Riemann'sche Flächen vom hyperbolischen Typus.

Autor(en): **Speiser, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **10 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10998

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Riemann'sche Flächen vom hyperbolischen Typus

Von A. Speiser, Zürich

§ 1. Der reine und gemischte hyperbolische Typus.

Im folgenden möchte ich Riemannsche Flächen behandeln, die einfach zusammenhängend sind, bei ∞ in allen Blättern logarithmisch verzweigt sind und sonst nur über den Stellen $+1$ und -1 logarithmische Verzweigungsstellen aufweisen. Falls die Stellen ± 1 in allen Blättern verzweigt sind, so erhält man die sogenannte modulare Fläche, welche sich auf die obere Halbebene abbilden läßt, also zum hyperbolischen Typus gehört. Sie besitzt Abbildungen auf sich selbst, indem man irgend ein Blatt auf ein beliebiges anderes kongruent abbildet und diese Zuordnung gemäß dem Prinzip der gleichen Umgebung — jedes Blatt liegt gegen die Fläche gleich — auf die ganze Riemannsche Fläche überträgt. Diese Automorphismen übertragen sich auf die obere Halbebene und geben in bekannter Weise die linearen gebrochenen ganzzahligen Substitutionen, welche (mod. 2) der Identität kongruent sind und die Determinante 1 haben.

Nun sei eine Fläche F vorgelegt, welche nicht an allen Stellen ± 1 verzweigt ist. Man bringe in jedem Blatt, das bei $+1$ unverzweigt ist, den Schnitt von $+1$ nach $+\infty$ längs der reellen Axe an, entsprechend in den bei -1 unverzweigten Blättern den Schnitt von -1 bis $-\infty$. Von dieser aufgeschnittenen Fläche denke man sich unendlich viele Exemplare und hefte an jedes freie Ufer ein neues Exemplar mit dem entsprechend gegenüberliegenden Ufer an. So erhält man von neuem die modulare Fläche. Die einzelnen aufgeschnittenen Exemplare von F liegen innerhalb der modularen Fläche gleich und man kann sie daher wieder kongruent auf einander abbilden. Auf diese Weise entsteht eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ der modularen Gruppe, welche für F charakteristisch ist, und als die zu F gehörige Untergruppe bezeichnet werden soll. Aus ihrer Kenntnis läßt sich entscheiden, ob F zum parabolischen oder zum hyperbolischen Typus gehört, denn es gilt der Satz, daß die Summe

$$\sum_{\mathfrak{G}} \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

im parabolischen Fall divergiert, im hyperbolischen dagegen konvergiert.

Hierbei ist die allgemeine Substitutionsmatrix der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Gehört F zum hyperbolischen Typus, so läßt sich eine neue Fallunterscheidung machen. Man denke sich nämlich F in zwei Hälften zerschnitten, indem man zwei verschiedene Verzweigungspunkte desselben Blattes geradlinig verbindet, z. B. den Schnitt von -1 nach $+1$ anbringt, falls ± 1 verzweigt sind. Die beiden Hälften seien mit A und B bezeichnet. Sie können an der Schnittlinie gespiegelt werden; auf diese Weise möge $\overline{A}$ und $\overline{B}$ entstehen. Nun kann man A und $\overline{A}$ längs dieser Linie zusammensetzen und man erhält wieder eine einfach zusammenhängende Fläche, welche mit $A + \overline{A}$ bezeichnet werde. Entsprechend bildet man $B + \overline{B}$. Dann gilt der Satz, daß die ursprüngliche Fläche $A + B$ sicher hyperbolisch ist, falls $A + \overline{A}$ oder $B + \overline{B}$ hyperbolisch ist. Dagegen bleibt der Fall noch unentschieden, welchem Typus $A + B$ angehört, falls $A + \overline{A}$ und $B + \overline{B}$ beide parabolisch sind. Gerade dieser Fall ist offenbar besonders interessant. Es läßt sich zeigen, daß bei der Abbildung von $A + B$ auf den Einheitskreis die Trennungslinie von A und B auf eine Kurve abgebildet wird, welche jeden Punkt der Kreisperipherie annähert.

Nur der letztere gemischte Fall soll im folgenden behandelt werden. Ob es solche Flächen gibt, ist noch nicht entschieden. Wir werden ein Kriterium angeben, das dem obigen über den Unterschied der Typen ähnlich ist, indem es von der Gruppe allein handelt, und das sicherstellt, daß unter einer gewissen Bedingung sicher der rein hyperbolische Fall vorliegt.

§ 2. Kettenbrüche mit geraden Teilnennern beliebigen Vorzeichens.

Die Substitutionsgruppe der modularen Fläche läßt sich bekanntlich durch die beiden Substitutionen mit der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen in dem Sinne, daß jede Substitution sich auf eine und nur eine Weise in der Gestalt $S^{a_1} T^{b_1} S^{a_2} T^{b_2} \ldots S^{a_n} T^{b_n}$ darstellen läßt, ein Satz, der ebenso leicht geometrisch an der Modulfigur wie rechnerisch bewiesen wird, letzteres, indem man zeigt, daß mit zunehmender Länge des Ausdruckes die Beträge der Koeffizienten zunehmen.

Ist ferner ein echter Kettenbruch von der Gestalt $\cfrac{1}{a_1 + \cdots}$ mit den

Teilnennern $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, so erhält man die Näherungsbrüche, indem man die Matrizen

$$M(a_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix}$$

bildet und ihr Produkt nimmt $M(a_1)\,M(a_2)\ldots M(a_n)$.

Setzt man dieses Produkt $= \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{pmatrix}$,
so ist $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ der letzte Näherungsbruch, während $\frac{P_n}{Q_n}$ den Wert des Kettenbruches selbst darstellt. Diese Sätze stehen im wesentlichen schon bei Euler. Vgl. die Vorrede zum Band 16, sectio altera, der ersten Serie der opera omnia, pg. XCVII.

Diese Matrizen $M(a)$ lassen sich mit S und T in Verbindung setzen. Es ist, wenn R die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bedeutet:

$$S^n = R \cdot M(2n) \quad \text{und} \quad T^n = M(2n) \cdot R \ .$$

Jetzt hat man vier Fälle zu unterscheiden:

I. $T^{b_1} S^{a_2} \ldots T^{b_{n-1}} S^{a_n} = M(b_1)\,M(a_2)\ldots M(b_{n-1})\,M(a_n)$.

Diese Matrizen, bei denen $a_1 = 0$ und $b_n = 0$, ergeben also stets Näherungswerte von Kettenbrüchen.

II. $S^{a_1} T^{b_1} \ldots T^{b_{n-1}} S^{a_n} = RM(a_1)\,M(b_1)\ldots M(b_{n-1})\,M(a_n)$.

Dies sind Matrizen, welche erst nach Vertauschung der beiden Zeilen zu Kettenbrüchen gehören.

III. $T^{b_1} S^{a_2} \ldots S^{a_n} T^{b_n} = M(b_1)\,M(a_2)\ldots M(a_n)\,M(b_n) . R$.

Hier sind die beiden Spalten zu vertauschen.

IV. $S^{a_1} T^{b_1} \ldots S^{a_n} T^{b_n} = R . M(a_1)\,M(b_1)\ldots M(a_n)\,M(b_n) . R$.

Hierin hat man sowohl die Zeilen als die Spalten zu vertauschen, um zum Kettenbruch zu kommen.

Der Grund, warum diese Vertauschungen notwendig sind, ist leicht einzusehen. Weil der Wert der echten Kettenbrüche stets zwischen -1 und $+1$ liegt, so müssen die Zahlen der ersten Zeile kleiner als die entsprechenden der zweiten Zeile sein. Weil ferner die linke Spalte den letzten Näherungsbruch, die zweite aber den Wert des Kettenbruches selber darstellt, der größerer Zahlen bedarf, so ist offenbar die Zahl links oben, P_{n-1}, die kleinste der vier Zahlen. Steht die kleinste Zahl nicht an jener Stelle, so kann man sie durch Verwendung von R rechts oder links oder beidseitig dorthin bringen.

Hieraus ergibt sich nun leicht der

Satz 1: Ist ein echter positiver oder negativer Bruch gegeben, der in gekürzter Gestalt entweder einen geraden Zähler oder einen geraden Nenner besitzt, so läßt er sich in einen endlichen echten Kettenbruch mit geraden positiven oder negativen Teilnennern entwickeln.

Beweis: Es seien a und b zwei ganze positive oder negative Zahlen, die zu einander prim sind, dann gibt es in der arithmetischen Progression $ax + b$, wo $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist, stets zwei aufeinanderfolgende Zahlen, für welche $|ax + b| < |a|$ ist. Wir verstehen im folgenden unter einer Lösung dieser Ungleichung stets die eindeutig bestimmte Lösung mit geradem x.

2. Es sei $|b| < |a|$. Dann ist stets $|2xa + b| > |a|$ für jedes von 0 verschiedene ganzzahlige x.

Nun sei P/Q ein echter positiver oder negativer Bruch und es sei etwa P gerade, Q ungerade. Die Gleichung $Px - Qy = +1$ besitzt zwei Lösungen, für welche $|x| < |Q|$ ist. Sie unterscheiden sich um $\pm Q$ und daher ist in einer derselben x gerade. Wir setzen $x = Q_1$ und $y = P_1$.

Die Matrix $$\begin{pmatrix} P_1 & P \\ Q_1 & Q \end{pmatrix} = M$$

hat die Determinante -1. Nun bestimmen wir x nach 1. so, daß $|P - 2xP_1| < |P_1|$ ist. Wir multiplizieren in der obigen Matrix die erste Spalte mit $2x$ und subtrahieren sie von der zweiten Spalte, hierauf vertauschen wir die beiden Spalten. Dies kommt darauf hinaus, daß wir die Matrix M rechts mit $M^{-1}(2x)$ zusammensetzen. Mit der so entstehenden Matrix fahren wir fort und gelangen schließlich zur Identität. Es ergibt sich, daß M zu einem Kettenbruch von der angegebenen Art gehört.

Bilden wir umgekehrt ein Produkt $M(2a_1)\, M(2a_2) \ldots M(2a_n)$, so erhalten wir Matrizen mit zunehmenden Koeffizienten wegen 2., daher kann ein solches Produkt nie die Einheitsmatrix werden.

§ 3. Kriterium für den reinen hyperbolischen Fall.

Wir kehren zu der Riemannschen Fläche zurück, welche wir mit $A + B$ bezeichnet haben, und setzen voraus, daß sie zum hyperbolischen

Typus gehört und daher auf den Einheitskreis abgebildet werden kann, während die symmetrischen Flächen $A + \overline{A}$ und $B + \overline{B}$ parabolisch sind. Die Trennungslinie T von A und B wird dann auf eine Kurve abgebildet, welche die Peripherie des Einheitskreises überall annähert. T möge in einem Blatt von -1 nach $+1$ verlaufen. Indem wir nach § 1 $A + B$ einschneiden und aus unendlich vielen Exemplaren dieser Fläche die modulare zusammensetzen, möge bei der Abbildung dieser modularen Fläche auf die obere Halbebene T in die imaginäre Halbachse von 0 nach $i\infty$ übergehen. Die Gruppe unserer Fläche enthält dann die Substitutionen S und T nicht, denn die beiden Windungspunkte bei -1 und $+1$ liegen in der ursprünglichen Fläche. Daher sind auch die parabolischen Umgebungen der Punkte 0 und $i\infty$ Bilder eines Stückes von $A + B$[1]).

Mit Hilfe der eingeschnittenen Fläche $A + B$ können wir nun aber die modulare Fläche auch auf die unendlich oft überdeckte Fläche des Einheitskreises abbilden. Wir bilden nämlich zunächst $A + B$ auf den Einheitskreis ab und bringen dann im Einheitskreis die Schnitte an, welche wir in $A + B$ angebracht hatten. Genau wie wir mit unendlich vielen Exemplaren von eingeschnittenen $A + B$ die modulare Fläche zusammensetzten, so können wir mit unendlich vielen Exemplaren des eingeschnittenen Einheitskreises, die wir in entsprechender Weise aneinander heften, ein Bild der modularen Fläche herstellen, welches ganz über dem Einheitskreis liegt.

Auf diesem Wege erhalten wir eine Abbildung der oberen Halbebene auf die unendlich oft überdeckte Fläche des Einheitskreises, d. h. wir erhalten eine Funktion, welche in der oberen Halbebene definiert ist und dort beschränkt ist. Für solche Funktionen gilt nun der Satz von Fatou, wonach die Wege, welche von der oberen Halbebene aus nach einem Punkt der reellen Axe führen, mit Ausnahme einer Nullmenge, übergehen in Wege, welche einem bestimmten Wert im Einheitskreis zustreben.

Abgesehen von einer Nullmenge können die Endpunkte jener Wege nur auf der Peripherie des Einheitskreises liegen. Nun bedenken wir aber,

[1]) Der Begriff der parabolischen Umgebung stammt von Klein und findet sich ausführlich dargestellt in Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. I, S. 234ff. Dort findet sich auch der Hinweis auf die Kreisfiguren. Der von Züllig behandelte Fall, wo sich die Kreise berühren und nur Kreisbogendreiecke mit verschwindenden Winkeln frei lassen, ist Klein und seinen Nachfolgern, z. B. Humbert, entgangen, offenbar weil die Figur auf S. 236 prinzipiell falsch ist. Die Kreisbogen, welche den dortigen Fundamentalbereich begrenzen, müßten nach oben und nicht nach innen konvex sein.

daß die Trennungslinie T auf eine Kurve abgebildet wird, welche die ganze Peripherie des Einheitskreises verbarrikadiert, mit Ausnahme von höchstens zwei Punkten. Weil nämlich T an seinen beiden Enden in singuläre Punkte mündet, so könnte jedes der beiden Enden für sich ein Bild liefern, das nur je eine Hälfte der Peripherie annähert; die beiden Trennungspunkte könnten dann vom Innern des Einheitskreises aus zugänglich sein auf Wegen, welche das Bild von T gar nicht oder nur endlich oft schneiden. Diese beiden Werte können aber nach einem Satz von Riesz (vgl. Bieberbach, Funktionentheorie II, S. 155) nur für eine Nullmenge von Punkten der reellen Axe angenommen werden.

So ergibt sich der Satz,

Satz 2: Geht man in der oberen Halbebene auf einer senkrechten Geraden nach Punkten der reellen Axe, so erhält man Bildkurven im Einheitskreis, die mit Ausnahme einer Nullmenge nach einem bestimmten Punkt der Peripherie gehen und die Bilder von T unendlich oft treffen.

Es versteht sich von selbst, daß die eben erwähnten Bildkurven im Einheitskreis nicht in demselben Blatt verlaufen, sondern daß sie im allgemeinen durch unendlich viele Exemplare der Kreisscheiben gehen.

Wir betrachten in der oberen Halbebene der Modulfunktion die imaginäre Halbachse von 0 bis $i\,\infty$. Unter der linearen Substitution

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

geht sie über in den Halbkreis, der senkrecht zur reellen Axe steht und durch die beiden Punkte b/d und a/c geht, ersterer entspricht 0, letzterer $i\,\infty$. Er überdeckt nach oben zu von der reellen Axe ein Stück der Länge $1/|cd|$. Gehen wir nun senkrecht von oben auf einer geradlinigen Strecke in den reellen Punkt α, der nicht zu der früher erwähnten Nullmenge gehört, so muß nach Satz 2 diese Strecke unendlich viele dieser Halbkreise, soweit sie aus der Gruppe unserer Riemannschen Fläche entstehen, kreuzen. Falls nun die Summe $\Sigma 1/|cd|$ erstreckt über alle Substitutionen der Gruppe, konvergiert, so gibt es nur eine Nullmenge von Punkten der reellen Axe, für welche unendlich viele Kreisbogen getroffen werden. Unsere Fläche kann daher nicht zum gemischten Typus gehören. Man braucht hierbei nicht die ganze reelle Axe zu berücksichtigen, sondern kann sich beschränken, z. B. auf das Stück zwischen 0 und 1. Man wird daher die Summe nur über diejenigen Matrizen zu erstrecken brauchen, für die $0 < a/c < 1$ ist und erhält den

Satz 3: Die Riemannsche Fläche gehört zum rein hyperbolischen Typus, wenn $\Sigma 1/|cd|$ erstreckt über diejenigen Matrizen, für welche a/c in einem beliebigen endlichen Intervall liegt, konvergiert.

In der Folge wollen wir dieses Kriterium, das hinreichend aber nicht notwendig für den reinen Fall ist, näher beleuchten. Als Intervall nehmen wir stets das Intervall von 0 bis 1. Die zugehörigen Matrizen gehören alle zu Kettenbrüchen mit geraden Teilnennern, falls man durch eventuelle Vertauschung der Spalten erreicht, daß $|a| < |b|$ ist.

Zunächst erinnern wir uns an das Kriterium, daß $\Sigma 1/(a^2+b^2+c^2+d^2)$ konvergiert, wenn die Fläche zum hyperbolischen Typus gehört. Daraus folgt, daß auch die Summe $\Sigma 1/(c^2 + d^2)$ konvergiert, wenn sie bloß über diejenigen Matrizen erstreckt wird, welche die imaginäre Halbaxe in einen Halbkreis über einer Strecke zwischen 0 und 1 überführt. Denn alsdann ist $|a| < |c|$ und $|b| < |d|$, so daß man im obigen Nenner $a^2 + b^2$ weglassen kann; der Wert des Bruches wird dadurch noch nicht verdoppelt.

Aus der Konvergenz von $\Sigma 1/(c^2 + d^2)$ folgt keineswegs die Konvergenz von $\Sigma 1/|cd|$, denn es kann der Quotient c/d beliebig groß werden. Dagegen konvergiert die Summe $\Sigma 1/|cd|$ stets, wenn man sich auf diejenigen Matrizen beschränkt, für welche $1/M < c/d < M$ ist, wo M eine endliche positive Zahl ist. Die allfällige Divergenz der Reihe $1/|cd|$ kann also nur von denjenigen Matrizen herrühren, in denen c/d weit verschieden von 1 ist.

Ist in der Matrix der Wert von c vorgegeben, so kommen für a nur noch $\varphi(c)$ Zahlen in Betracht, da a/c zwischen 0 und 1 liegen soll und a prim zu c ist. Durch a und c ist aber die Matrix eindeutig bestimmt. Denn zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $ax - cy = 1$ würden zwei Matrizen liefern, welche sich um den Faktor S unterscheiden. Wenn daher die beiden Matrizen in der Gruppe vorkämen, so müßte auch S darin auftreten, was wir ausgeschlossen haben. Also gibt es in unserer Summe höchstens $\varphi(c)$ Terme mit gegebenem c. Dasselbe gilt für d. Nun ist $\varphi(c)$ von der Größenordnung c selber, also läßt sich daraus nichts auf die Konvergenz von $1/|cd|$ schließen, als daß jedenfalls die Reihe nicht stark divergiert. Um die Abweichung der beiden Kriterien zu untersuchen, können wir uns im folgenden darauf beschränken, daß $c/d > M$ ist oder, parallel damit, daß $d/c > M$ ist. Wir nehmen den letzteren Fall an und summieren bloß über derartige Matrizen. Es muß also $\Sigma 1/(c^2+d^2)$ konvergieren, während $\Sigma 1/|cd|$ divergiert. Wir ordnen nach den c und setzen bei festem c die zugehörigen Werte von d gleich $c\,\delta_k (k = 1,2, \ldots, u)$, wobei $u \leqq \varphi(c)$ ist und alle δ_k größer als M sind. Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{u} \frac{1}{\delta_k^2} = A(c) \qquad \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{\delta_k} = B(c)$$

dann muß also $\Sigma A(c)/c^2$ konvergieren, während $\Sigma B(c)/c^2$ divergiert. Man ersieht hieraus, daß δ_k nicht zu stark zunehmen darf, damit die letztere Summe divergiert, andrerseits darf δ_k auch nicht zu wenig zunehmen, damit die erstere Summe konvergiert. Setzt man $\delta_k = \log k$, so ergibt sich ungefähr $A(c) = c/(\log c)^2$, dagegen $B(c) = c/(\log c)$, hieraus werden unsere beiden Reihen zu $\Sigma 1/c(\log c)^2$ und $\Sigma 1/c \log c$, von denen die erste konvergiert, die zweite aber divergiert. Dieses Beispiel illustriert gut die Nähe der beiden Kriterien.

§ 4. Kriterium für konvergierende Wege.

Das in § 1 erwähnte Kriterium zur Unterscheidung des parabolischen und hyperbolischen Falles erscheint zunächst in der Form der linearen Substitutionen. Durch die Überlegungen des § 2 läßt sich aber der Zusammenhang mit der ursprünglichen Riemannschen Fläche herstellen. Wir denken uns nämlich die allgemeine Substitution durch den zugehörigen Kettenbruch dargestellt mit den Teilnennern $2a_1$, $2a_2, \ldots, 2a_n$. Dann entspricht jene Substitution einem Weg auf der Riemannschen Fläche, welcher zuerst a_1-mal den Punkt $+1$, dann a_2-mal den Punkt -1 usf. umläuft. Da die Gruppe durch parabolische Substitutionen erzeugt wird, so lauten die zugehörigen Kettenbrüche besonders einfach: ihre Teilnenner sind von ungerader Anzahl $2m+1$, die letzten m durchlaufen die ersten m in umgekehrter Reihenfolge und mit umgekehrtem Vorzeichen. Der mittlere Koeffizient kann als 2 angenommen werden in unserem Fall. Durch solche Kettenbrüche lassen sich alle zusammensetzen. Diejenigen Substitutionen, für welche c/d oder d/c groß sind, liefern Kettenbrüche, deren letzter Teilnenner groß ist, denn diese Brüche liefern ja den letzten Teilnenner.

Im gemischten Fall müssen die Matrizen Kettenbrüche liefern, deren anfängliche Teilnenner eine beliebige endliche Folge von geraden ganzen Zahlen bilden. Denn würde auch nur eine solche Folge fehlen, so wäre gleich ein endliches Intervall unbedeckt und es läge nach Satz 2 der reine Fall vor. Die Sachlage bei den Kettenbrüchen ist durchaus analog wie bei den Dezimalbrüchen: Wenn eine Folge von n Zahlen rechts vom Komma ausgelassen wird, so wird gleichzeitig ein ganzes Intervall von der Größe $1/10^n$ ausfallen. Man übersieht leicht, daß jener Fall, wo eine Anfangsfolge ausfällt, mit einem „modularen Ende" der Riemannschen Fläche verknüpft ist, der also stets zum reinen Typus gehört.

Schließlich kann man direkt durch Betrachtung der Produkte, die ich in den Commentarii 4, S. 180, aufgestellt habe, die Bedingung dafür aufstellen, daß das Bild der imaginären Axe auf dem Einheitskreis beidseitig in festen Punkten endet. Die einzelnen Faktoren des unendlichen Produktes haben folgende Gestalt:

$$\frac{ait+b}{cit+d} \cdot \frac{ci+d}{ai+b} .$$

Wir wollen die Amplitude dieser Faktoren berechnen und haben alsdann über sie zu summieren. Für die Amplituden kann man ihre Tangensfunktionen einsetzen, weil sie klein sind. Man findet nach kurzer Rechnung

$$\frac{-act^2+(ac+bd)t-bd}{(act^2+bd)(ac+bd)+t} .$$

Für $t=0$ und für $t=\infty$ findet man den Wert $-1/(ac+bd)$. Man wird zunächst verlangen, daß die Summe über diese Brüche konvergiert. Hierauf subtrahiere man diesen Bruch von dem obigen Wert der Amplitude für beliebiges t. Man findet als Differenz

$$\frac{((ac+bd)^2+1)\,t}{(ac+bd)\,(act^2+bd)\,(ac+bd)+t} .$$

Man beachte, daß ac und bd dasselbe Vorzeichen haben, daß ferner $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac+bd)^2+1=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ und also große Werte hat. Die Differenz hat daher ungefähr den Wert $t/(act^2+bd)$ und sie geht nach Null, wenn t nach 0 oder nach ∞ läuft, sobald $\Sigma 1/|ac|$ und $\Sigma 1/|bd|$ konvergieren. Damit gewinnen wir den

Satz 4: Das Bild der Trennungslinie von A und B im Einheitskreis endigt in bestimmten Peripheriepunkten, wenn die beiden Summen $\Sigma 1/|ac|$ und $\Sigma 1/|bd|$ erstreckt über die Matrizen der Gruppe (exkl. der Identität) konvergieren; notwendig ist die Konvergenz von $\Sigma 1/(ac+bd)$.

In diesem Satz ist wesentlich vorausgesetzt, daß die beiden Substitutionen S und T nicht in der Gruppe enthalten sind.

Das obige notwendige Kriterium kann auch in der Gestalt ausgesprochen werden, daß die Reihe $\Sigma 1/(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2})$ konvergiert. Es steht zu dem Kriterium des hyperbolischen Falles, daß nämlich $\Sigma 1/(a^2+b^2+c^2+d^2)$ konvergiert in demselben Verhältnis, wie die beiden früheren Kriterien über die Konvergenz von $\Sigma 1/|cd|$ und $\Sigma 1/|(c^2+d^2)$.

§ 5. Bemerkungen über die quasikonformen Abbildungen.

Herr O. Teichmüller hat kürzlich gezeigt (Deutsche Mathematik, Bd. 2, S. 321), daß bei quasikonformer Abbildung, wo infinitesimale Kreise auf Ellipsen mit beschränkter Exzentrizität abgebildet werden, der Typus erhalten bleibt. Hierdurch ist es möglich, die Verzweigungspunkte unserer Riemannschen Fläche zu verschieben, ohne den Typus zu ändern. Aber man kann nun auch Knoten in den topologischen Bäumen einfügen. Denn die Fläche mit einem Verzweigungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung läßt sich durch die Substitution $r' = r$, $\varphi' = \varphi/n$ auf die einfache Ebene abbilden mit dem Dilatationsverhältnis n und man kann daher die Knoten auf einen einzigen zwischen zwei Abzweigungen reduzieren mit einer quasikonformen Abbildung. So ergibt sich insbesondere, daß die modulare Fläche aufgelockert werden kann durch Hinzufügung von Blättern mit einem einzigen Einschnitt, nur muß die Anzahl der Blätter, die man zwischen zwei Blätter mit je zwei Einschnitten schaltet, beschränkt sein. Wie Herr Ullrich auf Grund der Nevanlinnaschen Defektlehre gezeigt hat (diese Commentarii, Bd. 7, S. 63ff.) kann man durch starke Auflockerung des Baumes, bei der die Anzahl der Blätter, welche zwischen zwei Blätter der modularen Fläche eingeschaltet werden, ins Unendliche zunimmt, den parabolischen Fall erreichen.

Im folgenden möchte ich noch einen Satz beweisen, der die Lehre von den quasikonformen Abbildungen mit der Unterscheidung des reinen und gemischten hyperbolischen Typus in Verbindung zu bringen scheint.

Es sei $w = f(z)$ eine Funktion, welche das Innere des Einheitskreises der z-Ebene quasikonform auf das Innere des Einheitskreises der w-Ebene abbildet. Ferner seien die Dilatationsquotienten $< K$. Wir betrachten im Einheitskreis der z-Ebene einen konzentrischen Kreis vom Radius $R = 1 - \varepsilon$. Das Bild des Radius, der unter dem Winkel φ ausgeht, von $r = \frac{1}{2}$ an gerechnet, habe die Länge $L(\varphi)$, so daß gilt

$$\int_{\frac{1}{2}}^{R} \left|\frac{dw}{dz}\right| dr = L(\varphi) \quad , \quad z = r . e^{i\varphi} \quad , \quad dz \text{ in der Radiusrichtung.}$$

Offenbar hat das Bild des Kreisringes $\frac{1}{2} \leq |z| \leq R$ einen Flächeninhalt $< 2\pi$. Also haben wir die Ungleichung

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{R} \int_{0}^{2\pi} |\,\mathrm{Det.}(w, z)\,| \, r dr d\varphi < 2\pi \, , \text{ wo Det. die Funktionaldeterminante}$$

bedeutet. Nun ist

$$|\,\mathrm{Det.}\,(w, z)\,| > \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \cdot \frac{1}{K^2} \text{ für jede Richtung } dz \text{ in } z \, , \text{ also}$$

$$J > \int_{\frac{1}{2}}^{R} \int_{0}^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \cdot \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot dr\, d\varphi = \frac{1}{2K^2} \int_{\frac{1}{2}}^{R} \int_{0}^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dr\, d\varphi = \frac{1}{2K^2} \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}}^{R} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dr \quad .$$

Man setze $\left|\frac{dw}{dz}\right| - \frac{1}{R-\frac{1}{2}} L(\varphi) = g(z)$. Dann ist $\int_{\frac{1}{2}}^{R} g(z)\, dr = 0$ für jeden Radius. Also wird

$$\int_{\frac{1}{2}}^{R} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dr = \int_{\frac{1}{2}}^{R} \left(g(z) + \frac{1}{R-\frac{1}{2}} L(\varphi)\right)^2 dr = \int_{\frac{1}{2}}^{R} g^2(z)\, dr + \frac{1}{R-\frac{1}{2}} L^2(\varphi) \geqq \frac{L^2(\varphi)}{R-\frac{1}{2}} .$$

Es ergibt sich $4K^2\pi(R-\frac{1}{2}) \geqq \int_0^{2\pi} L^2(\varphi)\, d\varphi$. Also, da $R \leqq 1$,

$$2K^2\pi \geqq \int_0^{2\pi} L^2(\varphi)\, d\varphi \quad .$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß nur eine Nullmenge von Radien unendlich lange Bilder liefern darf, daß daher diese Bilder bis auf eine Nullmenge in bestimmten Punkten der Kreisperipherie enden. Ähnlich kann auch der Typensatz[2]) von Herrn Teichmüller bewiesen werden.

[2]) Vgl. zum Typensatz auch S. Kakutani, Jap. J. of Math., XIII, 1937, pg. 383.

(Eingegangen den 16. Februar 1938.)