Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique.

Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique

Par Jean Besse, Zurich

1. L'ensemble ouvert et connexe le plus général peut-il être domaine d'existence d'une fonction analytique uniforme?

Plus précisément, étant donné un domaine connexe ouvert D dans le plan de la variable complexe z, existe-t-il toujours une fonction $f(z)$ régulière et uniforme dans D, dont *aucun* prolongement analytique ne puisse quitter le domaine D?

Weierstrass (1) l'avait affirmé sans démonstration. La seule démonstration exacte que nous connaissions a été donnée par *Runge* (2). Mais cette démonstration, qui utilise sa théorie de l'approximation par fonctions rationnelles, est, pour le problème qui nous occupe, inutilement compliquée.

D'autres savants, notamment *Mittag-Leffler* (3) (dont la démonstration est reproduite dans les traités de MM. *Osgood*, *Pringsheim* et *Bieberbach*) et M. *Pringsheim* (4), ont cru donner des démonstrations plus simples. Nous verrons cependant au § 4 que ces dernières sont insuffisantes.

2. C'est pourquoi nous reprenons la question et démontrons l'affirmation de *Weierstrass* en nous inspirant de la méthode de M. *Pringsheim*.

Supposons, ce qu'on peut toujours obtenir moyennant une transformation linéaire, que le point à l'infini du plan soit un point intérieur de D; la frontière F de D est alors un ensemble fermé et borné.

Nous appellerons un point frontière P de D „*bien visible*" s'il existe une circonférence C_P passant par P, telle que l'intérieur de cette circonférence appartienne entièrement à D.

Fixons-nous dès maintenant une série convergente quelconque à termes positifs:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A \;;$$

et soit une suite

$$z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n \quad \dots$$

de points frontière „bien visibles".

L'expression $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{z - z_n}$ est uniformément convergente dans tout domaine fermé intérieur à D, car, si δ est la distance du domaine fermé à F,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_n|} \leqq \frac{A}{\delta} .$$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n}$ est donc en tous cas une branche régulière et uniforme dans D d'une fonction analytique.

Considérons d'autre part un point „bien visible" z_k; $f(z)$ tend vers l'infini lorsque z s'approche de z_k suivant le rayon d'un cercle C_{z_k}. En effet, si z se trouve sur ce rayon, nous aurons

$$|z-z_k| < |z-z_n| , \quad k \neq n ;$$

soit $N > k$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{a_k}{2}$. $f(z)$ se décompose de la façon suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} = \frac{a_k}{z-z_k} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq k)}}^{N} \frac{a_n}{z-z_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{z-z_n} .$$

Le second terme étant régulier au voisinage de z_k, et restant par conséquent borné lorsque z tend vers z_k, nous avons

$$\begin{aligned} |f(z)| &> \frac{a_k}{|z-z_k|} - B - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_n|} \\ &> \frac{a_k}{|z-z_k|} - B - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{|z-z_k|} \\ &> \frac{a_k}{2\,|z-z_k|} - B , \end{aligned}$$

expression tendant bien vers l'infini lorsque z s'approche de z_k. On ne pourra donc pas prolonger $f(z)$ au delà de D avec un élément (série de Taylor) dont le centre est aussi celui d'un cercle C_{z_k}.

3. Définissons une suite adéquate de z_n comme suit. Autour de chaque point rationnel ζ intérieur à D, nous construisons le plus grand cercle de centre ζ dont l'intérieur soit contenu dans D (ce cercle existe, F étant un ensemble fermé). La circonférence de ce cercle, contenant au moins un point de F, nous choisissons *un* point frontière sur cette circonférence (pour ne pas faire intervenir l'axiome de choix, on prendra *par exemple* sur chaque circonférence le point frontière $z = \zeta + \varrho\, e^{i\varphi}$ avec φ minimum $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$, car F est un ensemble fermé!). Si nous laissons de

côté ceux des points frontière ainsi construits qui se répètent, nous obtenons, en partant de l'ensemble dénombrable

$$\zeta_1 \quad \zeta_2 \cdots \zeta_m \cdots$$

des points rationnels de D, un ensemble dénombrable

$$z_1 \quad z_2 \cdots z_n \quad \cdots$$

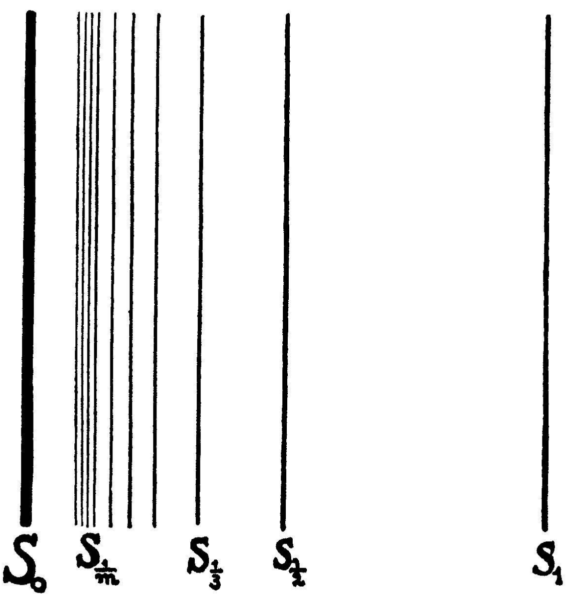
de points frontière. Remarquons que ces derniers sont tous „bien visibles" par construction.

Observons enfin avec *Poincaré* que tous les prolongements possibles de $f(z)$ hors du domaine D peuvent être obtenus par des éléments de centres rationnels.

Si donc on pouvait prolonger $f(z)$ hors de D, il y aurait un élément, de centre ζ_m par exemple, dont le cercle de convergence contiendrait une partie de F et par conséquent le point frontière „bien visible" z_n qui est par construction le plus rapproché de ζ_m. $f(z)$ tendrait alors vers l'infini lorsque z tend vers z_n sur le rayon $\zeta_m z_n$. z_n ne pourrait donc pas être intérieur au cercle de convergence de l'élément de centre ζ_m, d'où contradiction.

On ne peut donc pas prolonger $f(z)$ au-delà du domaine, ce qu'il fallait démontrer.

4. Nous allons voir maintenant que les démonstrations analogues de MM. *Pringsheim* (4) et *Zoretti* (5) présentent une lacune importante par le fait qu'elles n'exigent de l'ensemble des points frontière z_n, à l'approche desquels l'expression $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - z_n}$ tend vers l'infini, que la propriété d'être dense partout sur la frontière F; et qu'elles concluent en observant que, chaque point z_n étant singulier, chaque point frontière, point d'accumulation de z_n, est également singulier.



Oui, mais est-il singulier relativement à tout prolongement?

L'exemple suivant montrera que cela pourrait très bien ne pas être le cas. Prenons comme frontière F l'ensemble formé (voir la fig.; nous posons $z = x + iy$) des segments

$$
\begin{array}{llll}
S_1 & : & x = 1 & ; \quad 0 \leqq y \leqq 1 \\
S_{\frac{1}{2}} & : & x = \frac{1}{2} & ; \quad 0 \leqq y \leqq 1 \\
\dots & & & \\
S_{\frac{1}{m}} & : & x = \frac{1}{m} & ; \quad 0 \leqq y \leqq 1 \\
\dots & & &
\end{array}
$$

et du segment limite

$$S_0 \quad : \quad x = 0 \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq 1 \ .$$

Soit D le domaine ouvert, connexe, complémentaire de F.

Supposons que les z_n soient répartis partout denses sur chaque segment $S_{\frac{1}{m}}$, mais qu'il n'y en ait pas sur S_0 même. Les z_n sont bien partout denses sur F. Et les points de S_0 ne pourront certainement pas être franchis par un prolongement de $f(z)$ . . . si ce prolongement vient de droite. *Mais rien ne prouve qu'on ne puisse pas prolonger la fonction à travers S_0 selon un chemin arrivant de gauche*, et obtenir ainsi une autre branche de la fonction.

Le domaine D pourrait alors ne pas être domaine d'existence de la fonction construite sans précautions suffisantes.

La démonstration qui remonte à *Mittag-Leffler* (3) et qu'on retrouve dans les traités de MM. *Osgood* (6), *Pringsheim* (7) et *Bieberbach* (8) consiste à construire une fonction telle que la frontière de D soit l'ensemble des points d'accumulation de ses zéros. Elle est déjà mise en défaut par l'exemple d'un seul segment frontière S et de zéros situés seulement d'un côté de S. La fonction peut être prolongeable à travers S en venant de l'autre côté; la représentation conforme de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un segment nous permet d'en construire des exemples.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Weierstrass*, Oeuvres, Tome II, page 223.
2. *Runge*, Acta mathematica, Tome 6, pages 239—244.
3. *Mittag-Leffler*, Acta mathematica, Tome 4, pages 1—79.
4. *Pringsheim*, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Berlin 1932, Tome II, 2, pages 987—988.
5. *Zoretti*, Leçons sur le prolongement analytique, Paris 1911, pages 44—49.
6. *Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2me éd., 1912, Tome I, page 551.
7. *Pringsheim*, op. cit., pages 713—716.
8. *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 4me éd. 1934, Tome I, page 295.

(Reçu le 12 mai 1938.)