den Axialraum S_{2n-3} eines Hyperebenenbüschels, unter welchem sich die Tangentialhyperebenen an Γ befinden, deren Anzahl die gesuchte Klasse ist und die gleich ist der Anzahl ihrer Berührungspunkte. Diese erhält man als die Schnittpunkte der $2n-3$ ersten Polaren der Punkte (y^i) mit der Γ. Nun genügen die Punkte dieser Polaren auf Γ den Gleichungen

$$\frac{y_1^i}{x_1^2}+\frac{y_2^i}{x_2^2}+\frac{y_3^i}{x_3^2}+\cdots+\frac{y_{2n}^i}{x_{2n}^2}=0\,,\; i=1\,,\;2\,,\;3\,,\cdots,\;2n-2\;;$$

sowie auch der Gleichung von Γ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{2n}}=0\;.$$

Das sind $2n-2$ quadratische und eine lineare Gleichung in den Unbekannten $\frac{1}{x_i}$, welche, da die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet, 2^{2n-2} Lösungen haben. Also gibt es so viele Berührungspunkte, oder Tangentialhyperebenen. Daher

Satz 4. *Die Cayley'sche Γ von der Ordnung $2n-1$ hat die Klasse* 2^{2n-2}.

Für $n=2$ hat man die in der Einleitung erwähnte kubische Fläche. Die oben aufgestellten Sätze lauten dann bekannterweise wie folgt: Die Fläche Γ in S_3 hat in jeder Ecke des Koordinatentetraeders einen Doppelpunkt. Sie hat in allen Punkten jeder Kante dieselbe Tangentialebene. Diese sechs Tangentialebenen schneiden sich zu je zweien (durch gegenüberliegende Kanten) in drei in der Einheitsebene gelegenen Geraden $(S_{n-1}=S_1)$, die auch auf Γ liegen. Jede Ebene $p(\lambda)$ durch eine dieser Geraden berührt Γ in zwei Punkten. Die Einheitsebene ist eine Tritangentialebene von Γ. Die drei Geraden schneiden sich zu zweien in den drei Berührungspunkten der Tritangentialebene. Die Cayley'sche Fläche ist von der 4. Klasse.

3. Die S-Hyperfläche in einem S_{2n-1}.

Dieselbe ergibt sich sofort durch Dualisierung der Γ-Hyperfläche, indem man Punkten (x) und Hyperebenen (ax), Hyperebenen (u) und Punkte $(a u)$ entsprechen läßt. Die Klasse von S ist natürlich gleich der Ordnung von Γ, d. h. $2n-1$. Doch soll die S als Ordnungsfläche studiert werden. In diesem Sinne entspricht einem S_k in S_{2n-1}, der durch $k+1$

Punkte bestimmt ist, im dualen Raume Σ_{2n-1} als Punktgebilde ein S_{2n-2-k}. Zum Beispiel entspricht einer Geraden ein S_{2n-3}. Die Dimensionen von S_k und S_{2n-2-k} werden gleich wenn $k = n - 1$. Folglich sind die S_{n-1} selbst duale Hyperräume. Dem durch $x_i = 0$, $x_k = 0$ Hyperraume S_{2n-3} entspricht also in Σ_{2n-1} die Gerade $A_i A_k$ und der Hypertangentialebene $x_i + x_k = 0$ ein Punkt P_{ik} derselben $A_i A_k$. Den Punkten von S_{2n-3} entsprechen die durch $A_i A_k$ gehenden Tangentialhyperebenen, die alle denselben Berührungspunkt P_{ik} haben. Die P_{ik} sind somit Klemmpunkte (pinch-points) von S. Fährt man in ähnlicher Weise mit Dualisieren fort, so können die Eigenschaften von S zusammengefaßt werden in

Satz 5. *Die Steiner'sche Hyperfläche S in Σ_{2n-1} von der Klasse $2n-1$ und der Ordnung 2^{2n-2} hat jede Hyperebene α_i ($x_i = 0$ und A_i entsprechend) als doppelt berührende Deckhyperebene (trope). S hat auf jeder Kante $A_i A_k$ von Σ_{2n-1} einen Klemmpunkt P_{ik}. Den $(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ in E gelegenen S_{n-1} entsprechen auf S selbstdual eben so viele durch den Einheitspunkt gehende Σ_{n-1} deren Punkte alle 2^{n-1}-fach sind. S hat den Einheitspunkt E in Σ_{2n-1} als $\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$-fachen Punkt. Die Σ_{n-1} liegen zu je $n!$ in den Tangentialhyperebenen in E.*

Für $n = 2$ hat man die berühmte Römerfläche von Steiner, welche bekanntlich von der 4. Ordnung ist, einen dreifachen Punkt hat, durch welchen drei Doppellinien gehen. Sie ist einem Tetraeder eingeschrieben, dessen Seitenflächen die Fläche nach Kegelschnitten berühren (Tropes) und dessen Kanten je einen Klemmpunkt der Fläche enthalten.

Die in Satz 5 gegebenen Eigenschaften von S können aber auch leicht analytisch bewahrheitet werden.

Bezeichnet man die Hyperebenenkoordinaten von Σ_{2n-1} mit $(u) \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1})$, so hat S in diesen die Form ($\varrho x_i = u_i$):

$$\Phi = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_{2n-1}} = 0\,. \tag{6}$$

Um diese in Punktkoordinaten zu erhalten, müssen die $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$ gebildet werden. Dann sind die x_i diesen proportional, so daß man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = -\frac{1}{u_i^2} = -\varrho\, x_i\ , \quad \text{oder} \quad \frac{1}{u_i} = \pm \sqrt{\varrho}\cdot\sqrt{x_i} \tag{7}$$

zu setzen hat. (7) in (6) gibt so ohne weiteres für die Steiner'sche Hyperfläche die Gleichung:

$$\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} \pm \sqrt{x_3} \pm \cdots \pm \sqrt{x_{2n}}\,. \tag{8}$$

Eine auf diese Gleichung basierte synthetische Untersuchung für den allgemeinen Fall findet man im American Journal of Mathematics, Band 54 (1932), pp. 293—298, von *B. C. Wong.*

Mit Ausnahme des ersten Gliedes kann in (8) jede mögliche Anordnung der Vorzeichen genommen werden. Jeder entspricht so eine Reihe von $2n$ Quadratwurzeln, also 2^{2n-1} solcher verschiedener Reihen gibt es, deren Produkt sich bei den $n!$ der $2n$ Variabeln nicht ändert. Die Rationalisierung von (8) gibt auf diese Weise eine symmetrische Funktion der Ordnung 2^{2n-2} und damit diejenige der Hyperfläche S, wie oben auf geometrischem Wege gefunden wurde. Der Punkt $E\,(11 \cdots\cdot 1)$ befriedigt (8) jedesmal bei einer Anordnung von Vorzeichen mit n positiven und n negativen. Wird beachtet, daß die Anordnungen

$$(+1+1-1-1-1+1-1 \cdots -1)$$
$$(-1-1+1+1+1-1+1 \cdots +1)$$

equivalent sind, so gibt es so viele solche Anordnungen, als Kombinationen von $2n$ Elementen zur $n$ten Klasse geteilt durch zwei, also

$$\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,.$$

Der Einheitspunkt ist somit Vielfach von dieser Ordnung (siehe Satz 5).

In ähnlicher Weise können die übrigen Eigenschaften der Hyperfläche S direkt aus ihrer irrationalen Gleichung abgeleitet werden.

Da die Γ-Hyperfläche rational ist, so ergibt sich auch S als rational; d. h., ihre Koordinaten müssen sich durch $2n-1$ homogene Parameter als rationale homogene Funktionen darstellen lassen. Man erhält für dieselben

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= (-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_n+\lambda_{n+1} \qquad +\cdots+\lambda_{2n-1})^2,\\
\varrho x_2 &= (\ \ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_n-\lambda_{n+1} \qquad +\cdots+\lambda_{2n-1})^2,\\
\varrho x_3 &= (\ \ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_n-\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}+\cdots+\lambda_{2n-1})^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho x_n &= (\ \ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots-\lambda_n-\lambda_{n+1}-\cdots-\lambda_{2n-1})^2,\\
\varrho x_{n+1} &= (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n-\lambda_{n+1}-\cdots-\lambda_{2n-1})^2,\\
\varrho x_{n+2} &= (-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n+\lambda_{n+1}-\cdots-\lambda_{2n-1})^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho x_{2n-1} &= (-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_{n-1}+\lambda_n+\cdots+\lambda_{2n-2}-\lambda_{2n-1})^2,\\
\varrho x_{2n} &= (\ \ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\lambda_{2n-1})^2;
\end{aligned} \tag{9}$$

welche die Gleichung von S, $\Sigma \sqrt{x_i} = 0$ befriedigen. Setzt man in (9) der Kürze halber $\varrho x_i = L_i^2 (\lambda)$, so entspricht der Hyperebene $\Sigma a_i x_i = 0$ im λ-Raume $S_{2n-2} (\lambda)$ eine Hyperfläche zweiter Ordnung:

$$Q^2 (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n-1}) = 0 .$$

Diese ist rational und kann rational durch $2n - 2$ Parameter $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n-2}$ (homogen):

$$\lambda_i = R_i (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n-2}), \; i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$$

dargestellt werden. Setzt man diese Werte in $\varrho x_i = L_i (\lambda)$ ein, so ergeben sich die x_i als rationale Funktionen der θ. Daraus folgt

Satz 6. *Der Schnitt der Steiner'schen Hyperfläche mit einer Hyperebene ist rational und eine Varietät der Dimension $2n - 3$ und von der gleichen Ordnung wie S.*

Was die tatsächliche Rationalisierung der in (8) angegebenen irrationalen Form von S anbelangt, so scheint diese für höhere Werte (selbst für $n = 3$) von n sehr umständlich zu sein. Immerhin läßt sich für ein beliebiges n eine vollständige Lösung geben, worin jedoch noch eine Reihe von zu bestimmenden symmetrischen Funktionen auftreten, deren genaue Angabe für ein beliebiges n sehr erwünscht wäre. Durch gewöhnliches quadrieren und reduzieren gelangt man Schritt für Schritt zu nachfolgender Tabelle. Sie besteht aus r Zeilen 1, 2, 3, ..., r. In jeder Zeile bezeichnen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_r$ die elementar symmetrischen Funktionen der Ordnung 1, 2, ..., r von r Veränderlichen in der $i$ten Zeile ($i \leqq r$). Die F_k in der $i$ten Zeile sind symmetrische Funktionen der $k$ten Ordnung in i Veränderlichen. Bezeichnet man mit V_i die rationale Form von $\sum\limits_{i=1}^{1} \sqrt{x_i}$, so sind die Ausdrücke dafür

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= x_1 \\ V_2 &= \Phi_1^2 - 4\Phi_2 \end{aligned}\right\} \text{Ausnahmen}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \Phi_1^2 - 4\Phi_2 \\ V_4 &= (\Phi_1^2 - 4\Phi_2)^2 - 64\Phi_4 \quad \text{(Römer Fläche)} \\ V_5 &= [(\Phi_1^2 - 4\Phi_2)^2 - 64\Phi_4]^2 - 32 \cdot 64 (\Phi_1^3 - 4\Phi_1\Phi_2 + 8\Phi_3)\Phi_5 \\ V_6 &= [[(\Phi_1^2 - 4\Phi_2)^2 - 64\Phi_4]^2 - 32 \cdot 64 (\Phi_1^3 - 4\Phi_1\Phi_2 + 8\Phi_3)\Phi_5]^2 - F_{10} \cdot \Phi_6 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_r = \left[\cdots\left[\left[\left[[(\Phi_1^2 - 4\Phi_2)^2 - 64\Phi_4]^2 - F_3\Phi_5\right]^2 - F_{10} \cdot \Phi_6\right]^2 - F_{25} \cdot \Phi_7\right]^2 - \cdots\right]^2 - F_{2^{r-2}-r} \cdot \Phi_r$$

Daraus geht hervor, daß

$$V_r = (V_{r-1})^2 - F_{2^{r-2}-r} \cdot \Phi_r = 0 \tag{11}$$

die rationale Form von $\sum_{i=1}^{r} \sqrt{x_i} = 0$ ist, welche für $r = 2n$ eine Steiner'sche Hyperfläche darstellt. Man hat demnach für irgend eine Dimension r den

Satz 7. *Setzt man in einer Hyperfläche V_r $x_i = 0$, so reduziert sich V_r auf $(V_{r-1})^2$, das Quadrat der V_{r-1} des vorhergehenden Raumes. Wird in* (11) *$x_i = 0$ gesetzt, so bleibt $(V_{r-1})^2 = 0$, so daß $V_{r-1} = 0$, $x_1 = 0$ in einer Varietät schneidet, in deren Punkten $V_r = 0$, $x_1 = 0$ berührt. $x_1 = 0$ ist somit für jede V_r eine Deckhyperfläche.*

Während dieser Satz für alle Dimensionen gilt, $r \geqq 4$, bestehen die übrigen in Satz 5 aufgestellten Eigenschaften nur für die Steiner'schen Hyperflächen, einschließlich die Römerfläche ($r = 2n \geqq 4$).

(Eingegangen den 26. Oktober 1935.)