Über die Güte der Approximation einer reellen Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen.

Autor(en): **Blumer, Fritz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **10 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10988

Über die Güte der Approximation einer reellen Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen

(Untersuchungen zur Theorie der halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen II)

Von Fritz Blumer, Basel

Einleitung

Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Teil einer dreiteiligen Untersuchung über allgemeine Kettenbrüche dar[1]).

Es handelt sich dabei um die sog. halbregelmäßigen Kettenbrüche, d. h. um Kettenbrüche mit ganzzahligen Nennern, bei denen aber die Zähler nicht wie bei den gewöhnlichen oder regelmäßigen Kettenbrüchen durchwegs $+1$, sondern nach Belieben $+1$ oder -1 sein können. Solche halbregelmäßigen Kettenbrüche haben also die Gestalt

$$a_0 \pm \cfrac{1}{a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cdots\cdots}}} .$$

Den Kettenbruch, den wir erhalten, wenn wir einen Kettenbruch mit a_n abbrechen, bezeichnet man als den n-ten Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$.

Die Frage nach der Periodizität der halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten und nach der kürzesten Periode solcher Kettenbruchentwicklungen wird im ersten Teil behandelt. In dem vorliegenden zweiten Teil werden dagegen vor allem die Güte der Approximation einer Zahl durch ihre Näherungsbrüche untersucht. Der dritte Teil endlich befaßt sich mit dem Wachstum der Näherungsnenner.

Was die Güte der Approximation anbetrifft, so sind in dieser Beziehung schon eine Reihe von Resultaten für die Näherungsbrüche der

[1]) Der erste Teil erscheint unter dem Titel „Über die verschiedenen Kettenbruchentwicklungen beliebiger reeller Zahlen und die periodischen Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten“ in den Acta Arithmetica, der dritte Teil unter dem Titel „Über das Wachstum der Näherungsnenner halbregelmäßiger Kettenbrüche“ in einem spätern Heft der vorliegenden Zeitschrift. Doch sei ausdrücklich bemerkt, daß die vorliegende Abhandlung vollkommen unabhängig vom ersten Teil lesbar ist.

regelmäßigen Kettenbruchentwicklung bekannt. So hat Lagrange gezeigt, daß in einem regelmäßigen Kettenbruch für alle $n \geqq 1$

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2},$$

Vahlen, daß von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen mindestens für den einen

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q_n^2},$$

Borel, daß von drei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen mindestens für einen

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_n^2}$$

gilt. Hurwitz hat nachgewiesen, daß es dagegen für jedes $C > \sqrt{5}$ irrationale Zahlen ξ_0 gibt, für welche die Ungleichung

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{C Q_n^2}$$

nicht mehr durch unendlich viele Näherungsbrüche befriedigt werden kann. Weiter gibt Cahen für die Kettenbruchentwicklung nach nächsten Ganzen folgende Abschätzung an:

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{\sqrt{5}-1}{2Q_n^2}.$$

In unserm Fall hängen die Ergebnisse von der Einteilung der Indizes der gegebenen halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklung in zwei Klassen ab. Wir bezeichnen einen Index als *minimal*, wenn $a_n = 2$ und das Vorzeichen vor dem Teilbruch — 1 ist, sonst aber als *ausgezeichnet* — ausgezeichnete Indizes gibt es immer unendlich viele. Folgen sich mehrere minimale, resp. ausgezeichnete Indizes unmittelbar, so sprechen wir von einer *minimalen*, resp. *ausgezeichneten Sequenz*. Mit diesen Begriffen können wir unser Hauptergebnis folgendermaßen formulieren:

Ist n der i-te Index in einer minimalen Sequenz, so gilt

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{2+i}{Q_n^2};$$

ist n der i-te Index in einer ausgezeichneten Sequenz, so gilt

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{y_i}{Q_n^2},$$

wo sich die y_i *mit Hilfe der Rekursionsformel* $y_i = \dfrac{2y_{i-1}+1}{y_{i-1}+1}$ *aus* $y_1 = 2$ *berechnen lassen.* Die oben angegebenen Schranken sind die besten.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Ostrowski bestens danken; er hat auch diese Arbeit angeregt und mich bei ihrer Durchführung tatkräftig unterstützt.

LITERATUR

Borel, E.: Contribution à l'analyse arithmétique du continu. Journal de mathématiques 9, 1903.

Cahen, E.: Théorie des nombres, 2. Bd., 1924.

Charves: Démonstration de la périodicité des fractions continues, engendrées par les racines d'une équation du deuxième degré. Bulletin des sciences mathématiques 1, première partie, 1877.

Hurwitz, A.: Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. 39, 1891.

Lagrange, J. L.: Additions aux éléments d'algèbre d'Euler, 1798 Oeuvres VII, auch deutsch in Leonhardi Euleri opera omnia I, sowie in Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr. 103.

Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. 2. Auflage 1929.

Vahlen, K. Th.: Über Näherungswerte und Kettenbrüche. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 115, 1895 (ausführlich referiert bei Bachmann, Niedere Zahlentheorie, 1. Bd.).

Die angeführten Bücher und Arbeiten zitieren wir einfach mit der Angabe des Namens des Verfassers.

I. Untersuchung der Güte der Approximation einer Zahl durch ihre Näherungsbrüche

§ 1. Definitionen und einfachste Eigenschaften[2])

Unter einem *halbregelmäßigen Kettenbruch* versteht man einen Ausdruck von der Form

$$a_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{a_1 - \cfrac{\varepsilon_2}{a_2 - \cfrac{\varepsilon_3}{a_3 - \cdots}}} \qquad (1,1)$$

der den folgenden Bedingungen genügt:

[2]) Der größte Teil der hier angegebenen Definitionen und Eigenschaften ist schon in Kapitel I des ersten Teiles erwähnt worden.

A. a_n ganz, $\varepsilon_n = \pm 1$;

B. für $n \geqq 1$ $\quad a_n \geqq 1$ und $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 1$;

C. falls der Kettenbruch endlich ist und außer a_0 noch mindestens einen Teilnenner hat, so ist der letzte Teilnenner größer als 1; falls der Kettenbruch unendlich ist, ist unendlich oft $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$.

Einen solchen halbregelmäßigen Kettenbruch werden wir etwas bequemer schreiben, nämlich

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \frac{\varepsilon_3 |}{| a_3} - \cdots$$

$\frac{\varepsilon_n}{a_n}$ heißt der n-te *Teilbruch* oder das n-te *Glied*, ε_n der n-te *Teilzähler* und a_n der n-te *Teilnenner.*

Bricht man den Kettenbruch mit a_n ab, so erhält man den Ausdruck

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \cdots - \frac{\varepsilon_n |}{| a_n},$$

der nicht notwendig ein halbregelmäßiger Kettenbruch zu sein braucht. Wir bezeichnen den Wert dieses Ausdruckes mit $\frac{P_n}{Q_n}$, wo P_n und Q_n teilerfremde ganze Zahlen sind, die also durch diese Festlegung bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind. $\frac{P_n}{Q_n}$ nennt man den n-ten *Näherungsbruch*, P_n den n-ten *Näherungszähler* und Q_n den n-ten *Näherungsnenner.* Diese P_n und Q_n lassen sich nach folgenden Rekursionsformeln berechnen: Wir definieren

$$P_{-1} = 1, P_0 = a_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1 \tag{1,2}$$

und berechnen daraus der Reihe nach $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$ nach den Formeln

$$\begin{aligned} P_n &= a_n \, P_{n-1} - \varepsilon_n \, P_{n-2} \\ Q_n &= a_n \, Q_{n-1} - \varepsilon_n \, Q_{n-2} \, . \end{aligned} \tag{1,3}$$

Für diese P_n und Q_n gelten

$$P_n \, Q_{n-1} - P_{n-1} \, Q_n = \delta_n \tag{1,4}$$

oder

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\delta_n}{Q_n Q_{n-1}},$$

wo $\delta_n = \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n = \pm 1$ ist;

$$P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = a_n \delta_{n-1} . \tag{1,5}$$

Die Näherungsbrüche eines a priori gegebenen unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruches konvergieren gegen einen Wert η — *den Wert des Kettenbruches.* Bei einem endlichen Kettenbruch bezeichnet man den Wert des letzten Näherungsbruches als den Wert des Kettenbruches.

Zu einem solchen halbregelmäßigen Kettenbruch kommen wir z. B. auf folgende Weise. Gegeben sei eine reelle Zahl ξ. Wir setzen

$$\xi = \xi_0 = a_0 - \frac{\varepsilon_1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = a_1 - \frac{\varepsilon_2}{\xi_2},$$

allgemein

$$\xi_n = a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\xi_{n+1}}, \tag{1,6}$$

wo $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_n = \pm 1$, a_n ganz und für $n \geqq 1$ $\xi_n > 1$. Es läuft dies darauf hinaus, daß man, wenn ξ_n nicht ganz ist, für a_n eine der beiden ganzen Zahlen nimmt, zwischen denen ξ_n liegt; wenn aber ξ_n ganz ist, $a_n = \xi_n$ setzt. Dieses Verfahren setzt man unendlich oft fort, sofern nicht einmal $\xi_n = a_n$ wird, in welchem Falle man mit diesem a_n abbricht. Den auf diese Weise erhaltenen halbregelmäßigen Kettenbruch bezeichnen wir als eine *halbregelmäßige Kettenbruchentwicklung der Zahl ξ. Jeder halbregelmäßige Kettenbruch ist eine halbregelmäßige Kettenbruchentwicklung seines Wertes.*

Wir nennen ξ_n den n-ten *vollständigen Teilnenner* und $r_n = \frac{1}{\xi_n}$ den n-ten *Rest* der betreffenden Kettenbruchentwicklung. Aus der oben angegebenen Definition für ξ_n ergibt sich, daß

$$\xi_n = a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}|}{|a_{n+1}} - \frac{\varepsilon_{n+2}|}{|a_{n+2}} - \cdots$$

ist.

Aus (1,6) folgt sofort, daß

a) ξ_n zwischen a_n und $a_n - \varepsilon_{n+1}$ liegt.

Also liegt ξ_{n+1} zwischen a_{n+1} und $a_{n+1} - \varepsilon_{n+2}$, also sicher zwischen $a_{n+1} - 1$ und $a_{n+1} + 1$; daraus folgt weiter, daß

b) ξ_n zwischen $a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$ und $a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{a_{n+1} + 1}$ liegt.

Weiter benötigen wir die folgende Relation zwischen ξ_0 und ξ_n:

$$\xi_0 = \frac{\xi_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}}, \text{ wo } \xi_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2} \geqq 1 \text{ ist,} \tag{1,7}$$

oder nach ξ_n aufgelöst

$$\xi_n = \varepsilon_n \frac{\xi_0 Q_{n-2} - P_{n-2}}{\xi_0 Q_{n-1} - P_{n-1}}. \tag{1,8}$$

Über die Q_n haben wir in § 2 des ersten Teiles folgende einfache Aussagen bewiesen, die wir auch in diesem Teil bald gebrauchen werden:

c) für $n \geqq 0$ gilt $Q_n \geqq 1$ und $Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1} \geqq 1$

und

d) für $n \geqq 1$ und $a_n \geqq 2$ gilt $Q_n > Q_{n-1}$.

Wenn $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$ ist, so wollen wir den Index n als einen *ausgezeichneten*, wenn aber $a_n - \varepsilon_{n+1} = 1$ ist, als einen *minimalen Index* bezeichnen. Nach C in § 1 besitzt also ein unendlicher Kettenbruch immer eine unendliche Folge von ausgezeichneten Indizes. Wenn alle Indizes von n_0 bis n_1 (beide Indizes inklusive) ausgezeichnet, resp. minimal sind, so sprechen wir von der *ausgezeichneten*, resp. *minimalen Sequenz* $\langle n_0, n_1 \rangle$. Unter der *Länge einer Sequenz* verstehen wir die Anzahl ihrer Elemente, d. h. den Wert $n_1 - n_0 + 1$. Wiederum nach C in § 1 ist die Länge minimaler Sequenzen immer beschränkt.

§ 2. Allgemeine Formeln und zweiter Beweis der Konvergenz der Folge der Näherungsbrüche[3])

Wir leiten zunächst die folgenden allgemeinen Formeln ab:

$$\text{für } n \geqq 1 \text{ gilt } |\xi_0 Q_n - P_n| = r_1 r_2 \ldots r_{n+1}\,{}^{4)}; \tag{2,1}$$

[3]) Den ersten Beweis findet man in § 3 des ersten Teiles.

[4]) Aus (2,1) folgt die schon im ersten Teil in (2,4) erwähnte Relation $|\xi_0 Q_{n-1} - P_{n-1}| > |\xi_0 Q_n - P_n|$ für $n \geqq 1$; darüber hinaus ergibt sich aber noch die folgende Beziehung:

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{r_{n+1} Q_{n-1}}{Q_n} \cdot \left|\xi_0 - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| \quad \text{für } n \geqq 1$$

oder also:

$$\text{Wenn } \frac{r_{n+1} Q_{n-1}}{Q_n} > 1 \text{ ist, so gilt } \left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\xi_0 - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|.$$

Damit übrigens $\frac{r_{n+1} Q_{n-1}}{Q_n} \geqq 1$ ist, muß notwendig $\frac{Q_{n-1}}{Q_n} > 1$ sein, was, wie wir im dritten Teil sehen werden, nur möglich ist, wenn n ein singulärer Index ist.

für $n \geqq 1$ gilt $\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\varrho_n \delta_{n+1}}{Q_n^2}$, [5]) wo (2,2)

$$\frac{1}{\varrho_n} = \xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} > 0 \text{ und}$$

$$\delta_{n+1} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+1} = \pm 1 \text{ (siehe (1,4)) ist;}$$

für $n \geqq 1$ gilt $\varrho_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+2}}{\xi_{n+2}^2} \varrho_n + \frac{1}{\xi_{n+2}}$. [6]) (2,3)

Beweis von (2,1)*:* Aus (1,8), für $n + 1$ geschrieben, folgt, wenn man noch berücksichtigt, daß $\xi_{n+1} = \frac{1}{r_{n+1}}$ ist, $| \xi_0 Q_n - P_n | = r_{n+1} | \xi_0 Q_{n-1} - P_{n-1} |$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel erhält man $| \xi_0 Q_n - P_n | = r_{n+1} r_n \dots r_1 | \xi_0 Q_{-1} - P_{-1} |$, und da nach (1,2) $| \xi_0 Q_{-1} - P_{-1} | = 1$ ist, so ist damit (2,1) bewiesen.

Beweis von (2,2)*:* Unter Berücksichtigung von (1,7) und (1,4) gilt

$$\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\xi_{n+1} P_n - \varepsilon_{n+1} P_{n-1}}{\xi_{n+1} Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} =$$

$$= \frac{\xi_{n+1} P_n Q_n - \varepsilon_{n+1} P_{n-1} Q_n - \xi_{n+1} P_n Q_n + \varepsilon_{n+1} P_n Q_{n-1}}{(\xi_{n+1} Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1}) Q_n} =$$

$$= \frac{\delta_{n+1}}{\left(\xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right) Q_n^2} = \frac{\varrho_n \delta_{n+1}}{Q_n^2} .$$

$\varrho_n > 0$ gilt, weil der Nenner in (1,7) und nach § 1 C) auch Q_n für $n \geqq 1$ positiv sind.

---

[5]) Diese Formel findet man z. B. bei Cahen (S. 420).

Aus (2,2) folgt übrigens, da $\varrho_n > 0$ ist,

$$\delta_{n+1} = \operatorname{sign} \left(\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right),$$

und daraus, da nach (1,4) $\delta_{n+1} = \varepsilon_{n+1} \delta_n$ ist,

$$\operatorname{sign} \left(\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right) = \varepsilon_{n+1} \operatorname{sign} \left(\xi_0 - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right),$$

d. h. wenn $\varepsilon_{n+1} = -1$ ist, so liegen die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ und $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ auf ungleichen Seiten, ist aber $\varepsilon_{n+1} = +1$, auf der gleichen Seite von ξ_0.

[6]) Diese Relation (2,3) verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Heierle, der sie in seinen Untersuchungen über komplexe Kettenbrüche abgeleitet hatte. Doch hatte ich die für uns wichtige Folgerung § 2 a) schon vorher auf anderm Wege abgeleitet.

Beweis von (2,3)*:* Es ist

$$\varrho_{n+1} = \frac{1}{\xi_{n+2} - \varepsilon_{n+2}\dfrac{Q_n}{Q_{n+1}}} = \frac{1}{\xi_{n+2} - \dfrac{\varepsilon_{n+2}}{a_{n+1} - \xi_{n+1} + \xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\dfrac{Q_{n-1}}{Q_n}}}.$$

Nun ist nach (1,6) $a_{n+1} - \xi_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_{n+2}}{\xi_{n+2}}$ und nach (2,2)

$$\frac{1}{\varrho_n} = \xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\ ; \text{ also erhält man}$$

$$\varrho_{n+1} = \frac{1}{\xi_{n+2} - \dfrac{\varepsilon_{n+2}}{\dfrac{\varepsilon_{n+2}}{\xi_{n+2}} + \dfrac{1}{\varrho_n}}} = \frac{1}{\xi_{n+2} - \dfrac{\varrho_n\,\xi_{n+2}}{\varrho_n + \varepsilon_{n+2}\,\xi_{n+2}}} =$$

$$= \frac{\varrho_n + \varepsilon_{n+2}\,\xi_{n+2}}{\varepsilon_{n+2}\,\xi^2_{n+2}} = \frac{\varepsilon_{n+2}\,\varrho_n}{\xi^2_{n+2}} + \frac{1}{\xi_{n+2}}\ , \text{ w.z.b.w.}$$

Mit Hilfe der Formel (2,1) kann man den in § 3 des ersten Teiles erwähnten zweiten Beweis für die Konvergenz der Folge $\dfrac{P_n}{Q_n}$ erbringen.

Konvergenzbeweis für die Folge $\dfrac{P_n}{Q_n}$: [7])

[7]) Wir haben im ersten Teil (§ 3) betont, daß man bei diesem zweiten Konvergenzbeweis die Tatsache, daß $Q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$ gilt, nicht benötigt. Wir wollen nun in dieser Fußnote zeigen, daß man aus der Konvergenz der $\dfrac{P_n}{Q_n}$ schließen kann, daß für jeden unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch $Q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$ gilt. Wir beweisen zwar diese Behauptung in Kapitel I des dritten Teiles; aber dort erscheint unsere Behauptung als eine Folgerung aus einer Reihe an sich sehr wichtiger Resultate, so daß wir auf dem in dieser Fußnote begangenen Weg viel schneller zum Ziel gelangen. Wir benützen dabei eine Überlegung, die Herr Prof. Ostrowski im Fall komplexer Kettenbrüche angewandt hat, nämlich:

Wir nehmen an, in einem unendlichen Kettenbruch seien die Q_n, die zu einer gewissen unendlichen Teilfolge n_k der n gehören, beschränkt, d. h. es gelte $Q_{n_k} < M$ für alle n_k. Wir zeigen nun, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Nach dem oben Bewiesenen gilt $\dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}} \to \xi_0$ mit $k \to \infty$, d. h. also für $k \geqq K(\delta)$ gilt $\left|\xi_0 - \dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}\right| < \delta$. Daraus folgt $\left|\dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}\right| < |\xi_0| + \delta$ oder $|P_{n_k}| < (|\xi_0| + \delta)\,Q_{n_k} < (|\xi_0| + \delta)\,M$. Unter dieser Annahme muß also auch P_{n_k} beschränkt sein und $\dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}$ kann also nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Es muß also mindestens ein Wert $\dfrac{P}{Q}$ unendlich oft unter den $\dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}$ vorkommen, ja noch mehr, für $k \geqq k_1$ muß immer $\dfrac{P_{n_k}}{Q_{n_k}} = \dfrac{P}{Q}$ gelten, denn

Da nach § 1c) für $n \geqq 0$ $Q_n \geqq 1$ ist, so gilt nach (2,1)

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leqq r_1 \cdots r_{n+1} \ .$$

Ist der Kettenbruch endlich und ist $\frac{P_n}{Q_n}$ der letzte Näherungsbruch, dann ist $r_{n+1} = 0$ und es gilt also $\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} = 0$ oder also $\xi_0 = \frac{P_n}{Q_n}$. Ist der Kettenbruch unendlich, dann sind zunächst zwei Fälle möglich: entweder gilt mit $n \to \infty$ $\prod\limits_{\nu=1}^{n+1} r_\nu \downarrow 0$ oder $\prod\limits_{\nu=1}^{n+1} r_\nu \downarrow R > 0$[7*]). Im ersten Fall gilt wirklich $\frac{P_n}{Q_n} \to \xi_0$ mit $n \to \infty$. Der zweite Fall aber ist gar nicht möglich. Im zweiten Fall muß nämlich $r_n \to 1$ mit $n \to \infty$ gelten, d.h. z.B. für $n > N_0(\frac{1}{3})$ ist $1 > r_n > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Nun gilt nach (1,1) $\xi_n = a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\xi_{n+1}}$ oder also $a_n = \frac{1}{r_n} + \varepsilon_{n+1} r_{n+1}$. Man erhält also die folgenden Ungleichungen:

für $\varepsilon_{n+1} = +1$ gilt

$$1\tfrac{2}{3} < a_n < 2\tfrac{1}{2} \qquad (2,4)$$

für $\varepsilon_{n+1} = -1$ gilt

$$0 < a_n < \tfrac{5}{6} \ . \qquad (2,5)$$

Die Ungleichung (2,5) kann durch kein a_n erfüllt werden, die Ungleichung (2,4) durch $a_n = 2$. Es müßte also, wenn $\Pi r_\nu \downarrow R > 0$ gelten soll, für $n > N(\delta)$ immer $a_n = 2$ und $\varepsilon_{n+1} = +1$ sein, was nach der Eigenschaft C in § 1 unmöglich ist, w. z. b. w.

---

sonst müßte mindestens noch ein zweiter Wert $\frac{P'}{Q'}$ existieren, der auch von unendlich vielen $\frac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}$ angenommen würde. Das ist aber nicht möglich, weil in diesem Fall die konvergente Folge der $\frac{P_n}{Q_n}$ zwei unendliche konvergente Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten besäße. Also muß für $k \geqq k_1$ $\frac{P_{n_k}}{Q_{n_k}} = \frac{P}{Q} = \xi_0$ gelten. Nun ist aber für $k \geqq k_1$ $\xi_0 Q_{n_k} - P_{n_k} = \frac{P}{Q} Q - P = 0$, also muß nach (2,1) $r_1 r_2 \ldots r_{n_k+1} = 0$ sein, was nur möglich ist, wenn ein $r_\nu = 0$ ist. Dann wäre aber im Gegensatz zur Annahme die Kettenbruchentwicklung endlich, denn sobald ein $r_\nu = 0$ ist, bricht die Entwicklung ab. Damit ist gezeigt, daß die Annahme, die Q_{n_k} irgend einer unendlichen Teilfolge seien beschränkt, falsch war; damit ist aber unsere Behauptung $Q_n \to \infty$ bewiesen.

7*) Die Zeichen $\uparrow$, bezw. $\downarrow$ bedeuten die mit monotonem Wachsen bezw. monotonem Fallen verbundene Konvergenz.

Aus Formel (2,3) ergibt sich, daß $\varrho_{n+1} < \varrho_n + 1$ ist, und daraus

a) $\varrho_{n+k} < \varrho_n + k$ für $n \geqq 1$ und $k \geqq 1$.

Nach (2,1) und (2,2) ist

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{r_1 r_2 \cdots r_{n+1}}{Q_n} = \frac{\varrho_n}{Q_n^2},$$

woraus

$$\varrho_n = r_1 r_2 \ldots . r_{n+1} Q_n \tag{2,6}$$

folgt. Aus (2,6), für n und $n+1$ geschrieben, ergibt sich:

$$\varrho_{n+1} = \frac{Q_{n+1}}{Q_n} r_{n+2}\, \varrho_n \,. \tag{2,7}$$

In dem soeben hergeleiteten Beweis des Konvergenzsatzes haben wir gezeigt, daß in einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch $\prod_{\nu=1}^{n} r_\nu \downarrow 0$ mit $n \to \infty$ gilt. Somit folgt aus (2,1) und (2,6) sofort:

Satz I: In einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch gilt

$| \xi_0 Q_n - P_n | \downarrow 0$ *mit* $n \to \infty$ *oder*

$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| = o\left(\frac{1}{Q_n}\right)$[8] *und*

$\varrho_n = o(Q_n)$.

§ 3. Hilfsbetrachtungen

Wir wollen in diesem Paragraphen einige Tatsachen ableiten, die wir in den folgenden Paragraphen gebrauchen werden, um ϱ_n unter gewissen Bedingungen abschätzen zu können.

Für $\frac{1}{\varrho_n} - \xi_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ (siehe die Definition von $\frac{1}{\varrho_n}$ in (2,2)) können wir leicht eine bekannte Kettenbruchentwicklung[9]) herleiten. Da nämlich allgemein $\frac{Q_\nu}{Q_{\nu-1}} = a_\nu - \varepsilon_\nu \frac{Q_{\nu-2}}{Q_{\nu-1}}$ ist, so gilt

$$\frac{1}{\varrho_n} - \xi_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}\frac{Q_{n-1}}{Q_n} = -\frac{\varepsilon_{n+1}|}{|a_n} - \frac{\varepsilon_n|}{|a_{n-1}} - \cdots - \frac{\varepsilon_2|}{|a_1} \,. \tag{3,1}$$

---

[8]) Unter $a_n = o(b_n)$ versteht man bekanntlich, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt. Der erste Teil des Satzes ist ein Spezialfall eines analogen Satzes über die Entwicklung komplexer Zahlen, den ich einer Mitteilung von Herrn Prof. Ostrowski verdanke.

[9]) Diese Kettenbruchentwicklung benützt z. B. Cahen (S. 427).

Es muß allerdings betont werden, daß der Kettenbruch in (3,1) kein halbregelmäßiger zu sein braucht. Bezeichnen wir nämlich den Kettenbruch in (3,1) mit

$$b_0 - \frac{i_1|}{|b_1} - \cdots - \frac{i_n|}{|b_n}, \text{ wo } i_\nu = \varepsilon_{n+2-\nu} \text{ und } b_\nu = a_{n+1-\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \cdots, n$$

ist, so gilt nach B in § 1 $b_\nu - i_\nu \geqq 1$, d. h. bei diesen Kettenbrüchen in (3,1) gibt es keine $\frac{+1}{1}$ - Glieder, dafür kann aber sehr wohl auf den Teilnenner 1 der Teilzähler $+1$ folgen.

Jetzt wollen wir eine Reihe von Kettenbrüchen abschätzen. Durch eine einfache Rechnung stellt man das Folgende fest:

a) Es sei $\xi_{n-1} = 2 - \frac{1}{\xi_n}$ und g eine ganze Zahl > 0. Dann gilt mit $\xi_n \lesseqqgtr 1 + \frac{1}{g}$ immer $\xi_{n-1} \lesseqqgtr 1 + \frac{1}{g+1}$, wo in den beiden Relationen entweder gleichzeitig das Gleichheitszeichen oder das gleiche Ungleichheitszeichen gilt.

Aus a) folgt sofort:

b) Es sei $\xi_0 = 2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|\xi_n}$, $\xi_n > 1$, wo also n gleich der Anzahl der Teilnenner 2 vor ξ_n ist. Dann gilt $\xi_0 < 1 + \frac{1}{n}$ (da $\xi_{n-1} < 1 + \frac{1}{1}$ ist) und allgemein mit $\xi_n \lesseqqgtr 1 + \frac{1}{g}$ gleichzeitig $\xi_0 \lesseqqgtr 1 + \frac{1}{g+n}$, wo in den beiden Relationen entweder gleichzeitig das Gleichheitszeichen oder das gleiche Ungleichheitszeichen gilt[10]).

Nun betrachten wir Kettenbrüche von der Form

$$\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|\xi}. \quad \text{Wir zeigen:}$$

c) Es sei $w_i(\xi) = \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|\xi}$, wo i die Anzahl

---

[10]) Da die in a) und b) angegebenen Beziehungen umkehrbar sind, so läßt sich eine Zahl ξ_0, die der Ungleichung $1 + \frac{1}{g} > \xi_0 > 1 + \frac{1}{g+1}$ genügt, in halbregelmäßige Kettenbrüche entwickeln, die mit einer minimalen Sequenz von der Länge l beginnen, wo l jeden der Werte 1, 2, ..., g annehmen kann.

der Glieder $\frac{1}{2}$ ist, mit denen der Kettenbruch $w_i(\xi)$ beginnt. Dann gilt für

$$\xi \lesseqgtr 1 + \frac{1}{g} \qquad w_i(\xi) \gtreqless \frac{(i+1)g+2i+1}{(i+2)g+2i+3} \; ,$$

wo in den beiden Relationen entweder die Gleichheitszeichen oder die entgegengesetzten Ungleichheitszeichen gelten.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß unsere Behauptung für $\xi_0(\xi)$ richtig ist. Es ist für $\xi = 1 + \frac{1}{g}$

$$w_0(\xi) = \frac{1}{3-\frac{1}{\xi}} = \frac{1}{3-\frac{1}{1+\frac{1}{g}}} = \frac{1}{3-\frac{g}{g+1}} = \frac{g+1}{2g+3} \; ,$$

für $\xi < 1 + \frac{1}{g}$ $\quad w_0(\xi) > w_0(1+\frac{1}{g})$ und für

$\xi > 1 + \frac{1}{g}$ $\quad w_0(\xi) < w_0(1+\frac{1}{g})$. Wir nehmen nun an, unsere Behauptung sei für $w_{i-1}(\xi)$ richtig, und zeigen dann, daß unsere Behauptung auch für $w_i(\xi) = \frac{1}{2-w_{i-1}(\xi)}$ richtig ist. Für $\xi = 1 + \frac{1}{g}$ gilt also $w_{i-1}(\xi) = \frac{ig+2i-1}{(i+1)g+2i+1}$, und damit

$$w_i(\xi) = \frac{1}{2-\frac{ig+2i-1}{(i+1)g+2i+1}} = \frac{(i+1)g+2i+1}{(i+2)g+2i+3} .$$

Ist dagegen $\xi > 1 + \frac{1}{g}$, also nach Annahme $w_{i-1}(\xi) < w_{i-1}(1+\frac{1}{g})$, so ist $w_i(\xi) < w_i(1+\frac{1}{g})$, und ist $\xi < 1 + \frac{1}{g}$, also nach Annahme $w_{i-1}(\xi) > w_{i-1}(1+\frac{1}{g})$, so ist $w_i(\xi) > w_i(1+\frac{1}{g})$, w.z.b.w.

Weiter wollen wir die Folge der Werte von der Form $\frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|1}$ berechnen und zwar, da es die Betrachtung vereinfacht, zunächst als Funktion eines variablen letzten Teilnenners, für den erst hinterher 1 gesetzt wird. Es gilt:

d) Es sei $z_k(z) = \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|z}$, wo k gleich der Anzahl der Glieder $\frac{1}{3}$ vor dem Glied $\frac{1}{z}$ ist, und $y_k(z) = \frac{1}{1 - z_k(z)}$. Dann gilt

$$y_k(z) = \frac{2y_{k-1}(z) + 1}{y_{k-1}(z) + 1} .$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= 3z - 1 \\
q_1(z) &= 2z - 1 \\
p_k(z) &= 2p_{k-1}(z) + q_{k-1}(z) \\
q_k(z) &= p_{k-1}(z) + q_{k-1}(z) = p_k(z) - p_{k-1}(z),
\end{aligned}$$

so gilt für $k \geqq 1$

$$y_k(z) = \frac{p_k(z)}{q_k(z)} .$$

Speziell gilt für $z = 1$

$$y_1(1) = \frac{2}{1}, \; y_2(1) = \frac{5}{3}, \; y_3(1) = \frac{13}{8}, \; y_4(1) = \frac{34}{21}, \cdots, \; y_k(1) < y_{k-1}(1)$$

und

$$y_k(1) \downarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ mit } k \to \infty .$$

Beweis: Da $z_k(z) = \frac{1}{3 - z_{k-1}(z)}$, so ist

$$y_k(z) = \frac{1}{1 - z_k(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3 - z_{k-1}(z)}} .$$

Andrerseits ist $y_{k-1}(z) = \frac{1}{1 - z_{k-1}(z)}$ oder $1 - z_{k-1}(z) = \frac{1}{y_{k-1}(z)}$.

Somit erhalten wir

$$y_k(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{y_{k-1}(z)}}} = \frac{2y_{k-1}(z) + 1}{y_{k-1}(z) + 1} .$$

Da $y_1(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|z} = \frac{3z - 1}{2z - 1}$ ist, so gilt $y_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}$. Nehmen wir nun an, die Behauptung $y_i(z) = \frac{p_i(z)}{q_i(z)}$ sei für alle $i \leqq k - 1$ richtig, dann gilt

$$\frac{p_k(z)}{q_k(z)} = \frac{2p_{k-1}(z)+q_{k-1}(z)}{p_{k-1}(z)+q_{k-1}(z)} = \frac{2\frac{p_{k-1}(z)}{q_{k-1}(z)}+1}{\frac{p_{k-1}(z)}{q_{k-1}(z)}+1} = \frac{2y_{k-1}(z)+1}{y_{k-1}(z)+1} = y_k(z)\,.$$

Da $y_1(z) = \frac{3z-1}{2z-1}$ ist, so gilt $y_1(1) = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir zeigen nun, daß aus $y_{k-1}(1) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad y_k(1) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ folgt. Es ist nämlich

$$y_k(z) = \frac{2y_{k-1}(1)+1}{y_{k-1}(1)+1} = 2 - \frac{1}{y_{k-1}(1)+1} > 2 - \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Damit können wir zeigen, daß $y_k(1) < y_{k-1}(1)$ gilt. Es ist

$$y_k(1) = 1 + \frac{y_{k-1}(1)}{y_{k-1}(1)+1} = y_{k-1}(1)\left(\frac{1}{y_{k-1}(1)} + \frac{1}{y_{k-1}(1)+1}\right) <$$

$$< y_{k-1}(1)\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{2}{3+\sqrt{5}}\right) = y_{k-1}(1)\,.$$

Die Folge der $y_k(1)$ ist also nach unten beschränkt und nimmt monoton ab, besitzt also einen Grenzwert y. Dieser Grenzwert y muß der Relation $y = 1 + \frac{1}{y+1}$ oder also $y^2 - y - 1 = 0$ genügen. Aus dieser Relation findet man $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, w. z. b. w.

§ 4. Allgemeine Abschätzung des Approximationsfehlers

Wir wollen in diesem Paragraphen obere Schranken herleiten für den Fehler, den man begeht, wenn man ξ_0 durch den n-ten Näherungsbruch approximiert.

Satz IIA: Für $n \geqq 1$ *gilt*

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{n+1}{Q_n^2}\,.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es halbregelmäßige Kettenbrüche, bei denen für die endliche Folge der aufeinanderfolgenden Indizes* $n = 1, 2, \ldots, N$, *wo* N *beliebig groß vorgegeben werden kann,*

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{n+1-\varepsilon}{Q_n^2}$$

gilt.

B) Für $n \geqq 1$ gilt $\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{2+i}{Q_n^2}$,

wo i angibt, der wievielte Index n in der betreffenden minimalen Sequenz ist; ist $a_n - \varepsilon_{n+1} \neq 1$, so wird $i = 0$ gesetzt. Es sei wiederum $\varepsilon > 0$. Dann gibt es halbregelmäßige Kettenbrüche, bei denen für eine gewisse unendliche Teilfolge der Indizes

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{2+i-\varepsilon}{Q_n^2}$$

gilt.

Beweis von A: Um eine obere Schranke für ϱ_n zu finden, müssen wir bloß eine obere Schranke für ϱ_1 bestimmen und auf diesen Wert § 2a) anwenden. Es ist wegen $a_1 - \varepsilon_2 \geqq 1$

$$\varrho_1 = \frac{1}{\xi_2 - \varepsilon_2 \frac{Q_0}{Q_1}} = \frac{1}{\xi_2 - \frac{\varepsilon_2}{a_1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 ,$$

also ist nach § 2 a) $\varrho_n < 2 + n - 1 = n + 1$.

Um die zweite Teilbehauptung von A) zu beweisen, betrachten wir den Kettenbruch

$$\xi_0 = a_0 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|\xi_{N+1}} ,$$

wo $\xi_{N+1} = 1 + \frac{1|}{|a_{N+2}} - \cdots$ mit $a_{N+2} > \frac{(N+1-\varepsilon)\,(N+1)}{\varepsilon} + 1$ ist und wo N gleich der Anzahl der Glieder $\frac{1}{2}$ vor $\frac{1}{\xi_{N+1}}$ ist. Wir behaupten, daß für diesen Kettenbruch

$$\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{n+1-\varepsilon}{Q_n^2} \text{ für } n \leqq N$$

gilt, d. h. also, daß für $0 < n \leqq N$ $\frac{1}{\varrho_n} = \xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} < \frac{1}{n+1-\varepsilon}$ ist. Nun ist nach (3,1)

$$\frac{1}{\varrho_n} - \xi_{n+1} = -\varepsilon_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = -\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} ,$$

wo der Kettenbruch aus n Gliedern $\frac{1}{2}$ besteht. Nach § 3b) hat dieser Kettenbruch den Wert $-2+(1+\frac{1}{n+1})=-\frac{n}{n+1}$. Schätzen wir nun noch $\xi_{n+1}=2-\frac{1|}{|2}-\cdots-\frac{1|}{|2}-\frac{1|}{|\xi_{N+1}}$ ab, wo der Kettenbruch mit einer minimalen Sequenz von der Länge $N-n$ beginnt. Da nun nach § 1b) ξ_{N+1} zwischen den Werten $1+\frac{1}{a_{N+2}-1}$ und $1+\frac{1}{a_{N+2}+1}$ liegt, so gilt $\xi_{N+1}<1+\frac{1}{a_{N+2}-1}$ und somit nach § 3b)

$$\xi_{n+1}<1+\frac{1}{a_{N+2}-1+N-n}<1+\frac{1}{\frac{(N+1-\varepsilon)\,(N+1)}{\varepsilon}+N-n}<$$

$$<1+\frac{1}{\frac{(n+1-\varepsilon)\;(n+1)}{\varepsilon}}=1+\frac{\varepsilon}{(n+1-\varepsilon)\;(n+1)}\;.$$

Also erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{\varrho_n}<1+\frac{\varepsilon}{(n+1-\varepsilon)\;(n+1)}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{\varepsilon}{(n+1-\varepsilon)\;(n+1)}<$$

$$<\frac{1}{n+1-\varepsilon}\,,\ \text{w.z.b.w.}$$

Beweis von B: Wir bezeichnen die ausgezeichneten Indizes einer bestimmten halbregelmäßigen Entwicklung der Reihe nach mit m_1, m_2, ... und zeigen, daß für $m_k \geqq 1$ $\varrho_{m_k}<2$ gilt. Nach (2,2) ist

$$\frac{1}{\varrho_{m_k}}=\xi_{m_k+1}-\frac{\varepsilon_{m_k+1}}{a_{m_k}-\frac{\varepsilon_{m_k}Q_{m_k-2}}{Q_{m_k-1}}}\,,$$

da $\frac{Q_{m_k}}{Q_{m_k-1}}=\frac{a_{m_k}Q_{m_k-1}-\varepsilon_{m_k}Q_{m_k-2}}{Q_{m_k-1}}=a_{m_k}-\varepsilon_{m_k}\frac{Q_{m_k-2}}{Q_{m_k-1}}$ ist. Ist $\varepsilon_{m_k+1}=-1$, so ist offenbar $\frac{1}{\varrho_{m_k}}>\xi_{m_k+1}>1$. Für $\varepsilon_{m_k+1}=+1$ ist $a_{m_k}\geqq 3$, da ja nach der Definition der ausgezeichneten Indizes in § 1 $a_{m_k}-\varepsilon_{m_k+1}\geqq 2$ ist. Ist dazu noch $\varepsilon_{m_k}=-1$, so ist

$$\frac{1}{\varrho_{m_k}}>\xi_{m_k+1}-\frac{1}{a_{m_k}}>1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\;;$$

ist dagegen $\varepsilon_{m_k}=+1$, so gilt nach B in § 1 $a_{m_k-1}\geqq 2$ und also nach § 1d) $Q_{m_k-1}>Q_{m_k-2}$. Somit finden wir

$$\frac{1}{\varrho_{m_k}}>\xi_{m_k+1}-\frac{1}{3-1}=\xi_{m_k+1}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\;.$$

Also ist wirklich sowohl für $\varepsilon_{m_k+1} = -1$ wie auch für $\varepsilon_{m_k+1} = +1$ $\varrho_{m_k} < 2$ und somit nach § 2a) $\varrho_{m_k+i} < 2 + i$.

Um die zweite Teilbehauptung von B zu beweisen, bestimmen wir zum vorgegebenen $1 > \varepsilon > 0$ die Zahl

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 - \varepsilon\right)} < \varepsilon$$

und betrachten dann den Kettenbruch, der folgendermaßen definiert ist: es sei $m_1 > \frac{3}{\varepsilon'} + 1$ und $m_k = k m_1$; im Kettenbruch haben sämtliche ε_ν den Wert $+1$, die a_ν die Werte 2 oder 3, wobei nur die $a_{m_k} = 3$ sind. Der Kettenbruch ist also periodisch und hat die Gestalt

$$2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|3} \cdots,$$

wo die Periode aus $m_1 - 1$ Teilnennern 2 und einem (letzten) Teilnenner 3 besteht. Wir zeigen, daß in diesem Kettenbruch für $0 \leqq i \leqq \frac{1}{\varepsilon} \left(< \frac{1}{\varepsilon'} < m_1\right)$

$$\left| \xi_0 - \frac{P_{m_k+i}}{Q_{m_k+i}} \right| > \frac{2 + i - \varepsilon}{Q^2_{m_k+i}}$$

gilt, d. h. daß $\frac{1}{\varrho_{m_k+i}} < \frac{1}{2 + i - \varepsilon}$ ist.

Nach (2,2) ist

$$\frac{1}{\varrho_{m_k+i}} = \xi_{m_k+i+1} - \varepsilon_{m_k+i+1} \frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}}.$$

Wir schätzen nun ξ_{m_k+i+1} und $-\varepsilon_{m_k+i+1} \frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}} = -\frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}}$ einzeln nach oben ab. Es ist

$$\xi_{m_k+i+1} = a_{m_k+i+1} - \frac{\varepsilon_{m_k+i+2}|}{|a_{m_k+i+2}} - \cdots - \frac{\varepsilon_{m_{k+1}-1}|}{|a_{m_{k+1}-1}} - \frac{\varepsilon_{m_{k+1}}|}{|a_{m_{k+1}}} - \cdots =$$

$$= 2 - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \cdots,$$

wo der Kettenbruch also mit einer minimalen Sequenz von der Länge $m_{k+1} - (m_k + i + 1) = m_1 - i - 1$ beginnt. Nach § 3b) ist also

$$\xi_{m_k+i+1} < 1 + \frac{1}{m_1 - i - 1}.$$

Andererseits ist nach (3,1)

$$\frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}} = \frac{1|}{|a_{m_k+i}} - \frac{\varepsilon_{m_k+i}|}{|a_{m_k+i-1}} - \cdots - \frac{\varepsilon_{m_k+2}|}{|a_{m_k+1}} - \frac{\varepsilon_{m_k+1}|}{|a_{m_k}} - \cdots =$$
$$= \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|\eta},$$

wo also der Kettenbruch mit $m_k + i + 1 - (m_k + 1) = i$ Gliedern $\frac{1}{2}$ beginnt und wo nach § 3 b) $\eta < 1 + \frac{1}{m_1 - 1}$ gilt, da der Kettenbruch für η mit einer minimalen Sequenz von der Länge $m_1 - 1$ beginnt. Nach § 3 c) gilt also

$$\frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}} > \frac{(i+1)(m_1+1) + 2i + 1}{(i+2)(m_1+1) + 2i + 3}.$$

Aus den Abschätzungen für ξ_{m_k+i+1} und $\frac{Q_{m_k+i-1}}{Q_{m_k+i}}$ erhält man nun:

$$\frac{1}{\varrho_{m_k+i}} < 1 + \frac{1}{m_1 - i - 1} - \frac{(i+1)(m_1-1) + 2i + 1}{(i+2)(m_1-1) + 2i + 3}$$

$$= \frac{1}{i+2} + \frac{1}{m_1 - i - 1} + \frac{i+1}{i+2} - \frac{(i+1)(m_1-1) + 2i + 1}{(i+2)(m_1-1) + 2i + 3}$$

$$= \frac{1}{i+2} + \frac{1}{m_1 - i - 1} + \frac{1}{(i+2)\left[(i+2)(m_1-1) + 2i + 3\right]}$$

$$< \frac{1}{i+2} + \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon'}} + \frac{1}{2\left[2 \cdot \frac{3}{\varepsilon'} + 3\right]}$$

$$< \frac{1}{i+2} + \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{12} < \frac{1}{i+2} + \varepsilon'$$

$$= \frac{1}{i+2} + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 - \varepsilon\right)} < \frac{1}{i+2} + \frac{\varepsilon}{(i+2)(i+2-\varepsilon)}$$

$$= \frac{1}{i+2-\varepsilon}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ 5. Abschätzung des Approximationsfehlers bei ausgezeichneten Sequenzen

In diesem Paragraphen wollen wir den Fehler bei der Approximation einer Zahl ξ_0 durch ihre Näherungsbrüche unter der Voraussetzung, daß gewisse Indizes ausgezeichnet sind, abschätzen. Es gilt:

Satz III: Sind $n, n-1, \ldots, n-k+1$ ausgezeichnet, so gilt

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{y_k}{Q_n^2},$$

wo sich die y_k nach der Rekursionsformel

$$y_k = \frac{2\,y_{k-1} + 1}{y_{k-1} + 1}$$

aus $y_1 = 2$ berechnen lassen [11]).

Es sei ferner $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dann gibt es halbregelmäßige Kettenbrüche mit dem Wert ξ_0, bei denen für eine gewisse unendliche Teilfolge der ausgezeichneten Indizes, die in der betreffenden ausgezeichneten Sequenz an k-ter Stelle stehen

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \frac{y_k - \varepsilon}{Q_n^2}.$$

Beweis: Nach (2,2) gilt $\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{\varrho_n}{Q_n^2}$, wo $\frac{1}{\varrho_n} = \xi_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ ist. Da nach § 1c) $\frac{Q_{n-1}}{Q_n} > 0$ ist, so ist $\frac{1}{\varrho_n} > 1 - \frac{1}{s_1}$, wo s_1 eine positive untere Schranke der Werte von $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ in den Kettenbrüchen mit $\varepsilon_{n+1} = +1$ ist (denn für $\varepsilon_{n+1} = +1$ gilt ja $\frac{1}{\varrho_n} > 1$). Da nun n ausgezeichnet ist, d. h. da $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$ ist, so gilt $a_n \geqq 3$ und, da $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_n - \varepsilon_n \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ ist, so kann man $s_1 \geqq 3 - \frac{1}{s_2}$ setzen, wo s_2 eine

---

[11]) Diese y_k sind identisch mit den $y_k(1)$ in § 3d). Sie lassen sich also auch mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} p_k &= 2p_{k-1} + q_{k-1} \\ q_k &= p_{k-1} + q_{k-1} = p_k - p_{k-1} \end{aligned}$$

aus $p_1 = 2$, $q_1 = 1$ ausrechnen, indem man $y_k = \frac{p_k}{q_k}$ setzt.

positive untere Schranke der Werte von $\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$ in den Kettenbrüchen mit $\varepsilon_n = +1$ ist. Allgemein: Ist s_ν für $\nu \leqq k$ eine positive untere Schranke der Werte von $\frac{Q_{n-\nu+1}}{Q_{n-\nu}} = a_{n-\nu+1} - \varepsilon_{n-\nu+1}\frac{Q_{n-\nu-1}}{Q_{n-\nu}}$ in den Kettenbrüchen mit $\varepsilon_{n-\nu+2} = +1$, so kann $s_\nu \geqq 3 - \frac{1}{s_{\nu+1}}$ gesetzt werden, wo $s_{\nu+1}$ eine positive untere Schranke der Werte von $\frac{Q_{n-\nu}}{Q_{n-\nu-1}}$ in den Kettenbrüchen mit $\varepsilon_{n-\nu+1} = +1$ ist. So finden wir

$$\frac{1}{\varrho_n} > 1 - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|s_{k+1}} = 1 - z_k(s_{k+1}),$$

wo s_{k+1} eine positive untere Schranke der Werte von $\frac{Q_{n-k}}{Q_{n-k-1}}$ in den Kettenbrüchen mit $\varepsilon_{n-k+1} = +1$ ist. Obgleich $n-k$ nicht mehr ausgezeichnet ist, so ist nach der Eigenschaft B) in § 1 immer noch $a_{n-k} \geqq 2$ und also nach § 1 d) $\frac{Q_{n-k}}{Q_{n-k-1}} > 1$, so daß wir also $s_{k+1} = 1$ setzen dürfen und somit

$$\frac{1}{\varrho_n} > 1 - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|1} = 1 - z_k(1)$$

oder also

$$\varrho_n < \frac{1}{1 - z_k(1)} = y_k(1)$$

erhalten, wobei wir in Satz III für $y_k(1)$ kurz y_k setzten, w.z.b.w.

Nun zeigen wir, daß dieses y_k auch die beste allgemeine Schranke für ϱ_n ergibt, wenn n der k-te Index in einer ausgezeichneten Sequenz ist. Es genügt einen entsprechenden Kettenbruch aufzustellen, für den $\varrho_n > y_k - \varepsilon$ gilt, wo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist.

Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst eine ganze Zahl g_1 derart, daß $g_1 > \frac{2}{\varepsilon'}$ gilt, wo $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{y_k(1)\,(y_k(1) - \varepsilon)}$ $\left(< \varepsilon,\right.$ weil $\frac{\varepsilon}{y_k(1)\,(y_k(1)-\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{1}{2}\right)} \left.< \varepsilon\right)$ und eine zweite ganze Zahl g_2 derart, daß für alle $g > g_2$ $z_k(1 + \frac{1}{g}) > z_k(1) - \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Daß ein solches g_2 bestimmt werden kann, folgt aus der Stetigkeit von $z_k(z)$ für $z = 1$. Ferner wählen wir eine Zahl m so, daß sowohl $m > g_1 + k$ als auch $m > g_2 + k$ gilt.

Jetzt definieren wir den folgenden Kettenbruch: Sämtliche ε_ν sind $+1$, die $a_\nu (\nu \geqq 1)$ haben die Werte 2 oder 3 und zwar gilt für alle ganzen $\mu \geqq 0$ und $i = 1, 2, \ldots, m-k$ $a_{\mu m+i} = 2$ und für $i = m-k+1, \ldots, m$ $a_{\mu m+i} = 3$. Der Kettenbruch ist also periodisch und hat die Gestalt

$$a_0 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|2} - \cdots,$$

wo die Periode aus $m-k$ Gliedern $\frac{1}{2}$ und k Gliedern $\frac{1}{3}$ besteht. Für diesen Kettenbruch wollen wir nun nachweisen, daß für alle $\mu \geqq 0$

$$\left| \xi_0 - \frac{P_{\mu m}}{Q_{\mu m}} \right| > \frac{y_k - \varepsilon}{Q_{\mu m}^2}$$

ist. — Nach (3,1) ist

$$\frac{1}{\varrho_{\mu m}} - \xi_{\mu m+1} = -\frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} \cdots,$$

wo die Länge der ausgezeichneten Sequenz am Anfang k, die der darauffolgenden minimalen Sequenz $m-k$ beträgt. Wir können also den Kettenbruch auf der rechten Seite nach der Definition in § 3d) auch mit $-z_k(z_0)$ bezeichnen, wo für

$$z_0 = 2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \cdots$$

nach § 3b) $z_0 < 1 + \frac{1}{m-k}$ gilt. Nun haben wir $m > g_2 + k$ gewählt, so daß also $z_0 < 1 + \frac{1}{g_2}$ ist und damit nach Annahme

$$z_k(z_0) > z_k(1) - \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Andrerseits beginnt nun aber

$\xi_{\mu m+1} = 2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \cdots$ mit einer minimalen Sequenz von der Länge $m-k$, so daß also $\xi_{\mu m+1} < 1 + \frac{1}{m-k}$ ist. Da aber nach Annahme $m > g_1 + k$ und $g_1 > \frac{2}{\varepsilon'}$ ist, so gilt $\xi_{\mu m+1} < 1 + \frac{1}{g_1} < 1 + \frac{\varepsilon'}{2}$.

Wir finden also

$$\frac{1}{\varrho_{\mu m}} < 1 + \frac{\varepsilon'}{2} - z_k(1) + \frac{\varepsilon'}{2} = \frac{1}{y_k(1)} + \varepsilon'$$

oder

$$\varrho_{\mu m} > \frac{y_k(1)}{1 + \varepsilon' y_k(1)} > y_k - \varepsilon, \text{ w.z.b.w.}$$

Man kann sich nun noch fragen, ob man die oben angegebenen Schranken verbessern kann, wenn man auch noch eine gewisse Anzahl der auf $n(=\mu m)$ folgenden Indizes als ausgezeichnet voraussetzt. Das ist aber nicht der Fall. Denn um zu zeigen, daß unsere Schranken die besten sind, mußten wir einen Kettenbruch angeben, dessen $\xi_{n+1} (= \xi_{\mu m+1})$ möglichst nahe bei 1 war. Wir erreichten das dort, indem wir $\xi_{n+1} (= \xi_{\mu m+1})$ durch einen Kettenbruch, der mit einer genügend langen minimalen Sequenz begann, definierten. Das gleiche Ziel hätten wir aber auch erreicht, wenn wir $\xi_{n+1} = 1 + \frac{1\,|}{|\,a_{n+2}} - \frac{\varepsilon_{n+3}\,|}{|\,a_{n+3}} - \ldots$ mit einem genügend großen a_{n+2} angesetzt hätten. Daraus folgt, daß unsere Schranken auch die besten sind, wenn der Kettenbruch nur ausgezeichnete Indizes aufweist.

Setzen wir nun die speziellen Werte, die wir in § 3d) für die y_k ausgerechnet haben, in den Satz III ein, so erhalten wir das

Korollar zu Satz III: Ist $n \geqq 1$ ausgezeichnet, so gilt

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{2}{Q_n^2} ;$$

sind $n \geqq 2$ und $n-1$ ausgezeichnet, so gilt

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{5}{3 Q_n^2} ;$$

sind $n \geqq 3$, $n-1$ und $n-2$ ausgezeichnet, so gilt

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{13}{8 Q_n^2} .$$

Sind alle Indizes ausgezeichnet, so gilt

$$\left| \xi_0 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{y_n}{Q_n^2} .$$

§ 6. Zweiter Beweis einer schon früher bewiesenen Tatsache

Wir haben im ersten Teil in § 9 das folgende, für das ganze Kapitel III des ersten Teiles äußerst wichtige Korollar aus Satz IX hergeleitet:

Unter den vollständigen Teilnennern ξ_n einer beliebigen, aber festen halbregelmäßigen Entwicklung einer quadratischen Irrationalität kommt stets ein bestimmter Zahlenwert Ξ unendlich oft vor.

In der Fußnote 16 des ersten Teiles haben wir einen zweiten Beweis dieses Korollars in Aussicht gestellt. Diesen zweiten Beweis wollen wir nun in diesem Paragraphen erbringen.

Beweis[12]: Die Zahl ξ_0, die wir in den halbregelmäßigen Kettenbruch $a_0 - \frac{\varepsilon_1|}{|a_1} - \dots$ entwickelt haben, genüge der quadratischen Gleichung

$$A_0\xi_0^2 + B_0\xi_0 + C_0 = 0, \tag{6,1}$$

wo A_0, B_0, C_0, ganze Zahlen sind. Wenden wir nun auf diese quadratische Gleichung die lineare Substitution (1,7) an, so erhalten wir, nachdem wir mit dem Nenner $\xi_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-1} \geqq 1$ multipliziert haben,

$$A_0(\xi_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2})^2 + B_0(\xi_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2})(\xi_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}) + C_0(\xi_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2})^2 = 0$$

oder anders geordnet

$$A_n\xi_n^2 + B_n\xi_n + C_n = 0, \text{ wo} \tag{6,2}$$

$$A_n = A_0P_{n-1}^2 + B_0P_{n-1}Q_{n-1} + C_0Q_{n-1}^2 \tag{6,3}$$

$$B_n = -2\varepsilon_n A_0 P_{n-1}P_{n-2} - \varepsilon_n B_0(P_{n-1}Q_{n-2} + P_{n-2}Q_{n-1}) - 2\varepsilon_n C_0 Q_{n-1}Q_{n-2} \tag{6,4}$$

$$C_n = A_0P_{n-2}^2 + B_0P_{n-2}Q_{n-2} + C_0Q_{n-2}^2\,. \tag{6,5}$$

Vergleicht man (6,3) und (6,4), so findet man

$$C_n = A_{n-1}\,. \tag{6,6}$$

---

12) Die Überlegungen, die wir hier benützen, verlaufen analog den Überlegungen von Charves. Der Charves'sche Beweis für die Periodizität regelmäßiger Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten benützt nämlich in besonders expliziter Weise die Tatsache, daß für alle Näherungsbrüche der regelmäßigen Kettenbrüche ein quadratisches Näherungsgesetz vom Typus $\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{\varrho}{Q_n^2}$ (wo ϱ eine feste Zahl, nämlich 1, ist) gilt. Für unsere Betrachtung ist nun wesentlich, daß wir das Bestehen eines quadratischen Näherungsgesetzes für eine unendliche Teilfolge der Indizes benützen und daraus eine entsprechend abgeschwächte Folgerung ziehen.

Aus der invarianten Eigenschaft der Diskriminante einer quadratischen Form folgt unter Berücksichtigung von (1,4)

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (B_0^2 - 4A_0C_0)\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix}^2 = B_0^2 - 4A_0C_0\,. \tag{6,7}$$

$B_0^2 - 4A_0C_0$ ist sicher nicht Null, da ja sonst ξ_0 rational wäre. Daher können sicher nicht alle drei Größen A_n, B_n und C_n verschwinden, d. h. die Gleichung (6,2) kann keine identische sein.

Es genügt nun zu zeigen, daß die drei ganzen Zahlen A_n, B_n und C_n für eine gewisse unendliche Teilfolge der Indizes n, nämlich für die unendliche Teilfolge $m_k + 2$, wo m_k alle ausgezeichneten Indizes durchläuft, absolut genommen unter einer von n unabhängigen Schranke bleiben; denn ist dies der Fall, dann müssen notwendig unendlich viele ξ_n der gleichen Gleichung genügen und damit ist die Existenz unendlich vieler gleicher ξ_n nachgewiesen.

Nach Satz II B gilt $\varrho_{m_k} < 2$ und $\varrho_{m_k+1} < 3$. Ist aber $\varrho_\mu < 3$, so gilt nach (2,2) $\left|\xi_0 - \frac{P_\mu}{Q_\mu}\right| < \frac{3}{Q_\mu^2}$ oder also $\xi_0 - \frac{P_\mu}{Q_\mu} = -\frac{3\,\omega}{Q_\mu^2}$, wo $|\omega| < 1$ ist. Daraus ergibt sich

$$P_\mu = \xi_0 Q_\mu + \frac{3\,\omega}{Q_\mu}\,. \tag{6,8}$$

Setzen wir nun in (6,3), für $m_k + 2$ geschrieben, den aus (6,8) für $\mu = m_k + 1$ erhaltenen Wert für P_{m_k+1} ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{m_k+2} &= A_0\left(\xi_0 Q_{m_k+1} + \frac{3\,\omega}{Q_{m_k+1}}\right)^2 + B_0 Q_{m_k+1}\left(\xi_0 Q_{m_k+1} + \frac{3\,\omega}{Q_{m_k+1}}\right) + C_0 Q_{m_k+1}^2 \\ &= (A_0\xi_0^2 + B_0\xi_0 + C_0)Q_{m_k+1}^2 + 6\,\omega A_0\xi_0 + 3\,\omega B_0 + \frac{9\,\omega^2 A_0}{Q_{m_k+1}^2} \\ &< 6\,|A_0\xi_0| + 3\,|B_0| + 9\,|A_0|\,. \end{aligned}$$

Da nach (6,6) $C_{m_k+2} = A_{m_k+1}$ ist und da (6,8) auch für $\mu = m_k$ gilt, so bleibt auch C_{m_k+2} unter der gleichen Schranke. Ferner folgt aus (6,7) unter Berücksichtigung der soeben erhaltenen Schranken von A_{m_k+2} und C_{m_k+2} eine Schranke für B_{m_k+2}. Es ist $B_{m_k+2}^2 = 4A_{m_k+2}C_{m_k+2} + B_0^2 - 4A_0C_0$

$$< 4\,[6\,|A_0\xi_0| + 3\,|B_0| + 9\,|A_0|]^2 + |B_0^2 - 4A_0C_0|\,.$$

Damit haben wir den zweiten Beweis der obigen Behauptung erbracht.

(Eingegangen den 27. März 1937.)