Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen.

Autor(en): **Pólya, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **11 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11888

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen

Von G. Pólya, Zürich

1.

Die Theorie der Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen wurde in den letzten Jahrzehnten unter verschiedenen Gesichtspunkten weitgehend entwickelt. Der folgende Satz scheint unter keine bereits entwickelte Theorie zu fallen; er gibt ein einfaches hinreichendes Kriterium für die Auflösbarkeit, das in einigen sich natürlich darbietenden Fällen anwendbar ist.

I. *Die Folge der rechten Seiten* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *des unendlichen Gleichungssystems*

$$a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \cdots + a_{jk}u_k + \cdots = b_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

sei beliebig vorgegeben, während die Matrix (a_{jk}) *der linken Seiten den folgenden beiden Bedingungen genügen soll:*

A. *Die Teilmatrix*

$$\begin{matrix} a_{1,q+1}, & a_{1,q+2}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,q+1}, & a_{n,q+2}, & \cdots \end{matrix}$$

gebildet aus denjenigen Elementen der Matrix (a_{jk}), *welche den ersten* n *Zeilen angehören und den ersten* q *Spalten nicht angehören, ist vom Range* n (d. h. enthält eine nichtverschwindende Determinante mit n Spalten) *für beliebige* n *und* q.

B. $$\lim_{k=\infty} \frac{a_{j-1,k}}{a_{jk}} = 0 \quad (j = 2, 3, 4, \ldots).$$

Unter diesen Bedingungen existiert eine unendliche Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$, *welche die Gleichungen* (1) *befriedigt, und zwar so, daß alle linken Seiten absolut konvergent ausfallen.*

Man könnte die Bedingung A auch so aussprechen: Die linken Seiten der ersten n Gleichungen bleiben auch dann unabhängig, wenn die ersten q Unbekannten 0 gesetzt werden. Die Bedingung B nimmt auf eine bestimmte Anordnung der Gleichungen (1) Bezug. Man könnte die Bedingung B so aussprechen: Die Koeffizienten jeder Gleichung werden, beim Durchlaufen von links nach rechts, unendlich groß im Vergleich zu den entsprechenden Koeffizienten der darüber stehenden Gleichung. Die Rolle der Bedingung B wurde durch Borel bei der Behandlung spezieller Gleichungssysteme erkannt[1]) (vgl. die ersten Aufgaben der Nr. 5). Wir werden zum Schluß sehn, daß A neben B *nahezu überflüssig* ist.

Aus Bedingung B folgt offenbar, daß der Koeffizient einer Gleichung unendlich groß wird im Vergleich zu den entsprechenden Koeffizienten *aller* (endlich vieler) darüber stehenden Gleichungen. Somit fordert B wesentlich mehr, als die folgende Bedingung

$$\mathrm{B}'.\quad \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{1k}| + |a_{2k}| + \cdots + |a_{j-1,k}|}{|a_{jk}|} = 0 \; (j = 2, 3, \ldots) .$$

Es bleibt jedoch Satz I noch richtig, wenn darin die Bedingung B durch B' ersetzt wird, und er soll im folgenden sofort in dieser schärferen Fassung bewiesen werden. Es bleibt Satz I sogar dann richtig, wenn B' durch eine noch weniger fordernde Bedingung B'' ersetzt wird; es entsteht so aus Satz I ein neuer Satz, der Satz II, der nachher (in Nr. 3) formuliert werden soll. Der Satz II ist eine natürliche Verallgemeinerung des Satzes I mit Hilfe des Matrixbegriffs; er hat einen weiteren Anwendungskreis, als der Satz I, aber auch eine schwerfälligere Fassung. Der Beweis des Satzes I wird recht breit dargestellt werden (in Nr. 2); dafür darf dann der Beweis des Satzes II, der demselben allgemeinen Plan folgt, auf die Angabe einiger Hauptpunkte beschränkt werden (Nr. 4). Einige funktionentheoretische Anwendungen, die zum Verständnis der Tragweite und der Quellen der Sätze I und II wesentlich sind, werden in Nr. 5 besprochen, einige allgemeine Bemerkungen in Nr. 6 und eine prägnantere Fassung des Satzes I beschließen die Arbeit.

2.

Wir wollen eine Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ konstruieren, welche den Gleichungen (1) genügt, und zwar wollen wir diese Folge „staffelweise“ konstruieren. Zu diesem Zweck werden wir eine Folge von ganzen Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ aufstellen

$$1 \leqq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots .$$

[1]) *E. Borel*, „Thèse“; Annales scient. de l'Ecole Normale Sup. (3. Reihe) 12 (1895), S. 9—55. Es wird allerdings S. 43 in den ersten 3 Zeilen nicht die hier mit B bezeichnete Bedingung ausgesprochen, sondern eine mehr einschränkende, die wir so fassen können: $a_{j-1,k}\, a_{jk}^{-1}$ soll für $k \to \infty$ *gleichmäßig in* j gegen 0 streben. Ferner wird nicht die „genaue“, sondern die „angenäherte“ Auflösbarkeit des Systems (1) behandelt. Die Verbindung der Bedingung B mit A ist meines Wissens neu.

Die n-te *Staffel* wird von denjenigen u_k gebildet, für welche die Ungleichung

$$q_{n-1} < k \leqq q_n$$

gilt. Die n ersten Staffeln zusammen bilden einen endlichen Abschnitt $u_1, u_2, \ldots u_{q_n}$ der zu bestimmenden unendlichen Folge; diesem Abschnitt werden wir eine endliche Zusatzbedingung auferlegen, welche im folgenden besteht: *Die n ersten Staffeln befriedigen n Gleichungen, welche aus den n ersten Gleichungen des Systems* (1) *dadurch hervorgehen, daß die den n ersten Staffeln nicht angehörigen u_k Null gesetzt werden.* Die endliche Zusatzbedingung für die vereinigten n ersten Staffeln besteht also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + \cdots + a_{1q_{n-1}} u_{q_{n-1}} + \cdots + a_{1q_n} u_{q_n} &= b_1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1} u_1 + \cdots + a_{n-1,q_{n-1}} u_{q_{n-1}} + \cdots + a_{n-1,q_n} u_{q_n} &= b_{n-1} , \\ a_{n1} u_1 + \cdots + a_{nq_{n-1}} u_{q_{n-1}} + \cdots + a_{nq_n} u_{q_n} &= b_n . \end{aligned} \tag{2}$$

Vergleichen wir (2) mit der analogen Zusatzbedingung, der die vereinigten $n - 1$ ersten Staffeln zu genügen haben, so erhalten wir die Bedingung für die n-te Staffel ($n \geqq 2$) in der Form:

$$\begin{aligned} a_{1,q_{n-1}+1} u_{q_{n-1}+1} + \cdots + a_{1q_n} u_{q_n} &= 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,q_{n-1}+1} u_{q_{n-1}+1} + \cdots + a_{n-1,q_n} u_{q_n} &= 0 , \\ a_{n,q_{n-1}+1} u_{q_{n-1}+1} + \cdots + a_{nq_n} u_{q_n} &= b'_n ; \end{aligned} \tag{3}$$

hierin ist b'_n eine Abkürzung,

$$b'_n = b_n - a_{n1} u_1 - \cdots - a_{nq_{n-1}} u_{q_{n-1}} , \tag{4}$$

so daß die letzte Gleichung unter (3) gleichbedeutend mit der letzten Gleichung unter (2) ist. Wir wollen die Zusatzbedingungen sukzessive befriedigen, und zwar so, daß schließlich die eigentliche Bedingung, das Gleichungssystem (1), mitbefriedigt wird. Die entscheidende Überlegung ist im folgenden Hilfssatz zusammengefaßt (wir schreiben q, q', b statt q_{n-1}, q_n, b'_n).

Hilfssatz. *Gegeben sind die Zahlen n, q, ε, b; n und q sind positiv ganz, ε ist positiv, b ist beliebig* (ε ist „klein“, $|b|$ „groß“). *Unter den Voraussetzungen des Satzes I gibt es eine ganze Zahl q', $q' > q$, und Zahlen $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots u_{q'}$, welche den folgenden beiden Bedingungen genügen:*

$$a_{j,q+1}\,u_{q+1} + a_{j,q+2}\,u_{q+2} + \cdots + a_{jq'}u_{q'} = \begin{cases} b \text{ für } & j = n\ , \\ 0 \text{ für } & j = 1, 2, \ldots n-1\ ; \end{cases} \tag{I}$$

$$|a_{j,q+1}\,u_{q+1}| + |a_{j,q+2}\,u_{q+2}| + \cdots + |a_{j\,q'}\,u_{q'}| < \varepsilon \text{ für } j = 1, 2, \ldots n-1\ . \tag{II}$$

Das Gleichungssystem (I) (das System (3) in etwas vereinfachter Schreibweise) wollen wir noch folgendermaßen zerlegt schreiben:

$$a_{j,\,q+1}\,u_{q+1} + \cdots + a_{j,\,q'-1}\,u_{q'-1} = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots n)\ , \tag{5}$$

$$x_n = b - a_{n\,q'}\,u_{q'}\ , \tag{6}$$

$$x_j = -a_{j\,q'}\,u_{q'} \qquad (j = 1, 2, \ldots n-1)\ , \tag{7}$$

und nun den Beweis des Hilfssatzes beginnen.

Auf Grund der Bedingung A existieren n ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$,

$$q < k_1 < k_2 < \cdots < k_n\ ,$$

so beschaffen, daß die Determinante des Gleichungssystems

$$a_{jk_1}u_{k_1} + a_{jk_2}\,u_{k_2} + \cdots + a_{jk_n}u_{k_n} = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

(für die n Unbekannten $u_{k_1}, \ldots u_{k_n}$) nicht verschwindet. Fassen wir in (8) die rechten Seiten $x_1, x_2, \ldots x_n$ als unabhängige Variable auf; von diesen Variablen sind die u_{k_ν} homogene lineare Funktionen. Daher existiert eine positive Zahl δ, so daß

$$|\,a_{jk_1}\,u_{k_1}\,| + |\,a_{jk_2}u_{k_2}\,| + \cdots + |\,a_{jk_n}\,u_{k_n}\,| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \tag{9}$$

sobald $|\,x_\nu| < \delta$ $(j, \nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Auf Grund der Bedingung B' können wir zu der eben bestimmten Zahl δ eine ganze Zahl q' so bestimmen, daß $q' > k_n$ und

$$\left|\frac{b\,a_{jq'}}{a_{n\,q'}}\right| < \operatorname{Min}(\delta\,,\ \tfrac{1}{2}\,\varepsilon) \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots n-1\ . \tag{10}$$

(Man beachte, daß die Forderung, worin B über B' hinausgeht, hierbei nicht benutzt wurde.)

Nachdem wir δ und q' bestimmt haben, setzen wir

$$u_k = 0 \quad \text{wenn} \quad q < k < q',\ k \neq k_1, k_2, \ldots k_n \tag{11}$$

wodurch (8) mit (5) gleichwertig wird. Wir setzen ferner

$$x_n = 0\ . \tag{12}$$

Dann wird gemäß (6) und (7)

$$u_{q'} = \frac{b}{a_{nq'}} \quad , \quad x_j = -\frac{b\, a_{j\,q'}}{a_{n\,q'}} \quad (j = 1\,,\ 2\,, \ldots n - 1)\ . \tag{13}$$

Bestimmen wir $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots u_{k_n}$ aus dem Gleichungssystem (8) mit nichtverschwindender Determinante; dann sind (5), (6), (7) und somit die Bedingung (I) erfüllt.

Beachten wir, daß gemäß (12) bzw. (13) und (10), $|x_j| < \delta$ für $j = 1, 2, \ldots n$. Also bestehen die Ungleichungen (9) zu Recht. Gemäß (13) und (10) ist aber

$$|a_{jq'}\, u_{q'}| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \qquad \text{für} \qquad j = 1, 2, \ldots n - 1$$

und somit, wegen (9) und (11), ist auch die Bedingung (II) erfüllt. W. z. b. w.

Nachdem so der Hilfssatz gesichert ist, können wir die in Aussicht gestellte staffelweise Konstruktion der Lösung $u_1, u_2, u_3, \ldots$ leicht durchführen.

Gemäß dem Spezialfall $n = 1$ der Bedingung A enthält die erste Zeile der Matrix (a_{jk}), d. h. die Folge $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$, unendlich viele von 0 verschiedene Elemente; ein solches (z. B. das erste solche) sei a_{1q_1}. Hiemit ist q_1 gewählt; wir setzen

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_{q_1 - 1} = 0 \quad , \quad u_{1\,q_1} = \frac{b_1}{a_{1\,q_1}}\ ,$$

wodurch die Zusatzbedingung für die erste Staffel (d. h. (2) für $n = 1$) befriedigt ist. Wenn $n \geqq 2$ und

$$q_1, q_2, \cdots q_{n-1}$$
$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{q_{n-1}}$$

schon bekannt sind, bestimmen wir, in Anwendung des Hilfssatzes, q_n und $u_{q_{n-1}+1}, \ldots u_{q_n}$ (die n-te Staffel) so, daß *erstens* die Gleichungen (3) (die zugehörige Zusatzbedingung) befriedigt werden (b'_n ist, gemäß (4), durch die $n - 1$ ersten Staffeln schon bestimmt), und *zweitens*

$$|a_{j,\,q_{n-1}+1}\, u_{q_{n-1}+1}| + \cdots + |a_{j\,q_n}\, u_{q_n}| < \frac{1}{2^n} \qquad (1 \leqq j < n)\ . \tag{14}$$

Da (2) für $n = 1$ und (3) für $n = 2, 3, \ldots$ erfüllt ist, ist (2) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt. Fassen wir ein festes j ins Auge. Gemäß der Ungleichung (14), die ja für $n > j$ gilt, ist die linke Seite von (1) absolut konvergent. Für $n \geqq j$ ergibt die j-te Gleichung unter (2), daß die Partialsumme vom Index q_n der Reihe unter (1) links den Wert b_j hat.

Somit haben unendlich viele Partialsummen der absolut konvergenten Reihe $a_{j1} u_1 + a_{j2} u_2 + \cdots$ den Wert b_j, welcher Wert folglich die Summe der Reihe sein muß. W. z. b. w.

3.

Die Bedingung B besagt, vage gefaßt, daß jede Zeile der Matrix (a_{jk}) „schwerer" ist, als die darüberliegenden Zeilen. Diese Bedingung B erweist sich als zu eng für gewisse funktionentheoretische Aufgaben (vgl. die Aufgaben 4. und 5. der Nr. 5). Bei diesen Aufgaben zeigt sich aber eine eigentümliche „Schichtung" des Gleichungssystems (1): Die Matrix (a_{jk}) läßt sich in Horizontalschichten zerlegen, und zwar so, daß jede Schicht „schwerer" ist als die darüberliegenden Schichten. Um diese vage Andeutung genau und doch übersichtlich zu fassen, müssen wir einige Abkürzungen einführen und den Matrixbegriff näher heranziehen.

Die *Schichtung* einer Matrix (a_{jk}) wird durch die Angabe einer wachsenden Folge von positiven ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ festgelegt. Wir verlangen also daß

$$1 \leqq p_1 < p_2 < p_3 < \cdots .$$

Die n-te *Schicht* der Matrix besteht aus denjenigen Elementen a_{jk}, die der Ungleichung

$$p_{n-1} < j \leqq p_n$$

genügen; die n-te Schicht ist also eine Teilmatrix von (a_{jk}), mit unendlich vielen Kolonnen und $p_n - p_{n-1}$ Zeilen; man bezeichnet

$$p_n - p_{n-1} = d_n$$

als die *Dicke* der n-ten Schicht.

Eine *Kolonnenfolge* wird durch die Angabe einer wachsenden Folge von positiven ganzen Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ festgelegt ($1 \leqq h_1 < h_2 < \cdots$; sie besteht aus denjenigen Elementen a_{jk}, für welche k einen der Werte $h_1, h_2, h_3, \ldots$ annimmt. Diese Kolonnenfolge heißt *in der n-ten Schicht ausgezeichnet*, wenn die Matrix Q_l, welche die Elemente a_{jk} mit

$$j = p_{n-1} + 1 \;,\quad p_{n-1} + 2 \;, \ldots p_n \;,$$
$$k = h_{(l-1)d_n+1} \;,\quad h_{(l-1)d_n+2} \;, \ldots h_{ld_n}$$

umfaßt, für $l = 1, 2, 3, \ldots$ nichtsingulär ist (d. h. eine von 0 verschiedene Determinante besitzt). Q_l ist eine quadratische Matrix, eine Teilmatrix der n-ten Schicht.

Als die *Matrix oberhalb* Q_l bezeichnen wir diejenige Matrix R_l, welche die Elemente a_{jk} mit

$$j = 1\ ,\quad 2\ ,\quad 3\ ,\ \ldots\quad p_{n-1}\ ,$$
$$k = h_{(l-1)d_n+1}\ ,\quad h_{(l-1)d_n+2}\ ,\ \ldots\quad h_{ld_n}$$

umfaßt. R_l ist im allgemeinen nur eine rechteckige, keine quadratische Matrix, eine Teilmatrix der Vereinigung der ersten $n - 1$ Schichten, die Kreuzung dieser Schichten mit denselben d_n Kolonnen, deren Kreuzung mit der n-ten Schicht Q_l ergibt.

Unter dem *Betrag einer Matrix* A soll in dieser Arbeit die Summe der Beträge ihrer Elemente verstanden werden. Der Betrag von A wird mit $|A|$ bezeichnet. Wenn A m Zeilen und n Kolonnen besitzt, so ist $|A|$ die Summe von mn nichtnegativen reellen Zahlen. Es gelten, wie leicht ersichtlich, die Rechenregeln

$$|A+B| \leqq |A| + |B|\ , \qquad |AB| \leqq |A|\ |B|\ .$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir eine auf Matrices (a_{jk}) unendlicher Ordnung ($j, k = 1, 2, 3, \ldots$) bezügliche neue Bedingung formulieren.

B''. Es existiert eine Schichtung der Matrix (a_{jk}), worin zu jeder Schicht eine ausgezeichnete Kolonnenfolge gefunden werden kann, so beschaffen, daß, wenn Q_l die zu dieser ausgezeichneten Kolonnenfolge gehörige l-te Matrix und R_l die Matrix oberhalb Q_l bezeichnet, die Limesbeziehung

$$\lim_{\to\infty} |R_l Q_l^{-1}| = 0$$

gilt.

Um die Bedingung B'' richtig aufzufassen, bemerke man:

1. Es liegt im Begriffe der in der n-ten Schicht ausgezeichneten Kolonnenfolge, daß Q_l^{-1}, die zu Q_l reziproke Matrix, existiert.

2. Es würde sachlich auf dasselbe hinauskommen und nur die Fassung der Bedingung B'' ändern, wenn wir in der Limesbeziehung „lim inf“ an Stelle von „lim“ schreiben würden.

3. Die Bedingung B'' ist sicher erfüllt, wenn

$$\lim_{l\to\infty}\ |R_l|\ |Q_l^{-1}| = 0\ .$$

4. Die Bedingung B' ist genau derjenige Spezialfall der Bedingung B'', in welchem jede Schicht die Dicke 1 hat, also $p_n = n$ ist. In der Tat, in

diesem Fall ist die zur n-ten Schicht gehörige quadratische Matrix Q_l einzeilig, besteht aus einem einzigen Element a_{nh_l}, wobei $a_{nh_l} \neq 0$, da Q_l nichtsingulär ist; die Matrix R_l oberhalb Q_l hat $n - 1$ Zeilen und eine Kolonne; es ist

$$| R_l Q_l^{-1} | = \frac{|a_{1h_l}| + |a_{2h_l}| + \cdots + |a_{n-1\,h_l}|}{|a_{nh_l}|},$$

wobei h_l eine ausgezeichnete Teilfolge der ganzen Zahlen durchläuft. Es handelt sich also in diesem Spezialfalle von B'' genau um die unter B' ausgesprochene Limesbeziehung.

Wie die Bedingung B' in B'', so ist der Satz I im folgenden Satz II als Spezialfall enthalten:

Satz II. *Wenn die Matrix* (a_{jk}) *die Bedingungen A und* B'' *erfüllt, so kann man zu einer beliebigen Folge* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *eine Folge* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *bestimmen, welche das Gleichungssystem* (1) *befriedigt, und zwar so, daß alle linken Seiten absolut konvergieren.*

4.

Wie vom Satz I zu Satz II, so gelangt man auch vom Beweis des ersten zu dem des zweiten Satzes, indem man die Bedingung B' durch B'' ersetzt; der wesentliche Gang bleibt derselbe, nur die Formeln werden weitschweifiger; also dürfen wir wohl auf eine Darstellung aller Einzelheiten verzichten. (Die Parallelität der Schritte in Nr. 2 und hier wird durch die parallele Numerierung einiger Formeln unterstrichen.)

Wir konstruieren die Folge $u_1, u_2, \ldots$, welche (1) erfüllen soll, auch jetzt staffelweise; der Abschnitt $u_1, u_2, \ldots, u_{q_n}$, welcher die n ersten Staffeln umfaßt, hat jetzt nicht bloß n Gleichungen, sondern n Schichten von Gleichungen zu erfüllen, welche aus den ersten p_n Gleichungen des Systems (1) dadurch entstehen, daß die den n ersten Staffeln nicht angehörigen u_k Null gesetzt werden. Für die n-te Staffel ergibt sich hieraus die Bedingung

$$\sum_{k=q_{n-1}+1}^{q_n} a_{jk} u_k = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots p_{n-1}, \\ b_j' & \text{für } j = p_{n-1}+1, \ldots p_n, \end{cases} \tag{3''}$$

wobei b_j' durch die $n - 1$ vorangehenden Staffeln bestimmt ist:

$$b_j' = b_j - \sum_{k=1}^{q_{n-1}} a_{jk} u_k \quad (j = p_{n-1}+1, \ldots p_n) \,. \tag{4''}$$

Wir haben die n-te Staffel so zu bestimmen, daß neben den $n - 1$ ersten Schichten der Gleichungen (3″) noch die Ungleichungen

$$\sum_{k=q_{n-1}+1}^{q_n} \left| a_{jk} u_k \right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots p_{n-1} \tag{14''}$$

bestehen. Erinnern wir uns daran, daß in Nr. 3 der analoge Zweck, die Befriedigung der Gleichungen (3) und der Ungleichungen (14) so erreicht wurde, daß wir die „meisten" Glieder der n-ten Staffel, nämlich alle mit Ausnahme von $n+1$ Glieder, von vornherein $= 0$ gesetzt haben, vgl. (11); hier werden wir ebenfalls alle Glieder der n-ten Staffel von vornherein $= 0$ setzen, mit Ausnahme von $p_n + d_n$ (anstatt von $n+1$) Gliedern, deren Indizes mit

$$k_1, \; k_2, \ldots k_{p_n}, \; k_{p_n+1}, \ldots k_{p_n+d_n}$$

bezeichnet sein mögen. Die ersten p_n Indices werden auf Grund der Bedingung A bestimmt, die letzten d_n auf Grund der Bedingung B'' (wie in Nr. 3 die ersten n auf Grund der Bedingung A und der letzte Index, dort mit q_n oder q' bezeichnet, auf Grund der Bedingung B'); von den u_{k_ν} werden die letzten d_n aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=p_n+1}^{p_n+d_n} a_{jk_\nu} u_{k_\nu} = b_j' \qquad (j = p_{n-1}+1, \ldots p_{n-1}+d_n)$$

bestimmt, dessen Matrix ein Q_l mit genügend kleinem $|R_l Q_l^{-1}|$ ist [die analoge Gleichung in Nr. 2 resultiert aus (6) und (12)]; die übrigen nicht von vornherein nullgesetzten Glieder der n-ten Staffel genügen dem System

$$\sum_{\nu=1}^{p_n} a_{jk_\nu} u_{k_\nu} = \begin{cases} -\sum\limits_{\nu=p_n+1}^{p_n+d_n} a_{jk_\nu} u_{k_\nu} & \text{für } j = 1, 2, \ldots p_{n-1}, \\ 0 & \text{für } j = p_{n-1}+1, \ldots p_{n-1}+d_n, \end{cases}$$

dessen Determinante auf Grund der Bedingung A von 0 verschieden ist [das analoge System in Nr. 2 resultiert aus (8), (12) und (13)].

Diese Angaben dürften genügen, um einen Beweis des Satzes II, der dem des Satzes I vollkommen parallel läuft, bequem herzustellen.

5.

Nun sollen einige funktionentheoretische Aufgaben auf Grund der Sätze I und II behandelt werden. Eine erste Aufgabe betrifft Funktionen reeller Veränderlichen, die übrigen betreffen Potenzreihen einer komplexen Veränderlichen.

1. Aufgabe. *Gegeben sind zwei reelle Zahlenfolgen*

$$M_0, M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots,$$
$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots;$$

die erste Zahlenfolge ist keiner Bedingung unterworfen, die zweite der Bedingung, daß $a_k \neq a_l$ wenn $k \neq l$, und daß $|a_k|$ mit k gegen ∞ strebt. Gesucht wird eine Funktion $\varphi(x)$, welche im Intervall $-\infty < x < \infty$ von beschränkter Schwankung ist, in jedem von den Punkten der Folge $a_1, a_2, \dots$ freien Intervall konstant ist und die Zahlen $M_0, M_1, \dots$ zu Momenten hat.

Die letztgenannte Forderung bedeutet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\varphi(x) = M_n \qquad \text{für} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \,. \tag{15}$$

Bezeichnen wir mit u_k den Sprung der Funktion $\varphi(x)$ im Punkte $x = a_k$. Durch die Angabe der Folge $u_1, u_2, \dots$ ist die Funktion $\varphi(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt (falls wir als Funktionswert auf der Sprungstelle etwa den Grenzwert von rechts gelten lassen). Das Gleichungssystem (15) ergibt

$$a_1^n u_1 + a_2^n u_2 + \cdots + a_k^n u_k + \cdots = M_n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{16}$$

ein unendliches System linearer Gleichungen für die Unbekannten $u_1, u_2, \dots$ mit der Matrix

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \;\dots\; 1 \;\dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \;\dots\; a_k \;\dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \;\dots\; a_k^2 \;\dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Das Gleichungssystem (16) erfüllt reichlich die Bedingung A: alle in den ersten n Zeilen enthaltenen n-zeiligen Determinanten sind (als Vandermondesche Determinanten) von 0 verschieden, da $a_k \neq a_l$ wenn $k \neq l$. Auch die Bedingung B ist erfüllt, da $a_k \to \infty$ wenn $k \to \infty$. Nach Satz I existiert eine Folge $u_1, u_2, \dots$, welche (16), also eine Funktion $\varphi(x)$, welche (15) erfüllt, und zwar sind dabei alle linken Seiten absolut konvergent; dies bedeutet für $n = 0$, daß $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung ist.

Daß es eine Funktion $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung gibt, welche die Gleichungen (15) erfüllt, ist ein Resultat von R. P. Boas jr.[2]). Nach dem Gesagten stellt sich die Aufgabe, eine Funktion $\varphi(x)$ zu finden, welche (15) genügt, als ungeheuer unbestimmt heraus, da ja sogar die

[2]) Das Resultat von *R. P. Boas* wurde kürzlich in einer Note von *J. Shohat*, Comptes Rendus 207 (1938), S. 556—558 ausgesprochen, und zwar leider mit überflüssigen Determinantenbedingungen behaftet ausgesprochen. In Beantwortung meiner unter [3]) zitierten Note teilte mir Herr *Boas* seinen interessanten Beweis, der in dem Bull. of the American M. S. erscheinen soll, brieflich mit.

zuläßigen Sprungstellen $a_1, a_2, \ldots$ von $\varphi(x)$ willkürlich vorgeschrieben werden können[3]). Ferner ist zu bemerken, daß schon Borel das Gleichungssystem (16) betrachtet und im Spezialfall $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots$, $a_k = k, \ldots$ die Existenz einer Lösung besonders schön bewiesen hat[4]), und daß schon die Erledigung eines einzigen solchen Spezialfalles des Gleichungssystems (16) genügt die Existenz einer Lösung $\varphi(x)$ von (15) zu behaupten. Unser Satz I genügt natürlich, die Existenz einer Lösung von (16) auch dann zu behaupten, wenn a_k und M_n komplex sind, die M_n ganz beliebig, und die a_k nur durch die in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen gebunden, welche man auch so ausdrücken kann: Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soll die Folge der Nullstellen einer ganzen Funktion ohne mehrfache Nullstellen sein. —

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf eine Potenzreihe

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_k z^k + \cdots = f(z) \ . \tag{17}$$

Aufgabe 2. *Gegeben ist eine willkürliche Folge von komplexen Zahlen* $B^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Gesucht ist eine Potenzreihe* (17), *welche im Punkt* $z = 1$ *samt sämtlichen derivierten Reihen konvergiert, und den Gleichungen genügt:*

$$f^{(n)}(1) = B^{(n)} \quad \textit{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

Diese Aufgabe und ihre erste Lösung rühren von Borel her[5]).

Aus der Konvergenz der Potenzreihe (17) im Punkte $z = 1$ folgt, daß die durch die Reihe definierte Funktion $f(z)$ im Kreisinnern $|z| < 1$ analytisch ist, aber $z = 1$ wird für $f(z)$ im allgemeinen ein singulärer Punkt sein. Die Gleichung (18) ist nur als eine Abkürzung für

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)\,u_k = B^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

zu verstehen.

---

[3]) Daß das Gleichungssystem (15) auch durch eine beliebig oft differenzierbare, ja sogar durch eine ganze transzendente Funktion $\varphi(x)$ befriedigt werden kann, habe ich in den Comptes Rendus 207 (1938), S. 708—711 gezeigt, durch ein Verfahren, dessen allgemeiner Plan mit dem der Nr. 2 genau übereinstimmt.

[4]) Die Ausführungen von *Borel* a. a. O.[1]), S. 44 bedürfen einer Ergänzung (Unterschied zwischen der linken und der rechten Reziproken einer unendlichen Matrix!). Der Spezialfall $a_k = k$ ist mit einem anderen Gleichungssystem gleichwertig, für welches Borel die Existenz der Lösung in geistreicher Weise vollständig nachgewiesen hat a. a. O. [1]), S. 38—42 ; vgl. die nachfolgende 2. Aufgabe. Das homogene System, das aus (16) für $M_n = 0$ hervorgeht, bildete den Ausgangspunkt einer bahnbrechenden Untersuchung von *Poincaré*, Bulletin de la Soc. Math. de France, 13 (1885) S. 19—27 und 14 (1886) S. 77—90.

[5]) A. a. O. [1]), S. 38—42.

Das System (19) fällt unter den Satz I. Erstens sind alle in den ersten n Zeilen enthaltenen n-zeiligen Determinanten von 0 verschieden; denn irgend eine solche hat Kolonnen von der Form

$$1\,, \quad k\,, \quad k(k-1)\,, \ldots \qquad k(k-1)\ldots(k-n+2)\,,$$

läßt sich also, durch Addition von Zeilen, in eine Determinante mit der allgemeinen Kolonne

$$1\,, \quad k\,, \qquad k^2\,, \quad \ldots \qquad k^{n-1}\,,$$

d. h. in eine Vandermondesche verwandeln. Somit ist die Bedingung A erfüllt. Die Bedingung B ist offenbar erfüllt; Borel ist gerade bei der Behandlung dieses Systems (19) auf die Bedingung, die wir hier B nennen, aufmerksam geworden.

Übrigens führt dieselbe Kombination der Zeilen, welche die erwähnten Determinanten in Vandermondesche verwandelt, das System (19) in das System

$$\begin{aligned}
u_1 + \quad u_2 + \quad u_3 + \cdots &= B^{(0)} - u_0 \\
1\; u_1 + 2\; u_2 + 3\; u_3 + \cdots &= B^{(1)} \\
1^2 u_1 + 2^2 u_2 + 3^2 u_3 + \cdots &= B^{(2)} + B^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1^n u_1 + 2^n u_2 + 3^n u_3 + \cdots &= C^{(n)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

über (wobei $C^{(n)}$ für $n \geqq 1$ eine gewisse lineare Kombination von $B^{(1)}$, $B^{(2)}, \ldots B^{(n)}$ bezeichnet). Das System (19) ist also eigentlich mit dem Spezialfall $a_k = k$ des Systems (16) gleichwertig, gerade mit demjenigen Spezialfall, worauf wir vorher besonders hingewiesen haben.

3. Aufgabe. *Gegeben sind, für $n = 1, 2, 3, \ldots$, die Zahlen*

$$a_n\,, \quad m_n\,, \quad B_n^{(0)}\,, \quad B_n^{(1)}\,, \ldots \; B_n^{(m_n)}\,.$$

Die a_n sind dem absoluten Betrage nach wachsend angeordnet,

$$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots\,, \tag{20}$$

die Zahlen m_n sind nichtnegative ganze Zahlen, sonst beliebig, die Zahlen

$B_n^{(\mu)}$ sind durch keine Bedingung gebunden. Gesucht ist eine Potenzreihe (17), *welche im Kreise $|z| < \varrho$ konvergiert, wo*

$$\varrho = \lim_{n \to \infty} |a_n|$$

und den Gleichungen

$$f(a_n) = B_n^{(0)}, \quad f'(a_n) = B_n^{(1)}, \ldots f^{(m_n)}(a_n) = B_n^{(m_n)} \tag{21}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ genügt.

Der mit ϱ bezeichnete Grenzwert darf eine positive Zahl oder ∞ sein. Es handelt sich hier — abgesehen von einer gewissen durch (20) hereingebrachten Beschränkung, worauf wir in der 5. Aufgabe zurückkommen wollen — um eine wohlbekannte funktionentheoretische Interpolationsaufgabe, welche man durch eine Kombination der klassischen Weierstraßschen und Mittag-Lefflerschen Entwicklungssätze zu lösen pflegt[6]). Wir wollen auf die Reihenentwicklung (17) zurückgreifen und die Gleichungen (21) als ein unendliches System linearer Gleichungen für die zu bestimmenden Potenzreihenkoeffizienten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ auffassen. Die Reihenfolge der Gleichungen in diesem System ist wesentlich: Die Gleichungen sind zuerst nach zunehmendem Absolutwert der Interpolationspunkte a_n (gemäß (20) nach wachsendem n), und diejenigen, welche zu demselben Interpolationspunkt gehören, nach wachsender Ordnung der Ableitungen anzuordnen. Wenn z. B. $m_1 = 2$ ist, so lauten die ersten 4 Gleichungen so:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, a_1^k\; u_k &&= B_1^{(0)}, \\ &\Sigma\, k a_1^{k-1}\, u_k &&= B_1^{(1)}, \\ &\Sigma\, k(k-1)\, a_1^{k-2}\, u_k &&= B_1^{(2)}, \\ &\Sigma\, a_2^k\; u_k &&= B_2^{(0)}; \end{aligned}$$

die Summen sind über $k = 0, 1, 2, \ldots$ erstreckt. Es ist klar, daß in dieser Anordnung die Bedingung B erfüllt ist; im Beispiel werden die Koeffizienten der 4-ten Gleichung im Vergleich zu denen der 3-ten für $k \to \infty$ unendlich groß, da, gemäß (20), $|a_1| < |a_2|$. Die Bedingung A ist auch erfüllt; es ist leicht zu sehen, daß solche n-zeilige Determinanten, welche

[6]) Vgl. *Guichard*, Annales scient. de l'Ecole Normale Sup. (3. Reihe) 1 (1884), S. 427 bis 432. Ich benutze die Gelegenheit um hervorzuheben, daß das interessante „corollaire" S. 428 (Darstellung von 1 durch „relativ prime" ganze Funktionen) zwar vollständig richtig ist, aber falsch bewiesen ist (die Möglichkeit mehrfacher Nullstellen wird nicht berücksichtigt). Vgl. ferner z. B. *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925), Bd. II, S. 31 und S. 209—210, Aufgabe 174.

den ersten n Zeilen und irgendwelchen n *benachbarten* Kolonnen der Matrix entnommen sind, von 0 verschieden sind. Denn wäre z. B. die Determinante des Gleichungssystems

$$\begin{array}{llll}
a_1^k\ v_0 + & a_1^{k+1} v_1 + & a_1^{k+2} v_2 + & a_1^{k+3}\, v_3 = 0 \\
k a_1^{k-1} v_0 + (k+1)\, a_1^k\ v_1 + & (k+2)\, a_1^{k+1} v_2 + & (k+3)\, a_1^{k+2}\, v_3 = 0 & \\
k(k-1) a_1^{k-2} v_0 + (k+1) k\, a_1^{k-1} v_1 + (k+2)(k+1)\, a_1^k\ v_2 + (k+3)(k+2)\, a_1^{k+1}\, v_3 = 0 & & & \\
a_2^k\ v_0 + & a_2^{k+1} v_1 + & a_2^{k+2} v_2 + & a_2^{k+3}\, v_3 = 0
\end{array}$$

$= 0$, also das System durch Zahlen v_0, v_1, v_2, v_3, welche nicht sämtlich verschwinden, erfüllbar, so gäbe es ein nicht identisch verschwindendes Polynom

$$v_0 x^k + v_1 x^{k+1} + v_2 x^{k+2} + v_3 x^{k+3} ,$$

das, obzwar sein Grad $\leqq k + 3$ ist, doch $k + 4$ Wurzeln hätte: nämlich k Wurzeln im Punkte $x = 0$, drei Wurzeln im Punkte $x = a_1$ und eine im Punkte $x = a_2$. Hiemit ist die Aufgabe 3 als lösbar nachgewiesen.

Aufgabe 4. *Gegeben sind m verschiedene Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ auf der Peripherie des Einheitskreises ($m > 1$) und m beliebige Zahlenfolgen*

$$B_1^{(0)}, B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots ;\ B_2^{(0)}, B_2^{(1)}, B_2^{(2)}, \ldots ;\ \ldots B_m^{(0)}, B_m^{(1)}, B_m^{(2)}, \ldots .$$

Gesucht ist eine Potenzreihe, welche samt allen Ableitungen auf dem Rande des Einheitskreises absolut konvergiert und den Gleichungen genügt:

$$f^{(n)}(a_\mu) = B_\mu^{(n)} \tag{22}$$

$$\textit{für}\quad \mu = 1, 2, \ldots m\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der von Borel herrührenden 1. Aufgabe. Sie verlangt etwas mehr als die Konstruktion einer analytischen Funktion, welche im Innern des Einheitskreises regulär ist und in m gegebenen Randpunkten dieses Kreises willkürlich vorgeschriebene asymptotische Entwicklungen besitzt[7]). Wie in der 2. Aufgabe, bedeutet die linke Seite in (22) die Summe derjenigen unendlichen Reihe, welche aus der Potenzreihe (17) durch n-maliges formales Differenzieren und Einsetzen von a_μ für z entsteht (der Punkt $z = a_\mu$ darf für die durch die Reihe (17) definierte analytische Funktion singulär sein). Betreffend die Reihenfolge der aus (22) entspringenden Gleichungen für $u_0, u_1, u_2, \ldots$

[7]) Vgl. *T. Carleman,* Les fonctions quasi analytiques (Paris, 1926), S. 28—33.

ist die Anordnung nach wachsendem n wesentlich, d. h. höhere Derivierte kommen später, als niedrigere; Derivierte gleich hoher Ordnung dürfen irgendwie angeordnet sein, z. B. nach wachsendem μ. Wenn z. B. $m = 2$ ist, lauten die vier ersten Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma \ \ a_1^k \ \ u_k &= B_1^{(0)}, \\ \Sigma \ \ a_2^k \ \ u_k &= B_2^{(0)}, \\ \Sigma\, k\, a_1^{k-1}\, u_k &= B_1^{(1)}, \\ \Sigma\, k\, a_2^{k-1}\, u_k &= B_2^{(1)} . \end{aligned}$$

Die Bedingung A ist erfüllt: Determinanten n-ter Ordnung aus den ersten n Zeilen und irgendwelchen n *benachbarten* Kolonnen sind nach der in der Lösung der 3. Aufgabe angestellten Überlegung von 0 verschieden. Die Bedingung B ist nicht erfüllt, die Bedingung B' auch nicht: In Gleichungen, die gleich hohen Derivierten entspringen, haben die entsprechenden Koeffizienten den gleichen absoluten Betrag. Wenn wir jedoch diejenigen m Gleichungen, welche von Ableitungen gleicher Ordnung herrühren, im Sinne der Nr. 3 zu einer Schicht zusammenfassen, so finden wir die Bedingung B'' erfüllt. Die ausgezeichnete Kolonnenfolge darf hier für jede Schicht als aus ,,fast allen“ Kolonnen bestehend angenommen werden; es sind nämlich in der n-ten Schicht nur die aus lauter Nullen bestehenden $n - 1$ Anfangskolonnen ausgenommen. Im Beispiel sind die Schichten von der Dicke 2; die aus der 2-ten Schicht hervorgehobene Matrix Q_l umfaßt die Elemente

$$\begin{matrix} (2l - 1)\ a_1^{2l-2} & 2l\ a_1^{2l-1} \\ (2l - 1)\ a_2^{2l-2} & 2l\ a_2^{2l-1} \end{matrix}$$

und die Determinante von Q_l ist durch Ausklammern aus Zeilen und Kolonnen in eine Vandermondesche verwandelbar, nämlich

$$= (2l - 1)\ 2l\ (a_1 a_2)^{2l-2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} .$$

Im allgemeinen Fall ist der Betrag der m-zeiligen Determinante von Q_l in der $(n+1)$-ten Schicht (welche aus n-maliger Derivation entspringt) $\sim c l^{mn}$ mit positivem c, während ihre Minoren $O(l^{(m-1)n})$ sind; somit ist

$$| Q_l^{-1} | = O(l^{-n}) ;$$

die Elemente der n ersten Schichten (höchstens $(n - 1)$-malige Derivation) sind $O(l^{n-1})$ und somit ist

$$| R_l | = O(l^{n-1})$$

$$| R_l Q_l^{-1} | \leqq | R_l | \, | Q_l^{-1} | = O(l^{-1}) \ .$$

So ist die Bedingung B'' erfüllt. Hieraus geht die Existenz einer Lösung der 4. Aufgabe hervor, auf Grund des Satzes II, aber nicht auf Grund des Satzes I, der nur auf den hier ausgeschlossenen Fall $m = 1$, d. h. auf die 2. Aufgabe anwendbar ist.

5. Aufgabe. *Man löse die* 3. *Aufgabe mit den folgenden zwei Änderungen:*

I. *Anstelle der Bedingung* (20) *hat die gegebene Zahlenfolge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *nur der folgenden, weniger einschränkenden zu genügen: die Zahlen* $a_1, a_2, \ldots$ *sind voneinander und von* 0 *verschieden, nach nichtabnehmenden absoluten Beträgen numeriert* (so daß $0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots$), *liegen in der offenen Kreisfläche* $|z| < \varrho$ *und haben daselbst keinen Häufungspunkt.* (Wenn $\varrho = \infty$, ist die punktierte Ebene als Kreisfläche zu betrachten.)

II. *Die gesuchte Koeffizientenfolge* $u_0, u_1, \ldots$ *wird der weiteren Bedingung unterworfen, daß die ersten* m_0 *Glieder* $u_0, u_1, \ldots u_{m_0}$ *vorgeschriebene Werte annehmen.*

Durch die Änderungen I und II wird das Interpolationsproblem von Einschränkungen befreit, die in der 3. Aufgabe noch vorhanden waren und auf eine besondere Berücksichtigung des Nullpunktes hinausliefen: Die durch (20) ausgedrückte Einschränkung, daß zwei verschiedene Interpolationspunkte verschiedene Abstände vom Nullpunkt haben sollen, wird durch I aufgehoben, und es wird durch II auch der Nullpunkt als Interpolationspunkt zugelassen.

Wir setzen in (21) für $f(z)$ die Reihe (17) ein, schaffen die mit u_0, $u_1, \ldots u_{m_0}$ behafteten Glieder auf die rechte Seite und erhalten so ein Gleichungssystem für u_k mit $k > m_0$. Betreffs die Anordnung der Gleichungen sei festgesetzt, daß von zwei Gleichungen, die Interpolationspunkten mit verschiedenen absoluten Beträgen entsprechen, die dem Punkt mit kleinerem Betrag entsprechende zuerst kommt. Von zwei Gleichungen, die Interpolationspunkten mit gleichen absoluten Beträgen entsprechen, kommt diejenige zuerst, welche einer Ableitung von niedrigerer Ordnung entspricht. Diejenigen Gleichungen, welche Interpolationspunkten von gleichem Betrag und Ableitungen von gleicher Ordnung entsprechen, gehören zu derselben Schicht (im Sinne der Nr. 3), und es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge sie innerhalb dieser Schicht angeordnet werden. Bei dieser Schichtung genügt das Gleichungssystem (21) der Bedingung B''; es genügt ferner der Bedingung A. Der Beweis dieser Behauptungen wiederholt nur Überlegungen, die wir bei den Aufgaben 3. und 4. schon anstellten und darf hier übergangen werden. Die Lösbarkeit der 5. Aufgabe kann also auf den Satz II gegründet werden. (Sie kann übrigens auch mittels einer linearen Transformation des Kreises $|z| < \varrho$ in sich selbst auf die Lösbarkeit der 3. Aufgabe zurückgeführt werden.)

6.

Es mögen einige allgemeine Bemerkungen über die Bedingungen A, B, B', B'' und die durch sie charakterisierten Gleichungssysteme diese Arbeit beenden.

1. Nehmen wir an, daß die durch die Bedingung A für beliebige n und q geforderte Eigenschaft für ein bestimmtes n und ein bestimmtes q vorliegt. Es soll also in der Teilmatrix, die aus der vollen Matrix (a_{jk}) durch Weglassen der ersten q Kolonnen und aller Zeilen mit Ausnahme der ersten n entsteht, eine n-zeilige Determinante $\neq 0$ geben. Wenn wir diese Determinante nach den Minoren aus gewissen m Zeilen entwickeln $(1 \leqq m \leqq n - 1)$, müssen wir mindestens einen solchen von 0 verschiedenen Minor antreffen. Hieraus sehen wir, daß wenn die durch die Bedingung A geforderte Eigenschaft für n Zeilen vorliegt, sie auch für m Zeilen, $1 \leqq m < n$, zutrifft. Wir sehen ferner: Wenn eine Matrix die Bedingung A erfüllt, und beliebig geschichtet ist, gibt es in jeder ihrer Schichten eine im Sinne der Nr. 3 ausgezeichnete Kolonnenfolge. Wir sehen schließlich, daß die Bedingung A von der Reihenfolge der Zeilen unabhängig ist, bei einer Umnumerierung der Gleichungen des Systems erhalten bleibt. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied der Bedingungen A und B.

Diese beiden Bedingungen stimmen hingegen darin überein, daß sie erhalten bleiben, wenn man von der Matrix (a_{jk}) endlich viele Kolonnen wegläßt. Beide Bedingungen gehen im allgemeinen völlig verloren, wenn man die Zeilen und die Kolonnen der Matrix vertauscht.

2. Wenn die Bedingung B durch die weniger fordernde Bedingung B' oder durch die noch weniger fordernde B'' ersetzt wird, geht die Richtigkeit des Satzes I nicht verloren. Wenn aber die Bedingung B ohne jeden Ersatz weggelassen wird, entsteht aus Satz I eine falsche Aussage. Dies soll durch ein Beispiel belegt werden.

Wenn die Gleichungen

$$f(1) = b_0\,,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = b_1\,,\ f\left(\frac{2}{3}\right) = b_2\,,\ \ldots f\left(\frac{n}{n+1}\right) = b_n\,,\ \ldots \tag{23}$$

als ein unendliches System von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihe (17) aufgefaßt werden (wie es in Nr. 5 wiederholt geschah), so entsteht ein System, das der Bedingung A genügt (Vandermondesche Determinanten), aber der Bedingung B (oder B' oder B'') in keiner Anordnung genügt. Dieses System besitzt nämlich nicht bei beliebig vorgegebenen rechten Seiten eine Lösung $u_0, u_1, u_2, \ldots$, z. B. dann nicht, wenn $b_0 = 1$ und $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$ ist. Die Existenz einer Folge von Koeffizienten $u_0, u_1, u_2, \ldots$, mit welchen die Potenzreihe (17) die Bedingungen (23), $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = \cdots = 0$ gesetzt, erfüllte, also insbesondere im Punkte $z = 1$ konvergent wäre (absolute Konvergenz muß hier gar nicht gefordert werden) und in diesem Punkte den Wert 1 annähme, welcher ja nicht Grenzwert einer Folge von Nullen sein kann — die Existenz einer solchen Koeffizientenfolge würde einen Verstoß gegen den Abelschen Stetigkeitssatz der Potenzreihen bedeuten, ist also ausgeschlossen.

3. Das Gleichungssystem (1), das den Bedingungen A und B (oder B' oder B'') genügt, ist in hohem Grade unbestimmt, wenn von den Unbekannten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ nur Befriedigung der Gleichungen mit absolut konvergenten linken Seiten und nichts mehr gefordert wird[8]). Nur dank dieser Unbestimmtheit konnte uns das Verfahren der Nr. 2 gelingen, das ja sehr willkürlich vorgeht und über die ursprüngliche Bedingung weit hinausgehende Zusatzbedingungen auferlegt. Man kann die im Verfahren der Nr. 2 steckende Willkürlichkeit auf verschiedene Arten unterstreichen; z. B. kann man, wie es leicht aus Nr. 2 ersichtlich, eine dem System genügende Folge $u_0, u_1, \ldots$ konstruieren, worin die von 0 verschiedenen Glieder die Dichte 0 haben. (Das heißt der Prozentsatz der von 0 verschiedenen unter $u_1, u_2, \ldots u_n$ strebt für $n \to \infty$ gegen 0.)

Daß es unendlich viele linear unabhängige Lösungen $L_1, L_2, L_3, \ldots$ gibt, geht schon daraus hervor, daß die Bedingungen A, B, B', B'' bei Weglassen einer beliebigen endlichen Anzahl von Kolonnen unverändert bestehen bleiben. Daher kann man nämlich den Wert für eine beliebige endliche Anzahl von Unbekannten willkürlich vorschreiben. Nennen wir also Lösung L_n eine solche, worin

$$u_0 = u_1 = \cdots = u_{n-1} = 0, \; u_n = 1$$

ist, so sind die Lösungen $L_1, L_2, \ldots L_n, \ldots$ ersichtlicherweise linear unabhängig.

---

[8]) Poincaré deckt a.a.O.[4]) die Unbestimmtheit des Systems (16) auf.

Speziell sind die in Nr. 5 betrachteten funktionentheoretischen Aufgaben 2.—5. hochgradig unbestimmt. Wir können z. B. nach einer eben gemachten Bemerkung, alle diese Aufgaben durch eine Potenzreihe mit der Koeffizientendichte 0 befriedigen (oder durch Potenzreihen, die noch weitergehenden „Lückenbedingungen" genügen); hieraus könnte man weiter, auf die Existenz von Lösungen mit allerlei singulären Eigenschaften schließen. Bei der Interpolationsaufgabe (Aufgaben 3. und 5.) kann man die Mannigfaltigkeit der Lösungen funktionentheoretisch einigermaßen überblicken (alle Lösungen ergeben sich aus einer bestimmten durch Hinzuaddieren des Produktes einer genau auf den Interpolationsstellen mit der betreffenden Multiplizität verschwindenden Funktion mit einer willkürlichen). Vom Standpunkte des unendlichen linearen Gleichungssystems können wir die Mannigfaltigkeit der Lösungen noch gar nicht überblicken; wir haben über diese Systeme eben nur eine isolierte Bemerkung, keine Theorie.

4. Die Bedingung B'' macht die Bedingung A nahezu überflüssig: *Wenn B'' erfüllt ist und die erste Schicht der Matrix (a_{jk}) eine ausgezeichnete Kolonnenfolge besitzt (und somit unendlich viele nichtverschwindende Determinanten enthält, deren Seitenzahl der Schichtdicke gleich ist), so ist auch A erfüllt.* Ich beweise nur den Spezialfall: *Wenn B' erfüllt ist und die erste Zeile der Matrix unendlich viele nichtverschwindende Elemente enthält, so ist auch A erfüllt.* Gäbe es nämlich in den ersten n Zeilen hinter der q-ten Kolonne keine von 0 verschiedene n-zeilige Determinante, so gäbe es n Zahlen $c_1, c_2, \dots c_n$, die nicht alle 0 und so beschaffen sind, daß für $k > q$

$$c_1 a_{1k} + c_2 a_{2k} + \cdots + c_n a_{nk} = 0 \quad .$$

Es würde aber hieraus, für $k \to \infty$, wegen B' zuerst $c_n = 0$, dann $c_{n-1} = 0, \dots$ schließlich $c_2 = 0$ folgen, und am Ende, da doch unendlich viele $a_{1k} \neq 0$ sind, auch $c_1 = 0$: Widerspruch! Dies führt uns zur folgenden prägnanteren Fassung des Satzes I: *Wenn B' besteht und nicht alle $a_{1k} = 0$ sind, so ist das System* (1) *mit absolut konvergenten linken Seiten auflösbar.*

(Eingegangen den 10. November 1938.)