Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.

Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale

Von Alexander Ostrowski, Basel

Einleitung

In der vorliegenden Mitteilung handelt es sich in erster Linie um eine Abschätzung des absoluten Betrages einer Determinante nach unten, die als ein Analogon der Ungleichung

$$|a+b| \geqq |a| - |b|$$

aufgefasst werden kann.

Sind nämlich $H = |h_{\mu\nu}|$, $M = |m_{\mu\nu}|$ zwei Determinanten n-ten Grades und sind alle $m_{\nu\nu}$ nicht negativ und alle $m_{\mu\nu} (\mu \gtrless \nu)$ nicht positiv, so folgt aus

$$|h_{\nu\nu}| \geqq m_{\nu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \leqq -m_{\mu\nu}, \qquad (\mu \gtrless \nu), \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots n$$

für gewisse Determinanten $M > 0$ stets

$$|H| \geqq M$$

Um alle Determinanten M mit dieser Eigenschaft charakterisieren zu können, wollen wir solche Determinanten $M = |m_{\mu\nu}|$ mit nicht negativen $m_{\nu\nu}$ und nicht positiven $m_{\mu\nu}$ $(\mu \gtrless \nu)$, die mit allen Hauptminoren aller Ordnungen nicht negativ sind, als *M-Determinanten* bezeichnen. Ist der Wert einer M-Determinante nicht Null, also positiv, so nennen wir sie *eigentlich*, sonst *uneigentlich*. Dann gilt der

Satz I: *Es sei*

$$M = |m_{\mu\nu}|, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

eine Determinante mit

$$m_{\nu\nu} > 0, \quad m_{\mu\nu} \leqq 0, \quad (\mu \gtrless \nu), \quad M = |m_{\mu\nu}| > 0. \tag{2}$$

Notwendig und hinreichend, damit aus dem Bestehen der Relationen

$$|h_{\nu\nu}| \geqq m_{\nu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \leqq -m_{\mu\nu}, \quad (\mu \gtrless \nu) \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots n \tag{3}$$

für die Determinante $H = |h_{\mu\nu}|$ stets die Relation

$$|H| \geqq M \tag{4}$$

folgt, ist, daß M eine eigentliche M-Determinante ist.

Sind dann die Voraussetzungen (3) *erfüllt, so ist auch die Determinante* $|h^*_{\mu\nu}|$, *wo*

$$h^*_{\mu\mu} = |h_{\mu\mu}|, \quad h^*_{\mu\nu} = -|h_{\mu\nu}|, \quad (\mu \gtrless \nu)$$

gilt, eine eigentliche M-Determinante.

Sind aber dann überdies alle $h_{\mu\nu}$ *reell, so hat die Determinante* $H = |h_{\mu\nu}|$ *das Vorzeichen ihres Hauptdiagonalelementproduktes* $h_{11} \cdot h_{22} \cdots h_{nn}$.

Wir wollen im folgenden allgemein solche Determinanten $H = |h_{\mu\nu}|$, für die $H^* = |h^*_{\mu\nu}|$ mit

$$h^*_{\mu\mu} = h_{\mu\mu}, \quad h^*_{\mu\nu} = -|h_{\mu\nu}|, \quad (\mu \gtrless \nu)$$

eine M-Determinante ist, als *H-Determinanten* bezeichnen, und zwar *eigentlich*, wenn $H \neq 0$ ist, sonst *uneigentlich.*

Um die Fälle zu charakterisieren, in denen in der Relation (4) das Gleichheitszeichen gilt, sei folgendes vorausgeschickt:

Eine M-Determinante behält ihre M-Eigenschaft bei, wenn ihre Zeilen und Kolonnen in *gleicher Weise* umgeordnet werden, so daß also jedes Element der Hauptdiagonale in der Hauptdiagonalen bleibt. Eine solche Umordnung nennen wir mit *Frobenius* eine *kogrediente* Umordnung. Wenn nun eine Determinante D nach einer kogredienten Umordnung auf die Gestalt gebracht werden kann:

$$D = \begin{vmatrix} P & O \\ U & Q \end{vmatrix}, \tag{5}$$

wo P und Q quadratische Matrizen und O eine aus lauter Nullen bestehende Matrix ist, so nennt man D *zerfallend* oder *zerlegbar* oder *reduzibel.* Die Elemente der Matrix U haben dann offenbar keinen Einfluß auf den Wert von D. Solche Elemente einer reduziblen Determinante, die bei einer geeigneten Zerlegung dieser Determinante in die entsprechende Matrix U hineinkommen, nennen wir *akzessorische* Elemente dieser Determinante. Unter Benutzung dieser Bezeichnung läßt sich nunmehr zeigen:

Zusatz zu Satz I: *Notwendig und hinreichend, damit unter den Voraussetzungen des Satzes I zugleich mit* (3)

$$|H| = M \tag{6}$$

gilt, ist, daß H aus M durch Multiplikation der Zeilen und Kolonnen mit geeigneten Größen vom absoluten Betrag 1 und eine willkürliche Abänderung der akzessorischen Elemente hervorgeht.

Unser Beweis dafür, daß die Bedingung des Satzes I hinreichend ist, beruht auf den beiden folgenden Sätzen, von denen der erste einige Eigenschaften der M-Determinanten, der zweite aber eine sehr bemerkenswerte Majorantenbeziehung zwischen den den Determinanten H und M des Satzes I entsprechenden linearen Gleichungen formuliert.

Satz II: *Alle adjungierten Unterdeterminanten* (n-1)*-ter Ordnung einer M-Determinante sind nicht negativ. Vergrößert man einige Elemente einer M-Determinante, doch so, daß sie ihre Vorzeichen nicht ändern, so bleibt sie eine M-Determinante und ihr Wert wird nicht kleiner.*

Ist $M = |m_{\mu\nu}|$ eine eigentliche M-Determinante, so sind alle Hauptminoren aller Ordnungen von M positiv und jedes Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots n \tag{7}$$

mit nicht negativen a_μ ist mit nicht negativen x_ν auflösbar.

Über das eventuelle Verschwinden einiger x_ν in den Gleichungen (7) gibt Auskunft der folgende

Zusatz zu Satz II: *Es sei $|m_{\mu\nu}|$ eine eigentliche M-Determinante. Verschwindet für nicht durchweg verschwindende a_μ im Lösungssystem von* (7) *ein x_κ, so verschwindet auch das zugehörige a_κ. Durchläuft κ die Indizes aller verschwindenden x_ν, λ die Indizes aller nicht verschwindenden, also positiven x_ν, so verschwinden alle $m_{\mu\nu}$, deren Zeilenindex eines der κ und Kolonnenindex eines der λ ist, so daß dann M reduzibel wird. Insbesondere sind alle adjungierten Unterdeterminanten* (n-1)*-ter Ordnung einer eigentlichen irreduziblen M-Determinante positiv.*

Satz III: *Unter den Voraussetzungen des Satzes I sei M eine eigentliche M-Determinante und es gelte* (3). *Es seien $u_{\mu\nu}$, $v_{\mu\nu}$ die Elemente der zu M bezw. zu H reziproken Matrizen. Dann gilt*

$$|v_{\mu\nu}| \leqq u_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots n\,. \tag{8}$$

Betrachtet man die Gleichungssysteme

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu\,, \tag{9}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu} y_\nu = b_\mu\,, \tag{10}$$

in denen

$$|b_\mu| \leqq a_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \dots n \tag{11}$$

ist, so gilt[1])

$$|y_\nu| \leqq x_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \dots n. \tag{12}$$

Unter den obigen Sätzen hängt namentlich der Satz II enge zusammen mit einigen Sätzen von *Perron*[2]) und *Frobenius*[3]) über Matrizen mit nichtnegativen Elementen, deren wesentliche Teile sich bei unserer Herleitung mit ergeben.

Dem Beweis der Sätze I, II, III ist der § 1 gewidmet. Daß die Bedingung des Satzes I notwendig ist, wird in der Nr. 3 gezeigt, nachdem in den Nrn. 1 und 2 der Zusammenhang mit den Fragestellungen von Perron-Frobenius besprochen wird. Der Satz II wird in Nr. 4, der Satz III in Nr. 5 bewiesen. In Nr. 6 zeigen wir, daß das Kriterium von Satz I hinreichend ist, und leiten in Nr. 7 die restlichen Behauptungen des Satzes I her. Der Beweis des Zusatzes zum Satz I wird in den Nrn. 8, 9, 10 geführt.

Die Definitionseigenschaften einer M-Determinante bringen in einer etwas verklausulierten Form die Tatsache zum Ausdruck, daß bei einer solchen Determinante die Diagonalelemente in einem gewissen Sinne überwiegen.

---

1) Der Satz III berührt sich, wie ich nachträglich festgestellt habe, mit einem sehr bemerkenswerten Satz von *A. Pellet:* Des équations majorantes, Bull. Soc. Math. France, T. 37 (1909), pp. 93—101, der sich allgemeiner auf gewisse nichtlineare Gleichungssysteme bezieht. Spezialisiert man den Pelletschen Satz auf den Fall linearer Gleichungssysteme, so ergibt sich die Ungleichung (12), wobei allerdings *vorausgesetzt* wird, daß die y_μ nicht negativ sind. Versucht man aber die Pelletsche Skizze des Beweises seines Satzes auszuführen, so muß man dabei, wie es scheint, den Satz III in vollem Umfang benutzen und auf diese Weise läßt sich auch ein Beweis des Pelletschen Satzes vollständig durchführen. Bei der ungewöhnlichen Knappheit der Pelletschen Darstellung ist es leider sehr schwer, sich eine klare Rechenschaft von dem Beweis zu geben, der dem Autor vorgeschwebt haben mag. Es sei noch hinzugefügt, daß zur exakten Durchführung des Beweises eine gewisse Verallgemeinerung der Formulierung anscheinend nicht zu umgehen ist, indem man für die von *Pellet* ausdrücklich als *positiv* vorausgesetzten Größen

$$X_1^0, X_2^0, \dots\dots X_n^0$$

noch das Verschwinden zulassen muß.

Die im kürzlich erschienenen ungewöhnlich reichhaltigen Werk von *H. T. Davis:* The Theory of linear operators, The Principia Press, Bloomington, Indiana 1936, pp. 130—131 gemachte Angabe, der hier zitierte Satz von *Pellet* stände im wesentlichen schon bei *E. Lindelöf:* Demonstration élémentaire de l'existence des fonctions implicites, Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 23, 2me série (1899), dürfte auf einem Irrtum beruhen, da bei *Lindelöf* es sich um Potenzreihenmajoranten im Cauchyschen und Poincaréschen Sinne handelt.

2) Math. Ann. 64 (1907), pp. 47–52, 259–263.

3) Berliner Sitzungsber. (1908), pp. 471–476 (1909), pp. 514–518 (1912), pp. 456–477.

Dies läßt sich noch besser erkennen, indem man eine M-Determinante durch eine geeignete Transformation auf eine Form bringt, bei der das Überwiegen der Hauptdiagonalelemente in noch expliziteren Ungleichungen zum Ausdruck kommt.

Wir wollen nämlich eine Determinante $M = |m_{\mu\nu}|$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots n$, mit nicht negativen $m_{\nu\nu}$ und nicht positiven $m_{\mu\nu}$ $(\mu \gtrless \nu)$ als eine *Minkowskische Determinante* bezeichnen, wenn in ihr jede der Zeilensummen nicht negativ ist. Dann ist offenbar in jeder Zeile das Diagonalelement nicht kleiner als die Summe der absoluten Beträge aller übrigen Elemente der betreffenden Zeile. Sind in einer Minkowskischen Determinante alle Zeilensummen positiv, so nennen wir sie *eigentlich*, sonst *uneigentlich*.

Wir betrachten daneben allgemein solche Determinanten $H = |h_{\mu\nu}|$, bei denen die n-Größen

$$h_{\mu\mu} - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} |h_{\mu\nu}| = 2\,|h_{\mu\mu}| - \sum_{\nu=1}^{n} |h_{\mu\nu}| \tag{13}$$

nicht negativ sind. Solche Determinanten haben offenbar die Eigenschaft, daß, wenn

$$|h_{\nu\nu}| = m_{\nu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| = -\, m_{\mu\nu} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

gesetzt wird, die Determinante $|m_{\mu\nu}|$ eine Minkowskische wird. Sind insbesondere alle Ausdrücke (13) positiv, so ist die Determinante $|m_{\mu\nu}|$ eigentlich. Wir wollen nun Determinanten mit nicht negativen Ausdrücken (13) als *Hadamardsche Determinanten* bezeichnen und insbesondere als *eigentlich*, wenn alle Ausdrücke (13) positiv sind, sonst *uneigentlich*.

Für eigentliche Minkowskische Determinanten hat nun *Minkowski*[4]) bewiesen, daß ihre Werte positiv sind. Andererseits hat *A. A. Markoff*[5]) gezeigt, daß eine *unzerlegbare* Minkowskische Determinante dann und nur dann verschwindet, wenn ihre sämtlichen Zeilensummen verschwinden. (Ein Beweis des Markoffschen Satzes wird sich aus unseren späteren Über-

---

[4]) Göttg. Nachr. (1900), pp. 90—93. Ges. Abh. Bd. 1, pp. 316—317. Vgl. auch *H. Minkowski:* Diophantische Approximationen, Leipzig (1907), pp. 143—144. Ein weiterer Beweis findet sich bei *A. Besikovitch,* Journal der Physik.-Mathematischen Gesellschaft bei der Staatsuniversität von Permj, Bd. 1 (1918). Daselbst wird auch der auf das Gleichungssystem (7) bezügliche Teil des Satzes II für den Fall der Minkowskischen Determinanten bewiesen.

Wie wir ferner nach Abschluß des Manuskriptes dem oben in der Fußnote [1]) zitierten Werk von *Davis* entnehmen, ist dieser Satz bereits lange vor Minkowski in der Note von *L. Levy:* Sur la possibilité de l'équilibre électrique, C. R. vol. 93,2 (1899) aufgestellt und bewiesen worden im wesentlichen mit dem gleichen Beweis wie der Minkowskische.

[5]) *A. A. Markoff,* Denkschr. Petersb. Akademie (8), 22,9 (1908).

legungen am Schlusse von Nr. 14 mit ergeben.) Für eigentliche Hadamardsche Determinanten hat *Hadamard*[6]) gezeigt, daß sie von Null verschieden sind.

Da ein Hauptminor einer Minkowskischen Determinante wiederum eine solche Determinante ist, folgt, daß eine Minkowskische Determinante zugleich eine M-Determinante ist. Dabei kann aber eine uneigentliche Minkowskische Determinante sehr wohl von Null verschieden, also eine eigentliche M-Determinante sein. Andererseits ist klar, daß, wenn man die Zeilen und Kolonnen einer M-Determinante mit beliebigen, positiven Faktoren multipliziert, sie eine M-Determinante bleibt.

Auf diese Weise läßt sich eine jede M-Determinante aus einer Minkowskischen Determinante erhalten. Es gilt etwas schärfer:

Satz IV: *Jede M-Determinante M läßt sich aus einer Minkowskischen Determinante M^* durch Multiplikation der Kolonnen von M^* mit geeigneten positiven Zahlen erhalten, wobei, wenn M eine eigentliche M-Determinante ist, sich M^* als eine eigentliche Minkowskische Determinante wählen läßt.*

Daraus folgt offenbar, wenn man die Definition der H-Determinanten berücksichtigt, daß genaue analoge Beziehungen zwischen den H-Determinanten und den Hadamardschen Determinanten bestehen.

Es sei nun M eine *uneigentliche* M-Determinante. Ist dann M^* irgend eine M vermöge des Satzes IV entsprechende Minkowskische Determinante, so müssen nach dem Markoffschen Satz bei einer der irreduziblen Komponenten von M^* alle Zeilensummen verschwinden. Da aber M offenbar in gleicher Weise zerfällt wie M^*, läßt sich also bei einer uneigentlichen M-Determinante eine ihrer irreduziblen Komponenten durch Multiplikation von Kolonnen mit geeigneten positiven Zahlen in eine Minkowskische Determinante mit durchweg verschwindenden Zeilensummen überführen. Und damit sind offenbar die uneigentlichen M-Determinanten vollständig charakterisiert.

Ist nun H eine uneigentliche H-Determinante, so sind auch alle irreduziblen Komponenten von H H-Determinanten und wenigstens eine unter ihnen verschwindet, ist also uneigentlich. Für irreduzible uneigentliche H-Determinanten H gilt nun die bemerkenswerte Tatsache, daß sie sich von der zugehörigen Determinante H^* nur um Zeilen- und Kolonnenfaktoren vom absoluten Betrag 1 unterscheiden. Noch schärfer gilt der Satz:

[6]) *J. Hadamard:* Leçons sur la propagation des ondes (1898—1899), Paris, Hermann & fils (1903), pp. 13—14.

Satz V: *Es sei $H = |h_{\mu\nu}|$ eine irreduzible uneigentliche H-Determinante und $M = |m_{\mu\nu}|$ eine uneigentliche M-Determinante, derart, daß die Relationen* (3) *erfüllt sind. Dann läßt sich H durch Multiplikation der Zeilen und Kolonnen mit Größen vom absoluten Betrag* 1 *in M überführen und M ist mit H^* identisch:*

$$m_{\mu\mu} = |h_{\mu\mu}|, \qquad m_{\mu\nu} = -|h_{\mu\nu}|, \qquad (\mu \gtrless \nu).$$

Aus dem Markoffschen Satz und dem Satz V folgt, daß auch eine uneigentliche Minkowskische oder Hadamardsche Determinante noch von Null verschieden bleibt, wenn *nur einer* der Ausdrücke (13) verschwindet, sofern nicht sämtliche Elemente der betreffenden Zeile gleich Null sind.

Die Abschätzung (4) des Satzes I gestattet offenbar, positive untere Grenzen für H zu finden, sobald solche für M bekannt sind. Andererseits lassen sich nach Satz IV M-Determinanten in Minkowskische Determinanten überführen.

Für eine Minkowskische Determinante $M = |m_{\mu\nu}|$ aber läßt sich die genaue Bestimmung der unteren und oberen Grenze durchführen, wenn alle Quotienten q_ν der Zeilensummen durch die entsprechenden Diagonalelemente gegeben sind. Die gleiche Bestimmung läßt sich zugleich, was namentlich für die Untersuchung der oberen Grenzen wesentlich ist, auch für Hadamardsche Determinanten durchführen.

Bei der Untersuchung der unteren und oberen Schranke einer Hadamardschen oder Minkowskischen Determinante darf man offenbar jede Zeile durch das zugehörige Diagonalelement durchdividieren, da eine Hadamardsche oder Minkowskische Determinante, in der ein Diagonalelement verschwindet, den Wert Null haben muß. Wir können uns daher bei der ins Auge gefaßten Untersuchung auf die Betrachtung der Determinanten vom Typus

$$H = \begin{vmatrix} 1 & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & 1 & \dots & h_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

beschränken, wobei jede der Summen

$$s_\nu = \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \nu}}^{n} |h_{\nu\kappa}| \tag{15}$$

höchstens gleich 1 ist.

Handelt es sich insbesondere um eine Minkowskische Determinante, so müssen alle Elemente $h_{\mu\nu}$ außerhalb der Hauptdiagonale in H als nicht positiv angenommen werden.

Bei der Untersuchung der Determinante (14) kann man weiter annehmen, daß die s_ν fallend geordnet sind:

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_n ,$$

da dies durch eine kogrediente Umformung sofort zu erreichen ist. Dann lautet unser Resultat:

Satz VI: *Sind bei einer Determinante* (14) *die Summen* (15) *gegeben, ist*

$$1 \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_n , \tag{16}$$

und setzt man ferner $n = 2m$ *bezw.* $n = 2m + 1$, *je nachdem ob* n *gerade oder ungerade ist, so gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{m}(1 - s_{2\nu-1}s_{2\nu}) \leqq |H| \leqq \prod_{\nu=1}^{m}(1 + s_{2\nu-1}s_{2\nu}) . \tag{17}$$

Sind aber die $h_{\mu\nu}$ *in* (14) *reell und nicht positiv, ist also* $H = M$ *eine Minkowskische Determinante, so gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{m}(1 - s_{2\nu-1}s_{2\nu}) \leqq |H| \leqq \prod_{\nu=1}^{m}(1 - s_1 s_2 \ldots s_n) . \tag{18}$$

Die unteren Schranken in den Abschätzungen (17), (18) *sind erreichbar für jedes den Relationen* (16) *genügende Wertsystem der* s_ν, *und zwar für gerade* n *für eine symmetrische Minkowskische Determinante. Ebenso sind die oberen Schranken in* (17), (18) *erreichbar, wobei insbesondere auch die obere Schranke in* (17) *für reelle* $h_{\mu\nu}$ *erreichbar ist und zwar für gerade* n *für eine schiefsymmetrische Determinante* H.

Aus dem Satz folgt offenbar, daß der Wert einer beliebigen Hadamardschen Determinante höchstens gleich dem Produkt der absoluten Beträge der Hauptdiagonalelemente multipliziert mit $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ist. Ist andererseits H eine H-Determinante, die den Relationen (3) genügt, wo M irgend eine M-Determinante ist, und führt man M durch Multiplikation der Kolonnen mit positiven Zahlen nach Satz IV in eine Minkowskische Determinante über, so wird H durch die gleiche Operation in eine Hadamardsche Determinante übergeführt. Dabei werden zugleich die Hauptdiagonalelemente von H mit den entsprechenden Kolonnenfaktoren multipliziert. Daher gilt für jede H-Determinante $|h_{\mu\nu}|$, μ, $\nu = 1, 2, \ldots n$ die Abschätzung

$$|H| \leqq 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{\nu=1}^{n} |h_{\nu\nu}| . \tag{19}$$

Dem Beweis des Satzes VI sind die Nrn. 15—19 des § 3 gewidmet. In der letzten, 20-ten Nr. von § 3 beweisen wir eine leichte Erweiterung des Satzes VI:

Zusatz zu Satz VI: *Werden in der Formulierung des Satzes VI die Relationen* (16) *ersetzt durch*

$$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_n, \qquad s_1 \cdot s_2 < 1, \tag{20}$$

so bleiben die Behauptungen des Satzes VI unverändert richtig.

Aus diesem Zusatz ergibt sich insbesondere von neuem, daß eine Minkowskische oder Hadamardsche Determinante auch dann von Null verschieden bleibt, wenn nur *eine* der Zeilensummen bezw. nur *eine* der Größen (13) verschwindet — sofern nicht sämtliche Elemente der entsprechenden Zeile gleich Null sind.

Für den absoluten Betrag der Hadamardschen Determinante vom Typus (14) finden sich in der Literatur bereits verschiedene, weniger scharfe Abschätzungen nach unten, die im Folgenden zusammengestellt sein mögen. Wir benützen dabei neben den Bezeichnungen (15) noch die folgenden:

$$\operatorname*{Max}_{\nu} s_\nu = s\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = S\,, \quad \operatorname*{Max}_{\nu \gtrless \mu} |h_{\mu\nu}| = b\,, \quad \sqrt{\sum_{\mu \gtrless \nu} |h_{\mu\nu}|^2} = \sigma\,. \tag{21}$$

Dann gilt:

$$|H| \geqq e^{S}(1-s)^{\frac{S}{s}}\,, \tag{22}$$

$$|H| \geqq \prod_{\nu=1}^{n}(1-s_\nu)\,, \tag{23}$$

$$|H| \geqq e^{\frac{\sigma^2}{s}}(1-s)^{\frac{\sigma^2}{s^2}} \tag{24}$$

$$|H| \geqq e^{\frac{b}{s}S}(1-s)^{\frac{b}{s}\frac{S}{s}}\,. \tag{25}$$

Endlich gilt unter der Annahme $\sigma < 1$ für die Determinante (14), wobei die Annahme $s_\nu < 1$ unnötig wird:

$$|H| \geqq e^{\sigma}(1-\sigma). \tag{26}$$

Unter diesen Ungleichungen rührt (22) von H. v. Koch her[7]), die übrigen vom Verfasser[8]).

Wegen $b \leqq s$ ist (22) in (25) enthalten und wegen $\sigma^2 \leqq bS$ enthält (24) die Ungleichung (25).

Es sei noch bemerkt, daß der im § 3 erbrachte Beweis des Satzes VI, des Hauptergebnisses dieser Arbeit, ohne Kenntnis der §§ 1, 2 gelesen werden kann.

---

[7]) *Helge von Koch,* Jahresber. d. D. Math.-Ver. XXII (1913), pp. 285—291.

[8]) *A. Ostrowski,* Bull. d. sciences math. (2) LXI (1937), pp. 1—32.

§ 1. Die Minoranteneigenschaft einer M-Determinante

1. Ist $M = |m_{\mu\nu}|$ eine Determinante n-ten Grades, für die die Bedingungen

$$m_{\nu\nu} \geqq 0, \qquad m_{\mu\nu} \leqq 0 \qquad (\mu \gtrless \nu),$$

erfüllt sind, so setzen wir für irgend ein $m \geqq \operatorname{Max}_{\nu} m_{\nu\nu}$:

$$m - m_{\nu\nu} = a_{\nu\nu}, \qquad - m_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}, \qquad (\mu \lessgtr \nu),$$

und bezeichnen die aus den nicht negativen Zahlen $a_{\mu\nu}$ gebildete Matrix mit A. Setzen wir dann allgemein

$$A(\lambda) = |\lambda E - A|,$$

wo E die Einheitsmatrix n-ten Grades ist, so ist offenbar

$$M = A(m).$$

Ist umgekehrt $A = (a_{\mu\nu})$ eine Matrix mit nicht negativen Elementen und $m \geqq \operatorname{Max}_{\nu} a_{\nu\nu}$, so ist die aus A gebildete Determinante

$$A(m) = |mE - A|$$

eine Determinante M mit den obigen Eigenschaften.

Ist nun M insbesondere eine M-Determinante, so ist leicht zu sehen, *daß $A(\lambda)$ ebenso wie alle Hauptminoren von $A(\lambda)$ aller Ordnungen für $\lambda > m$ positiv sind.*

In der Tat ist dies für Determinanten der Ordnung 1 trivial. Da alle Hauptminoren einer M-Determinante wiederum M-Determinanten sind, kann man annehmen, daß die obige Behauptung für alle Hauptminoren von $A(\lambda)$ richtig ist. Da aber $\frac{\partial A(\lambda)}{\partial \lambda}$ gleich einer Summe von Hauptminoren von $A(\lambda)$ ist, folgt, daß $\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} > 0$ für $\lambda > m$ ist, und da $A(m) = M$ nach Voraussetzung nicht negativ ist, ist die obige Behauptung allgemein bewiesen. Wir sehen also, *daß die einer M-Determinante entsprechende Funktion $A(\lambda)$ keine positive Wurzel $> m$ haben kann.*

2. Wir benötigen nun die folgende Tatsache über die Matrizen $A = (a_{\mu\nu})$ mit nicht negativen Elementen:

Ist die zu einer Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ mit nicht negativen Elementen gehörende Funktion $A(\lambda) = |\lambda E - A|$ für alle $\lambda > m$ positiv, so sind für $\lambda \geqq m$

alle adjungierten Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung von $A(\lambda)$ nicht negativ und für $\lambda > m$ alle Hauptminoren aller Ordnungen positiv.

Dieser Satz steckt in gewissen Resultaten, die man *Perron* und *Frobenius* verdankt. Aus einem Satz von *Perron* folgt nämlich, daß $A(\lambda)$ eine nicht negative „Maximalwurzel" r besitzt, so daß der absolute Betrag jeder anderen Wurzel von $A(\lambda)$ r nicht übertrifft. Anknüpfend an diese Tatsache hat nun *Frobenius* weitere Eigenschaften von $A(\lambda)$, in denen die obige Behauptung enthalten ist, bewiesen. Der Perronsche Beweis seines Satzes beruht auf gewissen Grenzbetrachtungen — im wesentlichen auf dem der Graeffeschen Methode zugrunde liegenden Konvergenzsatz. Frobenius hat den Perronschen Satz rein algebraisch bewiesen und auch alle weiteren Betrachtungen rein algebraisch durchgeführt. Man gelangt allerdings, wie uns scheint, zum obigen Satz auf dem kürzesten und natürlichsten Wege, wenn man noch weniger elementar als Perron vorgeht und die komplexe Funktionentheorie benutzt.

Entwickelt man nämlich die zur Matrix $\lambda E - A$ von $A(\lambda)$ gehörende reziproke Matrix nach Potenzen von $\frac{1}{\lambda}$, so ergibt sich die Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\lambda^{\nu+1}} \tag{2, 1}$$

in der n^2 Potenzreihenentwicklungen mit nicht negativen Koeffizienten zusammengefaßt sind.

Es sei nun ϱ der „Konvergenzradius" von (2, 1), also eine solche Zahl, daß für $\frac{1}{\lambda} < \varrho$ (2, 1) konvergiert, während für $\frac{1}{\lambda} > \varrho$ (2, 1) (d. h. eine der n^2 Komponenten von (2, 1)) stets divergiert. Daher folgt aus einem bekannten Satz über Potenzreihen mit nicht negativen Koeffizienten, daß $\frac{1}{\lambda} = \varrho$, also $\lambda = \frac{1}{\varrho}$ eine „Singularität" von (2, 1) (d. h. also von einer der n^2 in (2, 1) steckenden Potenzreihen) ist, während alle übrigen Singularitäten von (2, 1) außerhalb des Kreises oder auf dem Kreise $|\lambda| = \frac{1}{\varrho}$ liegen. Da aber die einzigen Singularitäten von (2, 1) die Nullstellen von $A(\lambda)$ sind, besitzt also $A(\lambda)$ eine nicht negative Maximalwurzel $\lambda = r$. Ist nun $A(\lambda)$ für alle $\lambda > m$ positiv, so muß $m \geqq r$ sein und daher ist die Entwicklung (2, 1) für $\lambda > m$ konvergent. Da aber die Elemente der Matrizen A^ν nicht negativ sind, sind für $\lambda > m$ die Elemente der zu $A(\lambda)$ reziproken Determinante und daher wegen $A(\lambda) > 0$ auch die adjungierten Unter-

determinanten $(n\text{-}1)$-ter Ordnung von $A(\lambda)$ nicht negativ. Und für $\lambda = m$ gilt die gleiche Behauptung aus Stetigkeitsgründen.
Entwickelt man nun $A(\lambda)$ für $\lambda > m$ nach den Elementen der μ-ten Zeile, so folgt, wenn $A_{\mu\nu}$ die adjungierten Minoren von $A(\lambda)$ sind,

$$A(\lambda) = (\lambda - a_{\mu\mu}) A_{\mu\mu} - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}} a_{\mu\nu} A_{\mu\nu} .$$

Da hier aber kein $A_{\mu\nu}$ negativ sein kann, ist $A_{\mu\mu}$ positiv, da sonst $A(\lambda)$ negativ oder Null wäre.

Nun ist aber $A_{\mu\mu} = A_{\mu\mu}(\lambda)$ eine zu $A(\lambda)$ analog gebildete Determinante, die zu einer Matrix $(n\text{-}1)$-ten Grades mit nicht negativen Elementen gehört. Und da $A_{\mu\mu}(\lambda)$ für alle $\lambda > m$ positiv ist, sind auch die Hauptminoren $(n-2)$-ter Ordnung von $A(\lambda)$ für $\lambda > m$ positiv. Indem wir diese Schlußweise weiter fortsetzen, sehen wir, daß alle Hauptminoren von $A(\lambda)$ für $\lambda > m$ positiv sind, womit die obige Behauptung vollständig bewiesen ist. — Offenbar folgt aus der obigen Behauptung, daß $A(\lambda)$ für $\lambda \geqq m$ eine M-Determinante ist.

An die so bewiesene Tatsache anknüpfend, ließen sich auch die übrigen Resultate von Perron und Frobenius unschwer ableiten. Doch soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

3. Mit Hilfe der oben bewiesenen Tatsache läßt sich nun leicht folgern, daß die Bedingung des Satzes I notwendig ist. Denn folgt für die Determinante M des Satzes I aus (3) stets (4), so setze man insbesondere für ein nicht negatives κ:

$$h_{\nu\nu} = \kappa + m_{\nu\nu}, \qquad h_{\mu\nu} = m_{\mu\nu}, \qquad (\mu \gtrless \nu).$$

Dann ist offenbar

$$H = A(m + \kappa) ,$$

und aus (4) folgt, daß $A(m+\kappa)$ für jedes $\kappa \geqq 0$ von Null verschieden ist, also positiv bleibt, da dies für $M = A(m)$ der Fall ist. Dann ist aber nach dem am Schlusse der letzten Nummer Bemerkten $A(\lambda)$ für $\lambda \geqq m$ eine M-Determinante und insbesondere auch $M = A(m)$.

4. Um aber zu beweisen, daß die Bedingungen des Satzes I auch hinreichend sind, müssen wir zunächst die Sätze II, III herleiten.

Was den Satz II anbetrifft, so ist er offenbar nur eine andere Formulierung des in der Nummer 2 bewiesenen Perron-Frobeniusschen Satzes. Denn schreibt man M wie in Nummer 1 in der Form $A(m)$, so sind alle adjungierten Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung von $A(m)$ nach dem Perron-Frobeniusschen Satze nicht negativ. Die Behauptung über das Gleichungssystem (7) des Satzes II ergibt sich dann offenbar aus den Cramerschen Formeln sofort.

Entwickelt man ferner M nach irgend einer Zeile, so folgt, daß der Wert von M eine nicht abnehmende Funktion der einzelnen Elemente ist, und dasselbe gilt natürlich auch für alle Hauptminoren von M. Vergrößert man also irgendwelche Elemente von M, so bleiben M und alle Hauptminoren aller Ordnungen von M nicht negativ. Ändern dabei die Elemente von M ihre Vorzeichen nicht, so bleibt M eine M-Determinante.

Ist ferner M eigentlich, also von Null verschieden, so gilt nach dem in Nummer 1 Gesagten dasselbe auch für $A(\lambda)$ für $\lambda \geqq m$ und es läßt sich ferner eine Zahl $m_0 < m$ finden, die so nahe bei m liegt, daß auch noch $A(\lambda)$ für $m_0 \leqq \lambda \leqq m$ von Null verschieden ist. Dann kann man im Perron-Frobeniusschen Satz m durch m_0 ersetzen, und es folgt insbesondere, daß alle Hauptminoren aller Ordnungen von $A(m)$ *positiv* sind.

Der in der Einleitung formulierte Zusatz zu Satz II ergibt sich aber fast unmittelbar direkt. Denn verschwindet ein x_κ in (7), so ist die linke Seite der κ-ten Gleichung in (7) nicht positiv, während a_κ nicht negativ ist. Daraus folgt einerseits, daß a_κ verschwinden muß. Andererseits muß aber dann auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_{\kappa\nu} x_\nu$$

verschwinden, so daß, wenn x_λ alle nicht verschwindenden, also positiven x_ν durchläuft, die zugehörigen $m_{\kappa\lambda} = 0$ sind. Und da die einer Zeile von M entsprechenden adjungierten Unterdeterminanten Lösungen eines Gleichungssystems vom Typus (7) sind, folgt auch die letzte Behauptung des Zusatzes zu Satz II.

5. Was den Satz III anbetrifft, so genügt es offenbar zu seinem Beweis, die Ungleichung (8) herzuleiten, da die Relation (12) sodann aus den Cramerschen Formeln unmittelbar folgt. Beim Beweis von (8) darf man aber offenbar die einzelnen Zeilen von H mit beliebigen Größen vom absoluten Betrag 1 multiplizieren, da dabei die Größen $|v_{\mu\nu}|$ unverändert bleiben. *Wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß die Hauptdiagonalelemente $h_{\mu\mu}$ von H nicht negativ sind.*

Ist nun m größer als alle $h_{\mu\mu}$, und daher erst recht größer als alle $m_{\mu\mu}$, so setze man

$$a_{\mu\nu} = -m_{\mu\nu}, \quad (\mu \gtrless \nu), \quad a_{\mu\mu} = m - m_{\mu\mu}, \quad A = (a_{\mu\nu}),$$
$$b_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu}, \quad (\mu \gtrless \nu), \quad b_{\mu\mu} = m - h_{\mu\mu}, \quad B = (b_{\mu\nu});$$

dann gilt durchweg wegen (3)

$$|b_{\mu\nu}| \leqq a_{\mu\nu} \tag{5, 1}$$

und zugleich gilt für die Matrizen von M und H

$$(m_{\mu\nu}) = mE - A, \qquad (h_{\mu\nu}) = mE - B. \tag{5, 2}$$

Wie in der Nummer 2 gezeigt wurde, ist dann die zu $\lambda E - A$ reziproke Matrix durch die Entwicklung gegeben

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{A^{\kappa}}{\lambda^{\kappa+1}},$$

die für $\lambda > r$ konvergiert, wo r die Maximalwurzel von $|\lambda E - A|$ ist. Aus Nr. 1 und 2 folgt aber, daß für eine eigentliche M-Determinante

$$\operatorname*{Max}_{\nu} |m_{\mu\nu}|$$

größer als r ist. Daher gilt erst recht $m > r$ und die zu M reziproke Matrix ist durch die konvergente Entwicklung

$$(u_{\mu\nu}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{A^{\kappa}}{m^{\kappa+1}} \tag{5, 3}$$

gegeben. Aus (5, 1) folgt aber, daß auch die Entwicklung $\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} \frac{B^{\kappa}}{\lambda^{\kappa+1}}$ für $\lambda > r$ konvergiert und daher die zu $\lambda E - B$ reziproke Matrix darstellt. Daher gilt insbesondere für $\lambda = m$

$$(v_{\mu\nu}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{B^{\kappa}}{m^{\kappa+1}} \tag{5, 4}$$

Der Vergleich der Entwicklungen (5, 3) und (5, 4) ergibt (8) unmittelbar. Damit ist der Satz III bewiesen.

6. Nunmehr ist leicht zu zeigen, daß die Bedingungen des Satzes I auch hinreichend sind. Für Determinanten der Ordnung 1 und der Ordnung 2 ist dies trivial. Man darf daher beim Beweis voraussetzen, daß dies bereits für Determinanten von der Ordnung $n-1$ bewiesen ist. Es seien nun die h_{11} resp. m_{11} entsprechenden Unterdeterminanten von H und M mit H_1, M_1 bezeichnet. Dann sind für H_1, M_1 die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt und es gilt

$$|H_1| \geqq M_1 .$$

Andererseits ist nach Satz III

$$|v_{11}| = \left|\frac{H_1}{H}\right| \leqq u_{11} = \left|\frac{M_1}{M}\right| ,$$

$$\left|\frac{H}{M}\right| \geqq \left|\frac{H_1}{M_1}\right| \geqq 1 ,$$

wie behauptet.

7. Sind nun alle $h_{\mu\nu}$ reell und multipliziert man alle Elemente von H, die außerhalb der Hauptdiagonalen liegen mit t, so sind für die entstehenden Determinanten H_t die Relationen (3) für $0 \leqq t \leqq 1$ erfüllt, so daß jede dieser Determinanten H_t von Null verschieden ist. Da aber H_t eine stetige Funktion von t ist, hat $H = H_1$ das gleiche Vorzeichen wie $H_0 = h_{11} \cdot h_{22} \ldots h_{nn}$.

Bildet man nun unter den Voraussetzungen des Satzes I die Determinante $H^* = |h^*_{\mu\nu}|$, wo

$$h^*_{\mu\mu} = |h_{\mu\mu}| , \quad h^*_{\mu\nu} = -|h_{\mu\nu}| , \quad (\mu \gtrless \nu)$$

ist, und beachtet man, daß nach Satz II alle Hauptminoren aller Ordnungen von M wiederum eigentliche M-Determinanten sind, so folgt, daß die Relation (4) auf die Hauptminoren von $|h^*_{\mu\nu}|$ anwendbar ist.

Daher sind alle Hauptminoren von $|h^*_{\mu\nu}|$ von Null verschieden und haben nach dem soeben Gezeigten das Vorzeichen des Produktes ihrer Hauptdiagonalelemente — sind also positiv. Daher ist $|h^*_{\mu\nu}|$ eine M-Determinante, womit der Satz I in allen Teilen bewiesen ist.

8. Es möge nun unter den Voraussetzungen des Satzes I $|H| = M$ sein. Zerfällt dann M in die irreduziblen Komponenten $M_1, M_2, \ldots M_k$, so folgt aus den Ungleichungen (3), daß in H alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, denen in M verschwindende Elemente entsprechen, so daß H in gleicher Weise zerfällt wie M, wobei aber die Komponenten $H_1, H_2, \ldots H_k$, die $M_1, M_2, \ldots M_k$ entsprechen, zunächst nicht irreduzibel zu sein brauchen. Auf jeden Fall bestehen zwischen den H_κ und den entsprechenden M_κ wiederum die Relationen (3). Daher ist $|H_\kappa| \geqq M_\kappa$ und daher

$$|H| = \prod_{\kappa=1}^{k} |H_\kappa| \geqq \prod_{\kappa=1}^{k} M_\kappa = M ,$$

so daß nach der obigen Annahme für jedes κ

$$|H_\kappa| = M_\kappa$$

ist. Dabei spielen offenbar die Werte der Elemente von H, die den akzessorischen Elementen von M entsprechen, keine Rolle.

Wir können daher bei der weiteren Diskussion annehmen, daß M irreduzibel ist und daher nach dem Zusatz zum Satz II alle adjungierten Unterdeterminanten von M positiv sind. Nunmehr folgt aus der Ungleichung (8) des Satzes III für die einander entsprechenden adjungierten Unterdeterminanten $H_{\mu\nu}$, $M_{\mu\nu}$ von H bzw. M:

$$\left|\frac{H_{\mu\nu}}{H}\right| \leqq \left|\frac{M_{\mu\nu}}{M}\right| ,$$

$$| H_{\mu\nu} | \leqq | M_{\mu\nu} | \tag{8, 1}$$

Für $\mu = \nu$ folgt hieraus, da zwischen den Elementen von $H_{\nu\nu}$ und $M_{\nu\nu}$ die Ungleichungen (3) gelten und daher nach Satz I $|H_{\nu\nu}| \geqq M_{\nu\nu}$ ist:

$$|H_{\nu\nu}| = M_{\nu\nu} > 0. \tag{8, 2}$$

9. Ist aber $\mu \gtreqless \nu$ und bezeichnet H_0 die Unterdeterminante $(n-2)$-ter Ordnung von H, die nach Weglassen der Zeilen und Kolonnen mit den Indizes μ, ν entsteht, und M_0 die analoge Unterdeterminante von M, so gilt nach dem Sylvesterschen Determinantensatz

$$\left.\begin{aligned} H\,H_0 &= H_{\mu\mu}\,H_{\nu\nu} - H_{\mu\nu}\,H_{\nu\mu}\,, \\ M\,M_0 &= M_{\mu\mu}M_{\nu\nu} - M_{\mu\nu}\,M_{\nu\mu}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9, 1}$$

Andererseits folgt, wenn man die Relation (8, 2) auf die Determinanten $H_{\nu\nu}$, $M_{\nu\nu}$ und ihre entsprechenden Unterdeterminanten H_0, M_0 anwendet:

$$|H_0| = M_0 > 0.$$

Daher folgt aus (9, 1) unter Beachtung von (8, 1) und (8, 2)

$$\begin{aligned} |HH_0| &\geqq |H_{\mu\mu}| \cdot |H_{\nu\nu}| - |H_{\mu\nu}| \cdot |H_{\nu\mu}| \\ &\geqq M_{\mu\mu}M_{\nu\nu} \qquad - M_{\mu\nu}M_{\nu\mu} = M M_0 \end{aligned}$$

Und da $|HH_0| = MM_0$ ist, folgt, daß in den Ungleichungen $|H_{\mu\nu}\,H_{\nu\mu}| \leqq M_{\mu\nu}\,M_{\nu\mu}$ das Gleichheitszeichen gelten muß. Daraus folgt aber wiederum nach den Ungleichungen (8, 1), da $M_{\mu\nu}$, $M_{\nu\mu}$ von Null verschieden sind, allgemein

$$|H_{\mu\nu}| = M_{\mu\nu} > 0, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots n \tag{9, 2}$$

Wendet man die Überlegung, die uns zur Relation (8, 2) führte, auf einander entsprechende Hauptunterdeterminanten von H und M an und fährt so fort, so sieht man sukzessive, daß die absoluten Beträge der

Hauptminoren von H von der Ordnung $n-1$, $n-2$, ..., 1 gleich den (positiven) Werten der entsprechenden Minoren von M sind. Insbesondere folgt, daß für jedes ν

$$|h_{\nu\nu}| = m_{\nu\nu}, \qquad h_{\nu\nu} = \Theta_\nu m_{\nu\nu}, \qquad |\Theta_\nu| = 1 \tag{9, 3}$$

ist.

10. Betrachten wir nun für ein $\varkappa (1 \leqq \varkappa \leqq n)$ die Gleichungssysteme

$$h_{\nu\nu} y_\nu + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} h_{\nu\mu} y_\mu = \delta_{\nu\varkappa} \quad , \tag{10,1}$$

$$m_{\nu\nu} z_\nu + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} m_{\nu\mu} z_\mu = \delta_{\nu\varkappa} \quad , \tag{10,2}$$

wo

$$\delta_{\nu\varkappa} = \begin{cases} 0 \ , & \nu \neq \varkappa \\ 1 \ , & \nu = \varkappa \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Es ergibt sich

$$y_\mu = \frac{H_{\mu\varkappa}}{H} \quad , \quad z_\mu = \frac{M_{\mu\varkappa}}{M}$$

und daher wegen (9, 2)

$$|y_\mu| = z_\mu > 0 \ , \tag{10, 3}$$

$$y_\mu = \psi_\mu z_\mu, \qquad |\psi_\mu| = 1, \mu = 1, 2, \ldots n\,. \tag{10, 4}$$

Andererseits folgt aus (10, 1), (9, 3), (3), (10, 3) und (10, 2)

$$\delta_{\nu\varkappa} = |h_{\nu\nu} y_\nu + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} h_{\nu\mu} y_\mu| \geqq m_{\nu\nu} z_\nu - \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} |h_{\nu\mu}| z_\mu$$

$$\geqq m_{\nu\nu} z_\nu + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} m_{\nu\mu} z_\nu = \delta_{\nu\varkappa} \ .$$

Daher gilt in allen diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen und es folgt wegen (9, 3), (10, 4) jetzt

$$h_{\nu\nu} y_\nu = \Theta_\nu \psi_\nu m_{\nu\nu} z_\nu,$$

$$\frac{h_{\nu\mu}\, y_\mu}{h_{\nu\nu}\, y_\nu} = \frac{m_{\nu\mu}\, z_\mu}{m_{\nu\nu}\, z_\nu} \ ,$$

$$\frac{h_{\nu\mu}\psi_\mu}{\Theta_\nu \psi_\nu} = m_{\nu\mu} \ , \ h_{\nu\mu} = \Theta_\nu \frac{\psi_\nu}{\psi_\mu} m_{\nu\mu} \ , \tag{10,5}$$

und daher insbesondere

$$|h_{\mu\nu}| = -m_{\mu\nu}, \qquad (\mu \gtrless \nu),$$

sodaß H irreduzibel ist, wenn dies für M der Fall ist. Die Formeln (10, 5) bedeuten aber, daß H in M übergeht, wenn die Zeilen und Kolonnen von H mit gewissen Zahlen $\Theta_\nu \psi_\nu$, $\dfrac{1}{\psi_\nu}$ vom absoluten Betrag 1 multipliziert werden. Damit ist auch der Zusatz zu Satz I bewiesen.

§ 2. Die Darstellung eigentlicher und uneigentlicher M- und H-Determinanten durch Minkowskische bezw. Hadamardsche Determinanten.

11. Der Beweis des Satzes IV läßt sich sehr kurz führen, wenn $M = |m_{\mu\nu}|$ als eine eigentliche M-Determinante vorausgesetzt wird. Denn betrachten wir dann das Gleichungssystem

$$y_\mu + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} m_{\mu\nu} y_\nu = 1, \qquad \mu = 1, 2, \dots n, \tag{11, 1}$$

so ist y_μ die Summe aller Adjungierten von M, die den Elementen der μ-ten Kolonne von M entsprechen, und daher nach Satz II positiv, da alle diese Adjungierten nicht negativ und die Hauptminoren positiv sind. Dann besagen die Gleichungen (11, 1), daß die Determinante M^*, die aus M entsteht, wenn man die ν-te Kolonne für $\nu = 1, 2, \dots n$ mit y_ν multipliziert, eine eigentliche Minkowskische Determinante ist. Und M entsteht aus M^*, wenn man die ν-te Kolonne von M^* für $\nu = 1, 2, \dots n$ mit $\dfrac{1}{y_\nu}$ multipliziert.

12. Es sei nun

$$M = |m_{\mu\nu}| = 0, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \dots n \tag{12, 1}$$

eine *uneigentliche* M-Determinante. Wir betrachten dann das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu} y_\nu = 0 \tag{12, 2}$$

und behaupten zunächst, daß es eine Lösung mit *nicht negativen und nicht durchweg verschwindenden* y_ν besitzt. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Wir dürfen daher annehmen, daß unsere Behauptung für Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung bereits bewiesen ist.

Wegen des Verschwindens von M sind die Gleichungen (12, 2) voneinander abhängig, so daß eine gewisse unter ihnen eine Folge der $n-1$ übrigen ist. Indem wir eine kogrediente Umformung ausüben und die y_ν entsprechend umnumerieren, können wir erreichen, daß eine solche von den übrigen abhängige Gleichung $\mu = 1$ entspricht. Wir brauchen daher nur die $n-1$ letzten Gleichungen zu betrachten, die wir in der Form schreiben können

$$\sum_{\nu=2}^{n} m_{\mu\nu} y_\nu = -m_{\mu 1} y_1, \quad \mu = 2, 3, \ldots n. \tag{12, 3}$$

Verschwindet nun hier die Determinante M_{11} der $n-1$ Linearformen auf der linken Seite, so setzen wir $y_1 = 0$ und beachten, daß M_{11} die zu m_{11} adjungierte Unterdeterminante von M, daher eine M-Determinante ist. Dann haben aber nach der obigen Annahme die Gleichungen (12, 3) eine Lösung mit nicht negativen und nicht durchweg verschwindenden y_ν.

Es sei nun $M_{11} \neq 0$. Dann ist M_{11} eine eigentliche M-Determinante, auf die daher der Satz II anwendbar ist. Setzen wir in diesem Falle $y_1 = 1$, so sind die rechten Seiten der Gleichungen (12, 3) nicht negativ.

Dann ist aber das Gleichungssystem (12, 3) dem Gleichungssystem (7) des Satzes II analog und aus dem Satze II folgt, daß $y_2, y_3, \ldots, y_n$ nicht negativ sind. y_1 ist aber positiv. Damit ist die obige Behauptung über das Gleichungssystem (12, 2) bewiesen.

13. Ist nun M im Satze IV eine *uneigentliche* M-Determinante, so denke man sich M in irreduzible Komponenten zerlegt, von denen jede wieder eine M-Determinante und wenigstens eine *uneigentlich* ist. Es genügt, die Behauptung von IV für jede einzelne Komponente zu beweisen, so daß wir uns auf den Fall beschränken können, wo M eine *uneigentliche irreduzible* M-Determinante ist.

Es sei $M = |m_{\mu\nu}| = 0$ eine solche *irreduzible uneigentliche* M-Determinante, und betrachten wir das dazugehörende Gleichungssystem (12, 2), das nach dem in Nr. 12 Bewiesenen ein Lösungssystem mit nicht durchweg verschwindenden und nicht negativen y_ν besitzt.

Wir behaupten, daß *alle y_ν in einem solchen Lösungssystem positiv sind.*

Denn verschwinden einige unter diesen y_ν, so kann nach einer geeigneten kogredienten Umordnung verbunden mit entsprechender Umnumerierung der y_ν vorausgesetzt werden, daß

$$y_1 = y_2 = \cdots y_k = 0,$$
$$y_{k+1} > 0, \ldots, y_n > 0$$

ist. Ist aber κ eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$, so liefert (12, 2) für $\mu = \kappa$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_{\kappa\nu} y_\nu = \sum_{\nu=k+1}^{n} m_{\kappa\nu} y_\nu = 0,$$

da ja die ersten k y_ν verschwinden. In dieser Gleichung sind aber $m_{\kappa\nu}$

nicht positiv und alle y_ν positiv. Daher verschwinden alle $m_{\kappa\nu}$ mit $\kappa \leqq k, \nu > k$; dann ist aber M reduzibel entgegen der obigen Annahme.

Sind aber alle y_ν in den Gleichungen (12, 2) positiv, so bedeutet dies, daß M durch eine Multiplikation der Kolonnen mit resp. $y_1, y_2, \dots y_n$ in eine Minkowskische Determinante M^* übergeht und umgekehrt aus M^* durch Multiplikation der Kolonnen mit resp. $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots \frac{1}{y_n}$ hervorgeht. Damit ist der Satz IV vollständig bewiesen.

14. Beim Beweis des Satzes V darf vorausgesetzt werden, daß M eine Minkowskische Determinante ist, da man nach IV M durch Multiplikation der Kolonnen mit geeigneten positiven Zahlen in eine Minkowskische Determinante überführen kann, und, wenn die Kolonnen von H mit gleichen Faktoren multipliziert werden, die Voraussetzungen und Behauptungen von V in äquivalente Aussagen übergehen.

Wir betrachten nunmehr das Gleichungssystem

$$h_{\nu\nu} y_\nu + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} h_{\nu\mu} y_\mu = 0 \ , \qquad \nu = 1, 2, \dots n, \tag{14, 1}$$

das wegen $H = 0$ mit nicht verschwindenden y_ν auflösbar ist.

Wir können annehmen, daß das Maximum von $|y_\mu|$ gleich 1 ist und daß etwa die ersten k y_ν: $y_1, \dots y_k$ den absoluten Betrag 1 haben, während die übrigen $|y_\nu| < 1$ sind, da man dies durch eine kogrediente Umordnung sofort erreichen kann.

Ist dann κ einer der Indizes $1, 2, \dots k$, so folgt aus (14, 1) und (3), da M eine Minkowskische Determinante ist:

$$0 = |h_{\kappa\kappa} y_\kappa + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \kappa}}^{n} h_{\kappa\mu} y_\mu| \geqq |h_{\kappa\kappa}| - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \kappa}}^{n} |h_{\kappa\mu}| \, |y_\mu| \geqq m_{\kappa\kappa} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \kappa}}^{n} m_{\kappa\mu} \geqq 0, \tag{14,2}$$

sodaß in *allen* diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten muß.

Daher ist für $\kappa = 1, 2, \dots k h_{\kappa\kappa} \neq 0$, da sonst nach (3) $m_{\kappa\kappa} = 0$, nach (14, 2) $m_{\kappa\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, \dots n)$ und nach (3) $h_{\kappa\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, \dots n)$, d. h. H reduzibel wäre.

Ferner müssen alle $h_{\kappa\mu}$, denen $y_\mu < 1$ entsprechen, verschwinden, so daß also nur die $h_{\kappa\mu}$ von Null verschieden sind, bei denen μ einen der Werte

$1, 2, \ldots \kappa$ durchläuft. Da aber H irreduzibel ist, ist daher $k = n$. Sodann folgt weiter aus den obigen Relationen für jedes μ, $\mu = 1, 2, \ldots n$:

$$\frac{h_{\kappa\mu}\, y_\mu}{h_{\kappa\kappa}\, y_\kappa} = -\frac{|h_{\kappa\mu}|}{|h_{\kappa\kappa}|},$$

$$h_{\kappa\mu} = -\frac{y_\kappa}{y_\mu} \cdot \frac{h_{\kappa\kappa}}{|h_{\kappa\kappa}|} \cdot |h_{\kappa\mu}|.$$

Multipliziert man daher die μ-te Spalte von H für $\mu = 1, 2, \ldots n$ resp. mit y_μ und dividiert die κ-te Zeile von H für $\kappa = 1, 2, \ldots n$ resp. mit der Zahl $\frac{h_{\kappa\kappa} y_\kappa}{|h_{\kappa\kappa}|}$ vom absoluten Betrage 1, so werden alle Elemente von H reell, und zwar die Hauptdiagonalelemente positiv und die übrigen Elemente nicht positiv. Zugleich werden die Zeilensummen in jeder Zeile verschwinden. Aus der Ungleichung (3) folgt aber sodann, daß für $\kappa = 1, 2, \ldots n$

$$0 = |h_{\kappa\kappa}| - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \kappa}}^{n} |h_{\kappa\mu}| \geqq m_{\kappa\kappa} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \kappa}}^{n} m_{\kappa\mu} \tag{14, 3}$$

ist. Da aber die $m_{\mu\nu}$ zu einer Minkowskischen Determinante gehören, gilt für jedes κ

$$-\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} m_{\kappa\mu} \leqq m_{\kappa\kappa}.$$

Somit folgt weiter, daß in (14,3) überall das Gleichheitszeichen gilt, daher auch in den Ungleichungen (3) das Gleichheitszeichen gilt, so daß insbesondere die Elemente von H die gleichen absoluten Beträge wie die Elemente von M haben. Endlich sind nach (14,2) sämtliche Zeilensummen von M gleich 0.

Damit ist der Satz V bewiesen. Zugleich ergibt sich aus dem am Schluß des obigen Beweises Gesagten, wenn M als eine beliebige verschwindende irreduzible Minkowskische Determinante und H als mit M identisch angenommen wird, daß alle Zeilensummen von M verschwinden müssen. Dies ist aber der Satz von Markoff.

§ 3. Schranken für Hadamardsche und Minkowskische Determinanten

15. Wir kommen nunmehr zum Beweis des Satzes VI. Wir betrachten zunächst für gegebene, nicht negative $s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_n$, die alle kleiner als 1 sind, die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ aller Determinanten der Gestalt (14), für deren Elemente die Relationen (15) gelten, und suchen für die Deter-

minanten aus $\mathfrak{F}$ die untere sowie die obere Grenze des absoluten Betrages. Es sei H eine Determinante aus $\mathfrak{F}$. Entwickeln wir sie nach den Elementen der ν-ten Zeile, so nimmt sie die Gestalt an:

$$H = H_{\nu\nu} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} h_{\nu\mu} H_{\nu\mu}\,, \qquad H_{\nu\nu} = e^{i\psi} | H_{\nu\nu} |\,, \tag{15, 1}$$

wo die $H_{\nu\mu}$ die adjungierten Minoren zu den Elementen der ν-ten Zeile sind.

Es sei nun

$$H_{\nu\kappa} = e^{i\Theta} | H_{\nu\kappa} | \tag{15,2}$$

eines der unter dem Summenzeichen rechts stehenden $H_{\nu\mu}$, dessen absoluter Betrag am größten ist. Wir ersetzen dann die Elemente der ν-ten Zeile von H durch $h^*_{\nu\mu}$, wo

$$h^*_{\nu\nu} = 1\,, \quad h^*_{\nu\kappa} = -e^{i(\psi-\Theta)}\,.\, s_\nu\,, \quad h^*_{\nu\mu} = 0 \quad (\mu \neq \nu\,,\ \mu \neq \kappa)$$

ist. Die übrigen Zeilen von H bleiben die gleichen. Die so entstehende Determinante gehört wieder zu $\mathfrak{F}$ und hat den Wert

$$e^{i\psi} (| H_{\nu\nu} | - s_\nu | H_{\nu\kappa} |)\,. \tag{15,3}$$

Der Klammerausdruck in (15,3) ist p o s i t i v für $s_\nu = 0$. Denn $H_{\nu\nu}$ ist selbst eine eigentliche Hadamardsche Determinante. Wäre nun der Klammerausdruck für ein s_ν zwischen 0 und 1 negativ, so müßte er für einen geeigneten Wert von s_ν zwischen 0 und 1 aus Stetigkeitsgründen verschwinden, während die entsprechende Determinante als eine eigentliche Hadamardsche Determinante nicht verschwinden kann. Andererseits folgt aus (15,1)

$$|H| \geqq |H_{\nu\nu}| - \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} |h_{\nu\mu}|\,|H_{\nu\mu}| \geqq |H_{\nu\nu}| - |H_{\nu\kappa}| \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} |h_{\nu\mu}| = |H_{\nu\nu}| - s_\nu |H_{\nu\kappa}|$$

sodaß also durch unsere Transformation der absolute Betrag von H nicht vergrößert wird.

Verfahren wir ganz analog mit den übrigen Zeilen von H, so erhalten wir schließlich eine Determinante H^*, die die Eigenschaft hat, daß sie in jeder Zeile außerhalb der Hauptdiagonalen höchstens ein von 0 verschiedenes Element besitzt. Die Gesamtheit der Determinanten aus $\mathfrak{F}$ mit dieser Eigenschaft sei mit $\mathfrak{F}^*$ bezeichnet. Da beim Übergang von H zu H^* der absolute Betrag nicht größer wird, darf man sich bei der Bestimmung der unteren Grenze der Determinanten aus $\mathfrak{F}$ auf die Untersuchung der Determinanten aus $\mathfrak{F}^*$ beschränken.

Genau analog kann man bei der Bestimmung der obern Grenze des absoluten Betrages der Determinanten aus $\mathfrak{F}$ vorgehen. Es sei wieder $H_{\nu\kappa}$ eines unter den $H_{\nu\mu}(\mu = 1, \ldots n,\ \mu \neq \nu)$ in der Entwicklung (15,1) von H mit dem größten absoluten Betrag und es gelte (15,2). Ersetzt man dann die Elemente der ν-ten Zeile von H durch die Zahlen $h^*_{\nu\mu}$, wo

$$h^*_{\nu\nu} = 1\ ,\quad h^*_{\nu\kappa} = e^{i(\psi-\Theta)} \cdot s_\nu\ ,\quad h^*_{\nu\mu} = 0 (\mu \neq \nu,\ \mu \neq \kappa)$$

ist, während die übrigen Zeilen unverändert bleiben, so ergibt sich für die so entstehende Determinante aus (15,1) der Wert:

$$e^{i\psi}(|H_{\nu\nu}| + s_\nu |H_{\nu\kappa}|)\ ,$$

und dies ist sicher nicht kleiner als der absolute Betrag von (15,1). Indem nun diese Transformation sukzessive auf jede Zeile von H angewandt wird, gelangen wir zum Resultat, daß man sich auch bei der Bestimmung der *oberen* Grenze des absoluten Betrages der Determinanten aus $\mathfrak{F}$ auf die Untersuchung der Determinanten aus $\mathfrak{F}^*$ beschränken kann.

16. Bei der Untersuchung der Determinanten aus $\mathfrak{F}^*$ kann man wiederum annehmen, daß auch in *jeder Kolonne* einer solchen Determinante außerhalb der Hauptdiagonalen höchstens ein von 0 verschiedenes Element vorkommt, wobei der Grad n eventuell erniedrigt wird. Denn gibt es in einer Kolonne mehr als ein von 0 verschiedenes Element außerhalb der Hauptdiagonale, so gibt es dann eine andere Kolonne, in der außerhalb der Hauptdiagonalen sämtliche Elemente verschwinden, da die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen höchstens n ist. Eine solche Determinante reduziert sich daher auf eine Determinante $(n-1)$-ter Ordnung. Indem man diese Schlußweise wiederholt auf Kolonnen und eventuell auf Zeilen anwendet, gelangt man schließlich zu einer Determinante $H^{(k)}$ der Ordnung $k \leq n$, bei der die Elemente der Hauptdiagonalen durchweg gleich 1 sind, während außerhalb der Hauptdiagonalen in jeder Zeile und in jeder Kolonne genau ein von 0 verschiedenes Element vorkommt. Und zwar gilt für diese von 0 verschiedenen Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen $h_1, \ldots h_k$ in der ersten, zweiten, ..., k-ten Zeile

$$|h_1| = s_{\nu_1}, |h_2| = s_{\nu_2}, \ldots, |h_k| = s_{\nu_k}, \tag{16,1}$$

wo die Zahlen (16, 1) eine Kombination aus den Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ zu k sind.

Es handelt sich nunmehr darum, den Wert einer derartigen Determinante zu berechnen. Der einfachste Fall einer solchen Determinante ist die Determinante von der Gestalt

$$\mathrm{H}_k = \begin{vmatrix} 1 & h_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & h_2 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots h_{k-1} \\ h_k & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{k-1} h_1 h_2 \dots h_k \ . \tag{16,2}$$

17. Wir behaupten nun, daß im allgemeinen Falle $H^{(k)}$ gleich dem Produkte der Determinanten vom Typus (16,2) ist, wobei in den einzelnen Faktoren H_κ von $H^{(k)}$ lauter h_ν mit verschiedenen Indizes vorkommen.

Um diese Zerlegung zu bewerkstelligen, bringe man durch eine kogrediente Umordnung h_1 in der ersten Zeile von $H^{(k)}$ durch Vertauschung der Kolonnen in die zweite Kolonne von $H^{(k)}$. Liegt dann h_2 in der *ersten* Kolonne, so sind alle Elemente der ersten beiden Zeilen von $H^{(k)}$, die außerhalb der beiden ersten Kolonnen liegen, gleich 0. Damit ist aber von $H^{(k)}$ der Faktor abgespalten

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & h_1 \\ h_2 & 1 \end{vmatrix} ,$$

und der übrigbleibende Faktor ist eine Determinante $H^{(k-2)}$, auf die man die gleichen Überlegungen anwenden kann.

Liegt aber nach der ersten Operation h_2 weder in der ersten noch in der zweiten Kolonne von $H^{(k)}$, so bringen wir es durch eine kogrediente Umordnung an die dritte Stelle. Liegt dann h_3 in der ersten Kolonne, so ist damit von $H^{(k)}$ eine Determinante H_3 abgetrennt, und der übrige Faktor ist analog weiter zu behandeln. Liegt aber h_3 nicht in der ersten Kolonne, so muß es, da die zweite und dritte Kolonne bereits besetzt sind, in einer der weiteren Kolonnen liegen und kann daher wiederum durch eine kogrediente Umordnung in die vierte Kolonne gebracht werden.

Setzt man dieses Verfahren fort, so wird sich entweder einmal eine Determinante H_κ, $\kappa < k$, abtrennen, oder diese Operation läßt sich $(k-1)$-mal ausführen. Dann sind aber die $k-1$ letzten Kolonnen von $H^{(k)}$ besetzt, sodaß h_k in der ersten Kolonne liegen muß, und unsere Determinante $H^{(k)}$ mit H_k identisch ist.

Es ergibt sich daher, daß die allgemeinste Determinante aus $\mathfrak{F}^*$ gleich einem Produkt von der Form

$$\prod_{\lambda=1}^{l}\left(1-(-1)^{n_\lambda}h_1^{(\lambda)}h_2^{(\lambda)}\dots h_{n_\lambda}^{(\lambda)}\right) \tag{17,1}$$

ist, wo die absoluten Beträge der Zahlen

$$h_1^{(1)},\dots,h_{n_1}^{(1)};\dots;h_1^{(\lambda)},\dots,h_{n_\lambda}^{(\lambda)};\dots;h_1^{(l)},\dots,h_{n_l}^{(l)}$$

eine Permutation der Zahlenmenge

$$s_1,\dots,s_n \tag{17,2}$$

oder einer Teilmenge dieser Zahlenmenge darstellen und *jedes* n_λ *wenigstens gleich* 2 *ist.* Wir haben daher die obere Grenze des absoluten Betrages der Determinanten aus $\mathfrak{F}$ unter den Zahlen

$$\prod_{\lambda=1}^{l}\left(1+s_1^{(\lambda)}\dots s_{n_\lambda}^{(\lambda)}\right) \tag{17,3}$$

und die untere Grenze von $\mathfrak{F}$ unter den Zahlen

$$\prod_{\lambda=1}^{l}\left(1-s_1^{(\lambda)}\dots s_{n_\lambda}^{(\lambda)}\right) \tag{17,4}$$

zu suchen, wobei die Zahlen

$$s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\dots;s_1^{(\lambda)},\dots,s_{n_\lambda}^{(\lambda)};\dots;s_1^{(l)},\dots,s_{n_l}^{(l)} \tag{17,5}$$

eine Permutation der Zahlen (17,2) oder einer Teilmenge von (17,2) darstellen. Und zwar ist (17,5) eine beliebige Permutation einer aus wenigstens 2 Elementen bestehenden Teilmenge von (17,2), und die Zusammenfassung der Zahlen (17,5) in einzelne λ-Gruppen unterliegt nur der einen Bedingung, daß jedes der n_λ wenigstens gleich 2 ist.

18. Ist ein Faktor von (15,3) gleich

$$1+s_1^{(\lambda)}s_2^{(\lambda)}\dots s_{n_\lambda}^{(\lambda)},$$

wo $n_\lambda > 2$ ist, so wird er offenbar vergrößert, wenn unter den in ihm vorkommenden $s_\nu^{(\lambda)}$ alle bis auf zwei weggelassen werden, da ja alle $s_\nu < 1$ sind.

Durch die gleiche Operation werden die einzelnen Faktoren von (17,4) verkleinert, so daß wir also von vornherein annehmen dürfen, daß in (17,3) und (17,4) alle n_λ den Wert 2 haben.

Kommt ferner unter dem Produktzeichen in (17,3) irgend ein s_{ν_0} nicht vor, während ein s_{ν_1} mit $\nu_1 > \nu_0$, $s_{\nu_1} \leqq s_{\nu_0}$ dort auftritt, so wird der zugehörige Faktor in (17,3) nicht verkleinert, wenn man s_{ν_1} mit s_{ν_0} vertauscht.

Man kann daher annehmen, daß die Indizes derjenigen s, die am Produkt (17,3) *nicht beteiligt* sind, durchweg größer sind als die dort auftretenden Indizes. Solange aber noch zwei s_ν, etwa s_μ, $s_{\mu+1}$ am Produkt (17,3) nicht beteiligt sind, wird das Produkt (17,3) nicht verkleinert, wenn in ihm als weiterer Faktor $1+s_\mu s_{\mu+1}$ eingeführt wird. Wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß im Produkt (17,3) für gerade n alle s_ν vorkommen und für ungerade n nur s_n fehlt. Ganz analog läßt sich auch für das Produkt (17,4) schließen.

Wir betrachten nun irgend zwei Faktoren des Produktes (17,3). Die an diesen beiden Faktoren beteiligten s_ν seien der Größe nach geordnet:

$$A_1 \geqq A_2 \geqq A_3 \geqq A_4 \; . \tag{18,1}$$

Unter den mit diesen vier s_ν gebildeten Produkten

$$(1+A_1A_2)\,(1+A_3A_4) \;, \tag{18,2}$$

$$(1+A_1A_3)\,(1+A_2A_4) \;, \tag{18,3}$$

$$(1+A_1A_4)\,(1+A_2A_3) \tag{18,4}$$

ist nun das erste sicher am größten, wie aus der Identität

$$(1+A_1A_2)\;(1+A_3A_4)-(1+A_1A_3)\;(1+A_2A_4)=(A_1-A_4)\;(A_2-A_3)$$

sowie der aus ihr durch Vertauschung von A_3 und A_4 unmittelbar hervorgehenden Identität folgt. Man erhält also das größte unter den drei Produkten (18,2), (18,3), (18,4), wenn man die beiden größten und ebenso die beiden kleinsten der A_ν zusammen nimmt.

Benutzt man nun diese Tatsache wiederholt, so gelangt man schließlich zum Produkte

$$\prod_{\nu=1}^{m}(1+s_{2\nu-1}s_{2\nu}) \;, \quad n=2m,\; 2m+1 \;,$$

als dem größten unter den in Betracht kommenden Produkten (17,3).

Ganz analog kann man aus den vier Größen A_ν die drei Produkte

$$(1-A_1A_2)\,(1-A_3A_4) \;, \tag{18,5}$$

$$(1-A_1A_3)\,(1-A_2A_4) \;, \tag{18,6}$$

$$(1-A_1A_4)\,(1-A_2A_3) \tag{18,7}$$

bilden und aus den Identitäten

$$(1-A_1A_2)(1-A_3A_4)-(1-A_1A_3)(1-A_2A_4)=(A_1-A_4)(A_3-A_2)$$
$$(1-A_1A_2)(1-A_3A_4)-(1-A_1A_4)(1-A_2A_3)=(A_1-A_3)(A_4-A_2)$$

folgt, daß unter den 3 Produkten das erste am kleinsten ist, also dasjenige, bei dem wiederum die beiden größten der A_ν zusammengenommen werden und ebenso die beiden kleinsten. Wendet man diese Tatsache auf das Produkt (17,4) mit $n_\lambda = 2$ wiederholt an, so gelangt man zum Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{m}(1 - s_{2\nu-1}s_{2\nu})$$

als dem kleinsten unter den Produkten (17,4), wodurch die Ungleichung (17) bewiesen ist, solange alle s_ν *kleiner* als 1 bleiben. Daraus ergibt sie sich aber auch für $s_\nu \leqq 1$ durch Grenzübergang unmittelbar.

Zugleich überblickt man sofort, daß die in (17) angegebenen Grenzen erreicht werden, und zwar für vollständig zerfallende Determinanten, die je m Komponenten vom Typus

$$\begin{vmatrix} 1 & -s_{2\nu-1} \\ s_{2\nu} & 1 \end{vmatrix}$$

bezw.

$$\begin{vmatrix} 1 & s_{2\nu-1} \\ s_{2\nu} & 1 \end{vmatrix}$$

besitzen. Wie man sieht, wird für gerade n die obere Schranke in (17) für eine schiefsymmetrische und die untere für eine symmetrische Minkowskische Determinante erreicht.

19. Handelt es sich nun insbesondere um die Minkowskischen Determinanten aus der Gesamtheit $\mathfrak{F}$, so lassen sich dann die vorigen Betrachtungen fast unverändert durchführen, wenn sie auch etwas einfacher ausfallen, da ja bei einer eigentlichen Minkowskischen Determinante die Adjungierten nicht negativ sind. Es ergibt sich wiederum, daß man sich bei der Bestimmung der unteren und der oberen Grenze der Minkowskischen Determinante aus $\mathfrak{F}$ auf die Untersuchung der Minkowskischen Determinanten aus $\mathfrak{F}^*$ beschränken kann. Die von Null verschiedenen außerhalb der Hauptdiagonale liegenden Elemente einer solchen Determinante aus F^* sind also beziehungsweise gleich

$$-s_{\nu_1}, -s_{\nu_2}, \ldots, -s_{\nu_n},$$

wo $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... n darstellen.

Stellt man nun eine solche Determinante als Produkt von Determinanten vom Typus H_κ dar, so ergibt sich wegen (16,2) für allgemeines H_κ der Wert

$$1 - s_{\nu_1} \cdot s_{\nu_2} \cdots s_{\nu_\kappa}$$

Daher sind die Schranken einer Minkowskischen Determinante aus $\mathfrak{F}$ unter den Produkten von der folgenden Form

$$\prod_{\lambda=1}^{l} (1 - \sigma_1^{(\lambda)} \sigma_2^{(\lambda)} \ldots \sigma_{n_\lambda}^{(\lambda)})$$

zu suchen, wo die Zahlen $\sigma_1^{(1)} \ldots, \sigma_{n_1}^{(1)}, \ldots, \sigma_1^{(l)}, \ldots \sigma_{n_l}^{(l)}$ eine Permutation der Zahlenmenge $s_1, s_2, \ldots s_n$ oder einer Teilmenge dieser Zahlenmenge darstellen und alle $n_\lambda \geqq 2$ sind.

Das kleinste unter diesen Produkten ist aber, wie bereits oben gezeigt wurde, das Produkt $\Pi(1 - s_{2\nu-1} \cdot s_{2\nu})$, während das größte offenbar mit der Differenz $1 - s_1 \cdot s_2 \ldots s_n$ identisch ist. Damit ist der Satz VI bewiesen.

20. Um endlich den Zusatz zum Satz VI zu beweisen, beachte man, daß die Determinanten vom Typus (14), für die (20) gilt, offenbar eigentliche H-Determinanten sind. Denn ist $s_1 \geqq 1$, so genügt es, den Fall zu betrachten, wo $s_2 > 0$ ist. Dividiert man dann die erste Zeile von (14) mit $\sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$, und multipliziert man die erste Kolonne mit $\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}$, so verwandelt sich (14) in eine eigentliche Hadamardsche Determinante. Daraus folgt aber, daß (14) eine eigentliche H-Determinante ist und es bleibt, wenn die Werte der s_ν beliebig verkleinert werden. Dann ist aber die Schlußweise, die uns zum Beweis des Satzes VI geführt hat, ohne weiteres anwendbar. —

(Eingegangen den 30. Juli 1937.)