Über die mittlere mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone.

Über die mittlere mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone[1])

Von H. HADWIGER, Bern

1. Es bezeichne A die Gesamtheit aller Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $|\mathfrak{a}| = 1$, die im dreidimensionalen Vektorraum im Ursprung beginnen. Als *Vektordichte* $\dot{\mathfrak{a}}$ wählen wir die zweidimensionale Punktdichte auf der Einheitskugel, auf der alle Endpunkte der Vektoren von A liegen. Mit N beliebig aus A herausgegriffenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_N$ bilden wir ein im Ursprung beginnendes *Polygon* $P_N : \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_N$.

Ist $F\{P_N\}$ eine Funktion dieses Polygons, so soll das Integral

$$\overline{F} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int F\{P_N\}\, \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_N \tag{1}$$

Mittelwert der Funktion F heißen. Dabei soll bei der Integration jeder Seitenvektor $\mathfrak{a}_\nu$ unabhängig den ganzen Vorrat A durchlaufen. Die Existenz des Integrals in (1) wird vorausgesetzt.

Ist $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor, so versteht man unter der *Stützfunktion* $p(\mathfrak{e})$ des Polygons P_N die nicht negative Zahl

$$p = \mathrm{Max}\,\{0, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1), (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_2), \ldots (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_2) + \cdots + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_N)\}\,. \tag{2}$$

Es ist der Abstand des Ursprungs von der *Stützebene* von P_N deren Normalvektor $\mathfrak{e}$ ist. (Der Normalvektor einer Ebene zeigt in den den Ursprung nicht enthaltenden Halbraum.)

Die Summe

$$B(\mathfrak{e}) = p(\mathfrak{e}) + p(-\mathfrak{e})$$

nennen wir die Breite von P_N in der Richtung $\mathfrak{e}$.

---

[1]) Die Anregung zu der in dieser Note behandelten Fragestellung verdanke ich Herrn *R. Signer* in Bern, der mich in freundlicher Weise darüber orientierte, wie man in der Kolloidchemie auf derartige Probleme stößt, falls man versucht das Verhalten sogenannter fadenförmiger Moleküle in Lösungen nach rein mathematisch-statistischen Gesichtspunkten zu begründen. So bestimmte *W. Kuhn* (Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen, Kolloid-Zeitschrift 68, 1934) die mittlere Distanz von Anfangs- und Endpunkt. Mit Hilfe der mittleren mittleren Breite der zufallsartig gestalteten Polygone, deren Berechnung hier durchgeführt werden soll, kann die mittlere Raumerfüllung solcher Fadenmoleküle abgeschätzt werden.

Als *mittlere Breite* bezeichnet man den Integralwert

$$\overline{B} = \frac{1}{4\pi}\int B(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}} = \frac{2}{4\pi}\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}}\ , \tag{3}$$

wo das Integral über die Endpunktseinheitskugel von $\mathfrak{e}$, kurz über alle $\mathfrak{e}$, zu erstrecken ist. In dieser Note soll nun der Mittelwert $\overline{\overline{B}}_N$ der Polygonfunktion $F\{P_N\} = \overline{B}$ berechnet werden. Wir nennen $\overline{\overline{B}}_N$ die *mittlere mittlere Breite* des zufallsartig gestalteten Polygons.

Es ist also nach Definition (1) das folgende Integral zu ermitteln:

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N+1}\int\left\{\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}}\right\}\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N\ . \tag{4}$$

Vertauschen wir noch die Integrationsreihenfolge und beachten, daß der Wert

$$\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N$$

als Funktion von $\mathfrak{e}$ wegen der allseitigen Symmetrie eine Konstante ist, so folgt

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N\ . \tag{5}$$

2. Wir führen nun eine Hilfsfunktion ein, die die Anzahldichte von Polygonen P_N bezeichnet, deren normale Projektionspolygone auf einer festen Geraden der Richtung $\mathfrak{e}$ gewissen Bedingungen genügen. Es sei $x > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha > x$ und

$$F_N[x,\alpha]\,dx = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N \tag{6}$$

integriert über alle Polygone P_N für die

$$x < (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\,\mathfrak{e}) \leqq x + dx \tag{a}$$

$$\operatorname{Max}\{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}),\ (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{e}), \ldots (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\mathfrak{e})\} \leqq \alpha \tag{b}$$

ausfällt.

Das Integral in (6) kann nun wie folgt zerlegt werden:

$$F_N[x,\alpha]\,dx = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int\limits_{x-1}^{\operatorname{Min}\{x+1,\alpha\}}\frac{1}{d\xi}\left\{\int\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_{N-1}\int\dot{\mathfrak{a}}_N\right\}d\xi,\ (N \geqq 2)$$

wo das Integral

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_{N-1}$$

über alle Polygone P_{N-1} zu erstrecken ist, für die

$$\xi < (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_{N-1}\,\mathfrak{e}) \leqq \xi + d\xi \tag{a}$$

$$\operatorname{Max}\{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}),\ (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{e}),\ \ldots\ (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_{N-1}\,\mathfrak{e})\} \leqq \alpha \tag{b}$$

und das Integral

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_N$$

über alle $\mathfrak{a}_N$ für die

$$x - \xi < (\mathfrak{a}_N\,\mathfrak{e}) \leqq x - \xi + dx$$

gilt, so daß

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_N = 2\pi\, dx$$

ist.

Hieraus ergibt sich die Funktionalrekursion

$$F_N[x,\alpha] = \frac{1}{2} \int\limits_{x-1}^{\operatorname{Min}\{x+1,\alpha\}} F_{N-1}[\xi,\alpha]\, d\xi\ ,$$

oder

$$F_N\,[x,\alpha] = \frac{1}{2}\int\limits_{x-1}^{x+1} F_{N-1}\,[\xi,\alpha]\, K\,[\xi,\alpha]\, d\xi\ , \quad (N \geqq 2) \tag{7}$$

wo

$$K\,[\xi,\alpha] = \begin{cases} 1 & \xi \leqq \alpha \\ 0 & \xi > \alpha \end{cases}$$

ist. Nach Definition (6) wird

$$F_1\,[x,\alpha]\, dx = \frac{1}{4\pi}\int \dot{\mathfrak{a}}_1$$

integriert über alle Vektoren $\mathfrak{a}_1$ für die

$$x < (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) \leqq x + dx \tag{a}$$

$$(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) \leqq \alpha \tag{b}$$

ist. Das auftretende Integral ist gleich der Mantelfläche einer Zone der Dicke dx der Einheitskugel, wenn $-1 \leqq x < \operatorname{Min}\{\alpha, 1\}$ und 0 wenn $x < -1$ oder $x \geqq \operatorname{Min}\{\alpha, 1\}$ ist. Es wird demnach

$$F_1\,[x,\alpha] = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leqq x < \operatorname{Min}\{\alpha, 1\} \\ 0 & \operatorname{Min}\{\alpha, 1\} \leqq x\ . \end{cases} \tag{8}$$

Unter Verwendung von (7) und (8) können nun die Hilfsfunktionen $F_N\,[x,\alpha]$ rekursiv berechnet werden.

N	$2^N (N-1)!\, F_N[x,\alpha]$	x	α
1	0	$-\infty < x < -1$	$0 \leqq \alpha < 1$
	1	$-1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -1$	$1 \leqq \alpha < \infty$
	1	$-1 \leqq x < 1$	
	0	$1 \leqq x < \alpha$	
2	0	$-\infty < x < -2$	$0 \leqq \alpha < 1$
	$2+x$	$-2 \leqq x < \alpha-1$	
	$1+\alpha$	$\alpha-1 \leqq x < 0$	
	$1+\alpha-x$	$0 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -2$	$1 \leqq \alpha < 2$
	$2+x$	$-2 \leqq x < 0$	
	$2-x$	$0 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -2$	$2 \leqq \alpha < \infty$
	$2+x$	$-2 \leqq x < 0$	
	$2-x$	$0 \leqq x < 2$	
	0	$2 \leqq x < \alpha$	
3	0	$-\infty < x < -3$	$0 \leqq \alpha < 1$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < \alpha-2$	
	$5+4\alpha-\alpha^2+2\alpha x+2x$	$\alpha-2 \leqq x < -1$	
	$3+4\alpha-\alpha^2+2\alpha x-2x-2x^2$	$-1 \leqq x < \alpha-1$	
	$2+4\alpha-2x-x^2$	$\alpha-1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$1 \leqq \alpha < 2$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < \alpha-1$	
	$3+4\alpha-\alpha^2-2x-x^2$	$\alpha-1 \leqq x < 1$	
	$5+4\alpha-\alpha^2-6x+x^2$	$1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$2 \leqq \alpha < 3$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < 1$	
	$9-6x+x^2$	$1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$3 \leqq \alpha < \infty$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < 1$	
	$9-6x+x^2$	$1 \leqq x < 3$	
	0	$3 \leqq x < \alpha$	

Es bezeichne nun weiter

$$f_N(\alpha) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_N \qquad (\alpha > 0) \tag{9}$$

integriert über alle Polygone für die

$$\text{Max}\,\{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}), (\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\mathfrak{e}), \ldots (\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\mathfrak{e})\} \leqq \alpha$$

ist. Ein Vergleich mit (6) lehrt, daß

$$f_N(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} F_N[x, \alpha]\, dx \tag{10}$$

sein wird. Die neue Hilfszahl $f_N(\alpha)$ läßt sich als *geometrische Wahrscheinlichkeit* deuten, dafür daß das zufallsartig gestaltete Polygon P_N ganz in dem vorgegebenen Halbraum liegt, der den Ursprung enthält und von der auf $\mathfrak{e}$ normalen Ebene im Abstand α vom Ursprung begrenzt ist.

Beachtet man, daß die Integration in (9) über alle Polygone erstreckt wird, deren Stützfunktion $p(\mathfrak{e})$ die Ungleichung

$$p(\mathfrak{e}) \leqq \alpha \tag{11}$$

erfüllen, so kann nun der Mittelwert in (5) durch die Hilfsfunktion (9) dargestellt werden. Offenbar gilt

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\int_0^{\infty} \alpha\, f'_N(\alpha)\, d\alpha\ . \tag{12}$$

Wegen $f'_N(\alpha) = 0$ für $\alpha > N$ ist nach einer geläufigen Umformung

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left\{ N - \int_0^N f_N(\alpha)\, d\alpha \right\}\ . \tag{13}$$

Aus den weiter unten mitgeteilten ersten Hilfsfunktionen rechnet man nach Definiton (10) aus:

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1+\alpha}{2} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ 1 & (1 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{3+4\alpha}{8} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ \dfrac{4+4\alpha-\alpha^2}{8} & (1 \leqq \alpha < 2) \\ 1 & (2 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

$$f_3(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{15+21\alpha+3\alpha^2-\alpha^3}{48} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ \dfrac{17+27\alpha-6\alpha^2}{48} & (1 \leqq \alpha < 2) \\ \dfrac{21+27\alpha-9\alpha^2+\alpha^3}{48} & (2 \leqq \alpha < 3) \\ 1 & (3 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

Für die ersten drei mittleren Breiten gewinnt man hieraus die Werte

$$\begin{aligned} \overline{\overline{B}}_1 &= \frac{1}{2} = 0{,}500\ldots \\ \overline{\overline{B}}_2 &= \frac{5}{6} = 0{,}833\ldots \\ \overline{\overline{B}}_3 &= \frac{53}{48} = 1{,}104\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

3. Die maximale mittlere Breite des Polygons P_N ist $\frac{N}{2}$, die dann auftritt, wenn das Polygon ganz gestreckt ist. In der Folge leiten wir für die mittlere mittlere Breite die asymptotische Formel her

$$\overline{\overline{B}}_N = O(\sqrt{N}) \; . \tag{15}$$

Diese zeigt, daß die zufallsartige Gestaltung im Mittel eine „*Knäuelung*“ des Polygons erzeugt, indem seine Breiten gegen seine Gesamtlängen N klein werden.

Zunächst müssen wir das asymptotische Verhalten der Hilfsfunktionen $F_N[x, \alpha]$ studieren.

Da $K[x, \infty] = 1$ ist, gelten für die Funktionen $F_N[x, \infty]$ nach (7) die Rekursionen

$$F_N[x, \infty] = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} F_{N-1}[\xi, \infty]\, d\xi\,, \qquad (N \geqq 2) \tag{16}$$

oder als *Faltungsintegral* geschrieben.

$$F_N[x, \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} F_{N-1}[\xi, \infty]\, \Phi(x-\xi)\, d\xi\,, \tag{17}$$

wo

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0 & (-\infty < \xi < -1) \\ \frac{1}{2} & (-1 \leqq \xi < 1) \\ 0 & (1 \leqq \xi < \infty) \end{cases}$$

und

$$F_1[\xi, \infty] = \begin{cases} 0 & (-\infty < \xi < -1) \\ \frac{1}{2} & (-1 \leqq \xi < 1) \\ 0 & (1 \leqq \xi < \infty) \end{cases}$$

ist. Aus (17) folgt dann

$$\begin{aligned} &F_N[x, \infty] = 0 \quad \text{für} \quad |x| > N \\ &F_N[x, \infty] = F_N[-x, \infty]\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Unterwerfen wir die in der Faltungsrelation (17) auftretenden Funktionen der *Fourierschen Transformation*

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_N[\xi, \infty] \cos x\xi\, d\xi\,,$$

$$\mathfrak{F}\{\Phi, x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \cos x\xi\, d\xi\,,$$

wobei noch (18) berücksichtigt wird, so gilt nach dem bekannten *Faltungssatz*[2]):

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \mathfrak{F}\{F_{N-1}, x\} \cdot \mathfrak{F}\{\Phi, x\}\,,$$

und da $F_1 = \Phi$ ist, wird

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = (\mathfrak{F}\{\Phi, x\})^N\,.$$

---

[2]) Vgl. etwa *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, J. Springer, 1937, S. 162.

Nun ist aber

$$\mathfrak{F}\{\Phi, x\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\ x\xi\, d\xi = \frac{\sin x}{x} ,$$

so daß

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^N$$

folgt. Nach der Umkehrungsformel der Fourierschen Transformation ist

$$F_N[x, \infty] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^N \cos\ x\xi\ d\xi\ . \tag{19}$$

Für das hier auftretende Integral kann der asymptotische Wert für große N nach *G. Pólya*[3]) u. a. angegeben werden. Es resultiert dann

$$F_N\ [x, \infty] \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi N}}\ e^{-\frac{3x^2}{2N}}\ . \tag{20}$$

Projeziert man das Polygon P_N auf die Gerade g der Richtung $\mathfrak{e}$ so kann $F_N[x, \infty]$ imterpretiert werden als Wahrscheinlichkeitsdichte für die x-Koordinate des Endpunktes des linearen Polygons auf g. Die asymptotische Formel (20) kann nun dahin gedeutet werden, daß bei großem N die Position des Endpunktes auf g dem gleichen Wahrscheinlichkeitsgesetze unterliegt, wie die Endlage eines auf g linear diffundierenden Partikels nach Ablauf der Zeit N, der sich zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ befand, wenn als linearer Diffusionskoeffizient

$$D = \frac{1}{6} \tag{21}$$

angenommen wird. Ausgehend von dieser Deutung identifizieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$F_N[x, \alpha]$$

mit der Positionsdichte des gleichen Partikels wie oben, dessen Diffusionsbewegung auf g aber noch der Zusatzbedingung unterworfen ist, daß der Partikel ausscheidet, falls er die Grenzkoordinate $x = \alpha$ überschreitet. Diese Ausscheidebedingung entspricht genau der Vorschrift, wonach bei der Integration in (6) nur diejenigen Polygone zugelassen werden, deren

---

[3]) *G. Pólya*, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74 (1913), S. 204—212.

Projektionspolygone auf g ganz auf einer Seite des Grenzpunktes $x = \alpha$ liegen.

Nach einem geläufigen Ansatz erhalten wir demnach

$$F_N[x, \alpha] \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi N}} \left\{ e^{-\frac{3x^2}{2N}} - e^{-\frac{3(2\alpha - x)^2}{2N}} \right\} . \tag{22}$$

Für

$$f_N(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} F_N[x, \alpha]\, dx$$

erreicht man nach einigen Umformungen

$$f_N(\alpha) \sim \frac{2}{\sqrt{N}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{3}{2N}}} e^{-u^2} du ,$$

und hieraus für die mittlere mittlere Breite

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\int_0^{\infty} \alpha\, f_N'(\alpha)\, d\alpha$$

den asymptotischen Ausdruck

$$\overline{\overline{B}}_N \sim \sqrt{\frac{8N}{3\pi}} = 0{,}9213\sqrt{N} . \tag{23}$$

(Eingegangen den 16. Februar 1939.)