Notiz über die Funktionaldeterminante von zwei Funktionen mit zwei gemeinsamen Nullstellen.

Notiz über die Funktionaldeterminante von zwei Funktionen mit zwei gemeinsamen Nullstellen

Von Alexander Ostrowski, Basel

1. Als Analogon zum Rolleschen Satze könnte man erwarten, daß, wenn zwei reelle Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ in zwei verschiedenen Punkten eines zusammenhängenden Bereichs verschwinden, ihre Funktionaldeterminante $\Delta(f, g)$ irgendwo in diesem Bereich verschwindet. Eine solche Fassung ist indessen sogar dann falsch, wenn der Bereich die ganze Ebene ist. Während z. B. die reellen Funktionen

$$\Re(e^{x+iy}-1), \qquad \Im(e^{x+iy}-1)$$

in unendlich vielen Punkten der Ebene gleichzeitig verschwinden, hat ihre Funktionaldeterminante den Wert e^{2x}, ist also niemals gleich 0.

Man kann trotzdem erwarten, daß ein gewisser Rest dieser Tatsache noch erhalten bleibt, in dem Sinne, daß die Funktionaldeterminante wenigstens sehr kleine Werte annehmen muß, wenn die beiden gemeinsamen Nullstellen von f und g sehr nahe zusammenrücken und das Gebiet etwa als konvex angenommen wird.

Auch in dieser Fassung braucht aber der Satz nicht einmal dann zu gelten, wenn man feste Schranken für $|f'_x|$, $|f'_y|$, $|g'_x|$, $|g'_y|$ einführt. So verschwinden z. B. die beiden Funktionen

$$f(x, y) = \varepsilon\left(e^{\frac{y}{\varepsilon}}\cos\frac{x}{\varepsilon}-1\right), \quad g(x, y) = \varepsilon e^{\frac{y}{\varepsilon}}\sin\frac{x}{\varepsilon}$$

für jedes noch so kleine positive ε in den beiden Punkten der x-Achse: $x = 0$, $x = 2\varepsilon\pi$ zugleich, ihre ersten Ableitungen sind auf der Strecke $0, 2\varepsilon\pi$ der x-Achse absolut $\leqq 1$, während die Funktionaldeterminante auf dieser Strecke durchweg den Wert -1 besitzt.

Anders wird dies aber, wenn man auch die Beschränktheit der zweiten Ableitungen für wenigstens eine der beiden Funktionen annimmt. In diesem Falle ergibt sich in der Tat eine obere Schranke für das Minimum des absoluten Betrages von $\Delta(f, g)$, die mit der Distanz der beiden gemeinsamen Nullstellen gegen 0 konvergiert.

Der Satz läßt sich genauer wie folgt formulieren:

I. *Es seien in einem konvexen Gebiet G mit dem Durchmesser d der x,y-Ebene die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ stetig und je einmal nach x*

und y differentiierbar, und es mögen für $g(x, y)$ auch die drei partiellen Ableitungen zweiter Ordnung existieren. Es sei im ganzen Gebiete G

$$|f'_x|, |f'_y| \leqq M \; ; \quad |g''_{xx}|, |g''_{xy}|, |g''_{yy}| \leqq \mathfrak{M} .$$

Besitzen dann f und g zwei gemeinsame Nullstellen in G, so gibt es einen Punkt in G, in dem der absolute Betrag der Funktionaldeterminante $\Delta(f, g)$ von f und g unterhalb der Schranke $\sqrt{2}\, d\, M\, \mathfrak{M}$ bleibt.

Dieser Satz läßt sich etwas schärfer formulieren, wenn man anstatt der Schranken $M, \mathfrak{M}$, die ja von der Orientierung des Koordinatensystems abhängig sein können, andere Größen $M_0, \mathfrak{M}_0$ einführt. M_0 ist die obere Schranke für den absoluten Betrag der ersten Ableitung von f in jedem Punkt von G und *in jeder Richtung* — d. h. also, eine obere Schranke für den absoluten Betrag des Gradienten der Funktion $f(x, y)$. Analog ist $\mathfrak{M}_0$ eine obere Schranke für den absoluten Betrag der zweiten Ableitung von $g(x, y)$ in jedem Punkte von G und *in jeder Richtung*. Dann gilt:

II. *Sind die Voraussetzungen von* I *erfüllt, und haben M_0 und $\mathfrak{M}_0$ die oben angegebene Bedeutung, so gibt es einen Punkt in G mit*

$$|\Delta(f, g)| \leqq \frac{d}{2} M_0 \mathfrak{M}_0 . \tag{1}$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Satz I ein Korollar zu II ist. Es gilt nämlich

$$M_0 \leqq \sqrt{M^2 + M^2} = \sqrt{2}\, M ,$$

$$\mathfrak{M}_0 = \operatorname{Max} |g''_{xx}\cos^2\varphi + 2\, g''_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + g''_{yy}\sin^2\varphi| ,$$

wo φ alle Werte von 0 bis 2π und der Punkt (x, y) alle Punkte von G durchläuft. Die rechte Seite ist aber offenbar höchstens gleich

$$\mathfrak{M}(\cos^2\varphi + 2\,|\cos\varphi\sin\varphi| + \sin^2\varphi) = \mathfrak{M}(|\cos\varphi| + |\sin\varphi|)^2 \leqq 2\,\mathfrak{M} .$$

Ersetzt man aber nun in (1) $M_0, \mathfrak{M}_0$ respektive durch $\sqrt{2}M, 2\,\mathfrak{M}$, so ergibt sich aus (1) die Schranke des Satzes I.

2. Beim Beweis von II kann man offenbar das Koordinatensystem so legen, daß die beiden vorausgesetzten gemeinsamen Nullstellen von f und g auf der x-Achse in den Punkten a, b liegen, wobei $a < b < a + d$ ist. Dann bleibt $|f'_y| \leqq M_0$ und es gilt zugleich $|g''_{xx}| \leqq \mathfrak{M}_0$. Daher wird die Behauptung des Satzes II aus dem folgenden Hilfssatz folgen:

III. *Es seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ auf der Strecke J der x-Achse: $a \leqq x \leqq b$ und in einer Umgebung der inneren Punkte dieser Strecke stetig. Es sei f in den innern Punkten von J nach x und y differentiierbar, und es sei in J durchweg*

$$|f'_y| \leqq M_0 . \tag{2, 1}$$

Es sei ferner g in den innern Punkten von J einmal nach y und zweimal stückweise stetig nach x differentiierbar, und es sei in J

$$|g''_{xx}| \leqq \mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_0 > 0 . \tag{2, 2}$$

Verschwinden die Funktionen f und g in den beiden Endpunkten von J, so gibt es einen Punkt ξ von J, in dem der absolute Betrag der Funktionaldeterminante von f und g unterhalb der Schranke

$$\frac{b-a}{2} M_0 \mathfrak{M}_0 \tag{2,3}$$

bleibt.

Beweis: Nach dem Rolleschen Satz gibt es einen innern Punkt ξ von J, in dem $f'_x(\xi, 0) = 0$ ist. Dann erhält man für den absoluten Betrag der Funktionaldeterminante von f und g im Punkte $(\xi, 0)$:

$$|f'_x(\xi, 0)\, g'_y(\xi, 0) - f'_y(\xi, 0)\, g'_x(\xi, 0)| = |f'_y(\xi, 0)||g'_x(\xi, 0)| .$$

Dieses ist aber wegen (2, 1) höchstens gleich $M_0 |g'_x(\xi, 0)|$. Wir haben daher nur noch die Relation zu beweisen:

$$|g'_x(\xi, 0)| < \frac{b-a}{2} \mathfrak{M}_0 . \tag{2,4}$$

Setzt man aber

$$g'_x(\xi, 0) = h(x) ,$$

so gelten für $h(x)$ die Voraussetzungen

$$\int_a^b h(x)\, dx = 0 , \qquad |h'(x)| \leqq \mathfrak{M}_0 .$$

Daher ergibt sich (2, 4) ohne weiteres aus der Behauptung (2) der vorstehenden Arbeit[1]).

Damit ist III bewiesen.

---

[1]) *A. Ostrowski*, Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. Comm. Math. Helv., Bd. 10 (1938) pp.

3. Es sei noch bemerkt, daß die Konstante $\frac{1}{2}$ in der Gleichung (2, 3) des Satzes III die „beste" ist, wie man ohne Schwierigkeit zeigen kann. Dagegen sind die Konstanten $\sqrt{2}$ bezw. $\frac{1}{2}$ in den Sätzen I bezw. II nicht die „besten" und dürften sich noch nicht unwesentlich verbessern lassen.

Läßt man insbesondere im Satze I das Gebiet G mit dem Quadrat ($\mathfrak{R}_0$):

$$|x - x_0| \leqq 2 d_0 , \qquad |y - y_0| \leqq 2 d_0$$

zusammenfallen, so ergibt sich, da hier dann $d = 4 \sqrt{2}\, d_0$ ist, für das Minimum der Funktionaldeterminante in $\mathfrak{R}_0$ die Schranke $8\, M\, \mathfrak{M}\, d_0$.

Für dieses spezielle Gebiet habe ich diese Tatsache in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung[2]) bereits benützt. Der dort S. 91 gegebene Beweis reicht indessen zur Herleitung dieser Schranke noch nicht aus, sondern liefert eine doppelt so große Schranke. Daher sind die Betrachtungen a. a. O. auf S. 91 oben durch den in dieser Notiz gegebenen Beweis zu ersetzen[3]).

(Eingegangen den 18. Januar 1938.)

---

[2]) *A. Ostrowski,* Konvergenzdiskussion und Fehlerabschätzung für die Newtonsche Methode bei Gleichungssystemen. Comm. Math. Helv., Bd. 9 (1937), S. 79—103.

[3]) Es sei bei dieser Gelegenheit noch eine zweite Berichtigung zur soeben zitierten Arbeit vermerkt, die auf S. 80, Z. 16 v. o. anzubringen ist. Es sind dort die Worte; „der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ in $\mathfrak{R}'$ liegt" zu ersetzen durch; „der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ im Mittelpunkt von $\mathfrak{R}'$ liegt".

Ich verdanke den Hinweis auf die beiden vermerkten Versehen einer freundlichen Mitteilung von Herrn K. Bußmann in Bonn.