Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique.
Autor: Besse, Jean
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11004

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique

Par Jean Besse, Zurich

1. L'ensemble ouvert et connexe le plus général peut-il être domaine d'existence d'une fonction analytique uniforme?

Plus précisément, étant donné un domaine connexe ouvert D dans le plan de la variable complexe z, existe-t-il toujours une fonction $f(z)$ régulière et uniforme dans D, dont *aucun* prolongement analytique ne puisse quitter le domaine D?

Weierstrass (1) l'avait affirmé sans démonstration. La seule démonstration exacte que nous connaissions a été donnée par *Runge* (2). Mais cette démonstration, qui utilise sa théorie de l'approximation par fonctions rationnelles, est, pour le problème qui nous occupe, inutilement compliquée.

D'autres savants, notamment *Mittag-Leffler* (3) (dont la démonstration est reproduite dans les traités de MM. *Osgood*, *Pringsheim* et *Bieberbach*) et M. *Pringsheim* (4), ont cru donner des démonstrations plus simples. Nous verrons cependant au § 4 que ces dernières sont insuffisantes.

2. C'est pourquoi nous reprenons la question et démontrons l'affirmation de *Weierstrass* en nous inspirant de la méthode de M. *Pringsheim*.

Supposons, ce qu'on peut toujours obtenir moyennant une transformation linéaire, que le point à l'infini du plan soit un point intérieur de D; la frontière F de D est alors un ensemble fermé et borné.

Nous appellerons un point frontière P de D „*bien visible*" s'il existe une circonférence C_P passant par P, telle que l'intérieur de cette circonférence appartienne entièrement à D.

Fixons-nous dès maintenant une série convergente quelconque à termes positifs:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A \;;$$

et soit une suite

$$z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n \quad \ldots$$

de points frontière „bien visibles".

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - z_n}$ est uniformément convergente dans tout domaine fermé intérieur à D, car, si δ est la distance du domaine fermé à F,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_n|} \leqq \frac{A}{\delta} \ .$$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n}$ est donc en tous cas une branche régulière et uniforme dans D d'une fonction analytique.

Considérons d'autre part un point „bien visible" z_k; $f(z)$ tend vers l'infini lorsque z s'approche de z_k suivant le rayon d'un cercle C_{z_k}. En effet, si z se trouve sur ce rayon, nous aurons

$$|z-z_k| < |z-z_n| \ , \quad k \neq n \ ;$$

soit $N > k$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{a_k}{2}$. $f(z)$ se décompose de la façon suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} = \frac{a_k}{z-z_k} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq k)}}^{N} \frac{a_n}{z-z_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} \ .$$

Le second terme étant régulier au voisinage de z_k, et restant par conséquent borné lorsque z tend vers z_k, nous avons

$$\begin{aligned} |f(z)| &> \frac{a_k}{|z-z_k|} - B - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_n|} \\ &> \frac{a_k}{|z-z_k|} - B - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_k|} \\ &> \frac{a_k}{2\,|z-z_k|} - B \ , \end{aligned}$$

expression tendant bien vers l'infini lorsque z s'approche de z_k. On ne pourra donc pas prolonger $f(z)$ au delà de D avec un élément (série de Taylor) dont le centre est aussi celui d'un cercle C_{z_k}.

3. Définissons une suite adéquate de z_n comme suit. Autour de chaque point rationnel ζ intérieur à D, nous construisons le plus grand cercle de centre ζ dont l'intérieur soit contenu dans D (ce cercle existe, F étant un ensemble fermé). La circonférence de ce cercle, contenant au moins un point de F, nous choisissons *un* point frontière sur cette circonférence (pour ne pas faire intervenir l'axiome de choix, on prendra *par exemple* sur chaque circonférence le point frontière $z = \zeta + \varrho\, e^{i\varphi}$ avec φ minimum ($0 \leqq \varphi < 2\pi$), car F est un ensemble fermé!). Si nous laissons de

côté ceux des points frontière ainsi construits qui se répètent, nous obtenons, en partant de l'ensemble dénombrable

$$\zeta_1 \quad \zeta_2 \ldots \zeta_m \ldots$$

des points rationnels de D, un ensemble dénombrable

$$z_1 \quad z_2 \ldots z_n \ldots$$

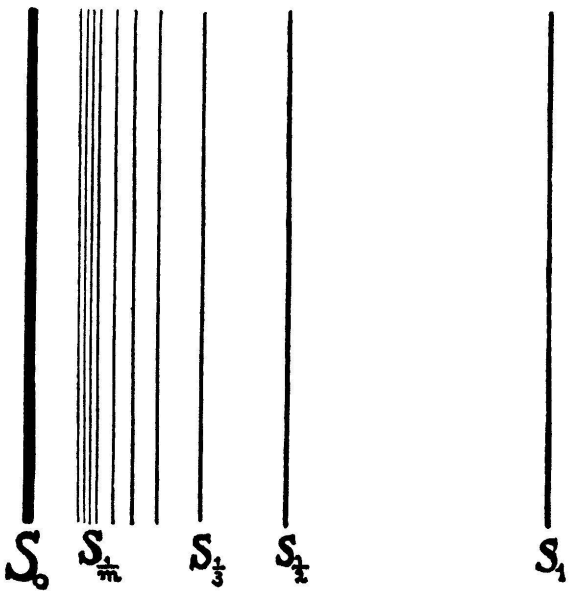
de points frontière. Remarquons que ces derniers sont tous „bien visibles" par construction.

Observons enfin avec *Poincaré* que tous les prolongements possibles de $f(z)$ hors du domaine D peuvent être obtenus par des éléments de centres rationnels.

Si donc on pouvait prolonger $f(z)$ hors de D, il y aurait un élément, de centre ζ_m par exemple, dont le cercle de convergence contiendrait une partie de F et par conséquent le point frontière „bien visible" z_n qui est par construction le plus rapproché de ζ_m. $f(z)$ tendrait alors vers l'infini lorsque z tend vers z_n sur le rayon $\zeta_m z_n$. z_n ne pourrait donc pas être intérieur au cercle de convergence de l'élément de centre ζ_m, d'où contradiction.

On ne peut donc pas prolonger $f(z)$ au-delà du domaine, ce qu'il fallait démontrer.

4. Nous allons voir maintenant que les démonstrations analogues de MM. *Pringsheim* (4) et *Zoretti* (5) présentent une lacune importante par le fait qu'elles n'exigent de l'ensemble des points frontière z_n, à l'approche desquels l'expression $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - z_n}$ tend vers l'infini, que la propriété d'être dense partout sur la frontière F; et qu'elles concluent en observant que, chaque point z_n étant singulier, chaque point frontière, point d'accumulation de z_n, est également singulier.



Oui, mais est-il singulier relativement à tout prolongement?

L'exemple suivant montrera que cela pourrait très bien ne pas être le cas. Prenons comme frontière F l'ensemble formé (voir la fig.; nous posons $z = x + iy$) des segments

$$S_1 \quad : \quad x = 1 \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

$$S_{\frac{1}{2}} \quad : \quad x = \frac{1}{2} \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{\frac{1}{m}} \quad : \quad x = \frac{1}{m} \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et du segment limite

$$S_0 \quad : \quad x = 0 \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq 1 \ .$$

Soit D le domaine ouvert, connexe, complémentaire de F.

Supposons que les z_n soient répartis partout denses sur chaque segment $S_{\frac{1}{m}}$, mais qu'il n'y en ait pas sur S_0 même. Les z_n sont bien partout denses sur F. Et les points de S_0 ne pourront certainement pas être franchis par un prolongement de $f(z)$ . . . si ce prolongement vient de droite. *Mais rien ne prouve qu'on ne puisse pas prolonger la fonction à travers S_0 selon un chemin arrivant de gauche*, et obtenir ainsi une autre branche de la fonction.

Le domaine D pourrait alors ne pas être domaine d'existence de la fonction construite sans précautions suffisantes.

La démonstration qui remonte à *Mittag-Leffler* (3) et qu'on retrouve dans les traités de MM. *Osgood* (6), *Pringsheim* (7) et *Bieberbach* (8) consiste à construire une fonction telle que la frontière de D soit l'ensemble des points d'accumulation de ses zéros. Elle est déjà mise en défaut par l'exemple d'un seul segment frontière S et de zéros situés seulement d'un côté de S. La fonction peut être prolongeable à travers S en venant de l'autre côté; la représentation conforme de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un segment nous permet d'en construire des exemples.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Weierstrass*, Oeuvres, Tome II, page 223.
2. *Runge*, Acta mathematica, Tome 6, pages 239—244.
3. *Mittag-Leffler*, Acta mathematica, Tome 4, pages 1—79.
4. *Pringsheim*, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Berlin 1932, Tome II, 2, pages 987—988.
5. *Zoretti*, Leçons sur le prolongement analytique, Paris 1911, pages 44—49.
6. *Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2me éd., 1912, Tome I, page 551.
7. *Pringsheim*, op. cit., pages 713—716.
8. *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 4me éd. 1934, Tome I, page 295.

(Reçu le 12 mai 1938.)