Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert.

Autor(en): **Ostrowski, Alexander**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **10 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10996

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert

Von Alexander Ostrowski, Basel

Ist die Funktion $h(x)$ im Intervall $< a, b >$ stetig, so kann ihre Abweichung von ihrem Integralmittelwert $\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx$ dennoch beliebig nah an die Differenz zwischen ihrem Maximum und Minimum heranreichen.

Dies wird nun anders, wenn man die beschränkte Differentiierbarkeit von $h(x)$ voraussetzt. Ist etwa in unserm Intervall $|h'(x)| \leqq m$, so kann die Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum von $h(x)$ den Wert $(b-a)\,m$ nicht übersteigen, kann aber diesen Wert sehr wohl erreichen.

Die Absolutabweichung von $h(x)$ von ihrem Integralmittelwert überschreitet aber in diesem Falle $\frac{1}{2}(b-a)\,m$ nicht, ja, im Mittelpunkt des Intervalls gilt sogar für die Absolutabweichung die Schranke $\frac{1}{4}(b-a)\,m$.

Genauer gilt folgendes:

Es sei $h(x)$ im Intervall $J: a < x < b$ stetig und differentiierbar, und es sei in J durchweg

$$|h'(x)| \leqq m, \quad m > 0\,. \tag{1}$$

Dann gilt für jedes x aus J:

$$\left| h(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx \right| \leqq \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right)(b-a)\,m\,. \tag{2}$$

Offenbar nimmt hier der erste Faktor rechts in der Mitte von J den Wert $\frac{1}{4}$ an und steigt sodann monoton gegen den Wert $\frac{1}{2}$, den er in den beiden Endpunkten von J annimmt.

Beim Beweis der obigen Behauptung darf offenbar angenommen werden, daß der Integralmittelwert von $h(x)$ verschwindet, da man sonst nur $h(x)$ um diesen Mittelwert zu verkleinern braucht. Ferner darf $m = 1$ angenommen werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(x)}{m}$ ersetzen kann, und endlich darf das Intervall J als das Intervall $(0, 1)$ vorausgesetzt werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(a + x(b-a))}{b-a}$ ersetzen kann.

Wir dürfen daher unsere Annahmen über $h(x)$ durch

$$\int_0^1 h(x)dx = 0\,, \quad |h'(x)| \leqq 1\,, \quad (0 < x < 1) \tag{3}$$

ersetzen, und die zu beweisende Behauptung reduziert sich auf

$$|\, h(x)\,| \leqq \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 . \tag{4}$$

Um nun eine Schranke für $|h(x)|$ in einem Punkte x_0 von J herzuleiten, darf man offenbar unbeschadet der Allgemeinheit $h(x_0) \geqq 0$ voraussetzen, da man sonst $-h(x)$ anstatt $h(x)$ betrachten kann. Dann gilt aber wegen (3)

$$h(x) \geqq h(x_0) - |x - x_0|\,.$$

Integriert man dies zwischen 0 und 1, so ergibt sich wegen (3)

$$0 = \int_0^1 h(x)dx \geqq h(x_0) - \int_0^1 |\, x - x_0\,|\, dx\,,$$

$$h(x_0) \leqq \int_0^1 |\, x - x_0\,|\, dx = \tfrac{1}{4} + (x_0 - \tfrac{1}{2})^2\,,$$

womit (4) bewiesen ist.

Zugleich sieht man, daß das Gleichheitszeichen in (4) nur gilt, wenn $\pm\, h(y) = \frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})^2 - |y - x|$ ist.

Analoge Betrachtungen führen natürlich auch bei endlichen Summen zu solchen Ungleichungen. Gilt z. B. für reelle a_ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0\,, \quad |a_{\nu+1} - a_\nu| \leqq d\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{5}$$

so gilt für jedes feste $k = 1, 2, \ldots, n$, wenn $a_k > 0$ ist,

$$a_\nu \geqq a_k - d|\nu - k|\,, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

und daher, wenn man über ν summiert,

$$n a_k \leqq d \sum_{\nu=1}^{n} |\,\nu - k\,| = \left[\frac{(n-k)^2 + k^2}{2} + \left(\frac{n}{2} - k\right)\right] d$$

oder

$$\left|\frac{a_k}{nd}\right| \leqq \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{6}$$

Ist aber a_k negativ, so kann man die gleichen Betrachtungen auf die Zahlenfolge $-a_\nu$ anwenden, so daß in jedem Falle die Ungleichung (6) für jedes $k = 1, \ldots, n$ aus den Annahmen (5) folgt.

(Eingegangen den 18. Januar 1938.)