

Interpolationsverfahren zur Integrationsmethode von Meißner.

Autor(en): **Völlm, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **11 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11895>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Interpolationsverfahren zur Integrationsmethode von Meißner

Von E. VÖLLM, Zürich

1. Einleitung.

Der Integrationsmethode von Meißner für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung liegt die Deutung einer Funktion $p = p(u)$ als Stützfunktion einer Kurve zugrunde¹⁾. Ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$p'' = f(u, p, p') \quad (1)$$

gegeben, so läßt sich das Linienbild der Lösung zu gegebenen Anfangswerten dank der einfachen Beziehung

$$\varrho(u) = p(u) + p''(u) \text{ }^2) \quad (2)$$

für den Krümmungsradius $\varrho(u)$ leicht durch Kreisbögen annähern. Die Methode gibt eine Näherung 2. Ordnung für $p(u)$ und 1. Ordnung für $p'(u)$. Das von Meißner angegebene Interpolationsverfahren verbessert die Genauigkeit wesentlich, ohne jedoch die Ordnung der Annäherung zu erhöhen. Im folgenden wird eine Modifikation des Interpolationsverfahrens geschildert, die den Grad der Annäherung je um 1 erhöht, also 3. Ordnung für p und 2. Ordnung für p' ist. Beispiele zeigen, daß das abgeänderte Verfahren bei unerheblich größerer Zeichenarbeit höhere Genauigkeit oder aber gleiche Genauigkeit bei geringerem Arbeitsaufwand ergibt.

2. Herleitung des Interpolationsverfahrens.

In einer Funktion $p = p(u)$ wird die Unabhängige u aufgefaßt als Winkel eines Strahles mit der Nullrichtung $0x$ (Fig. 1), der Funktionswert als Entfernung $0Q$ eines Lotes $g(u)$ zu diesem Strahl vom Nullpunkt 0 . $g(u)$ umhüllt eine Kurve C , das *Linienbild* der Funktion $p(u)$.

¹⁾ Meißner, E., Über die Integration von totalen Differentialgleichungen. Erschienen in der Schweiz. Bauzeitung, Bd. 62 (1913), Nr. 15 und 16, oder

Meißner, E., Graphische Analysis vermitteltst des Linienbildes einer Funktion. Verlag Schweiz. Bauzeitung, in Kommission bei Rascher & Cie., 1932. Die folgenden Hinweise beziehen sich auf letztere Publikation.

²⁾ Meißner, a. a. O., Seite 9.

Die Funktion heißt *Stützfunktion* von C . Ist P der Berührungspunkt der Geraden $g(u)$ mit dem Linienbild, so ergibt sich der Krümmungsradius $PP' = \varrho$ aus (2) ³⁾.

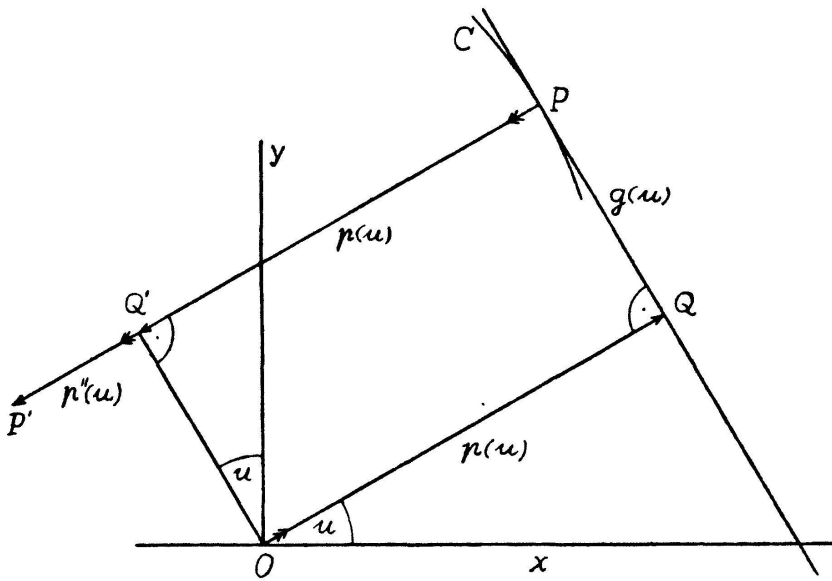


Fig. 1

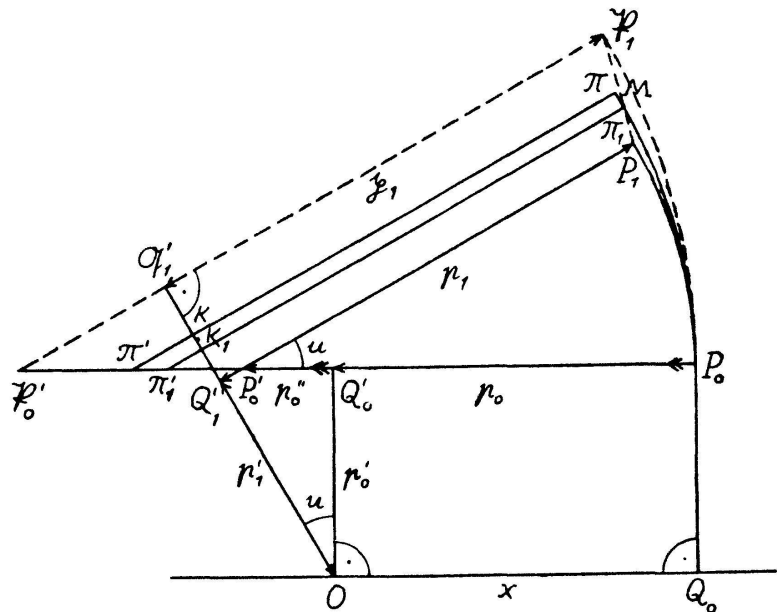


Fig. 2

Ist die Differentialgleichung (1) zu integrieren mit den Anfangswerten $p(0) = p_0$, $p'(0) = p'_0$, so hat das Integral ein Linienbild (Fig. 2) mit dem Anfangspunkt P_0 , dessen Koordinaten $x = p_0$, $y = p'_0$ sind. Nach (1) und (2) ist der Krümmungsradius hier

$$\varrho_0 = p_0 + f(0, p_0, p'_0)$$

und der Krümmungsmittelpunkt P'_0 hat die Koordinaten $x = -f(0, p_0, p'_0) = -p''_0$, $y = p'_0$. Von diesem Kreis nehmen wir einen Bogen von

³⁾ Für die Beweise und Einzelheiten, insbesondere bezüglich der Vorzeichendeutung, siehe die zitierte 2. Publikation.

willkürlichem Zentriwinkel u als Näherung des Linienbildes von $p(u)$. Bezeichnen wir mit P_1 seinen Endpunkt und mit Q'_1 den Fußpunkt des Lotes von O auf den Radius P'_0P_1 , so sind $P_1Q'_1 = p_1$ und $OQ'_1 = p'_1$ Näherungswerte für $p(u)$ und $p'(u)$. Ihnen entspricht ein neuer, der Differentialgleichung entnommener Wert

$$p''_1 = f(u, p_1, p'_1).$$

Zeichnen wir jetzt mit $P_0 \mathfrak{P}'_0 = p_1 + p''_1 = \varrho_1$ als Radius und \mathfrak{P}'_0 als Mittelpunkt einen zweiten Kreisbogen vom Zentriwinkel u , so erreichen wir einen Punkt \mathfrak{P}_1 . Ist Ω'_1 der Fußpunkt des Lotes von O auf $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}'_0$, so können $p_1 = \mathfrak{P}_1 \Omega'_1$ und $p'_1 = O \Omega'_1$ als andere Näherungswerte für $p(u)$ und $p'(u)$ gelten. Für die vier erwähnten Näherungswerte findet man an Hand der Fig. 2 folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_1 = P_1 Q'_1 &= P_1 P'_0 + P'_0 Q'_1 = p_0 + p''_0 + p'_0 \sin u - p''_0 \cos u \\ &= p_0 + p'_0 \sin u + p''_0 (1 - \cos u) \end{aligned} \quad (3)$$

$$p'_1 = O Q'_1 = p'_0 \cos u + p''_0 \sin u \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_1 = \mathfrak{P}_1 \Omega'_1 &= \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}'_0 + \mathfrak{P}'_0 \Omega'_1 = p_1 + p''_1 - Q'_0 \mathfrak{P}'_0 \cos u + p'_0 \sin u \\ &= p_1 + p''_1 - (p_1 + p''_1 - p_0) \cos u + p'_0 \sin u \\ &= p_0 \cos u + p'_0 \sin u + p_1 (1 - \cos u) + p''_1 (1 - \cos u) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_0 \cos u + Q'_0 \mathfrak{P}'_0 \sin u = p'_0 \cos u + (p_1 + p''_1 - p_0) \sin u \\ &= p'_0 \cos u + (p_1 - p_0) \sin u + p''_1 \sin u \end{aligned} \quad (6)$$

Um die Ordnung der mit diesen Werten erzielten Annäherung beurteilen zu können, wollen wir sie nach Potenzen der Unabhängigen u entwickeln und die Ergebnisse mit der Entwicklung des genauen Wertes $p(u)$ vergleichen. Für die beiden ersten Größen erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + p'_0 \left(u - \frac{u^3}{6} \dots \right) + p''_0 \left(\frac{u^2}{2} \dots \right) \\ &= p_0 + p'_0 u + p''_0 \frac{u^2}{2} - p'_0 \frac{u^3}{6} \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_0 \left(1 - \frac{u^2}{2} \dots \right) + p''_0 (u - \dots) \\ &= p'_0 + p''_0 u - p'_0 \cdot \frac{u^2}{2} - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Um auch p_1 und p_1' bis zur 3. bzw. 2. Ordnung zu entwickeln, betrachten wir zunächst

$$p_1'' = f(u, p_1, p_1')$$

und setzen voraus, daß die Funktion f in der Umgebung des Tripels $(0, p_0, p_0')$ nach Taylor entwickelbar sei. Da p_1'' in (5) mit $(1 - \cos u)$ und in (6) mit $\sin u$ multipliziert erscheint, wird es genügen, f bis zur 1. Ordnung zu entwickeln, um für p_1 und p_1' die gewünschte Ordnung zu erhalten.

Mit den Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u \quad \frac{\partial f}{\partial p} = f_p \quad \frac{\partial f}{\partial p'} = f_{p'} ,$$

wobei alle Werte der Ableitungen für das Tripel $(0, p_0', p_0'')$ zu nehmen sind, und unter Berücksichtigung von

$$f(0, p_0, p_0') = p_0''$$

erhalten wir:

$$p_1'' = p_0'' + f_u \cdot u + f_p(p_1 - p_0) + f_{p'}(p_1' - p_0') + \dots$$

oder, nach Verwertung von (7) und (8) bis zur 1. Ordnung:

$$p_1'' = p_0'' + (f_u + f_p p_0' + f_{p'} \cdot p_0'') u + \dots$$

Aus der Differentialgleichung (1) folgt aber, daß

$$f_u + f_p \cdot p_0' + f_{p'} p_0'' = p_1'''(0) = p_0'''$$

so daß

$$p_1'' = p_0'' + p_0''' \cdot u + \dots$$

ist. Mit diesem Ergebnis und (7) ergibt sich aus (5) die Entwicklung

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \left(1 - \frac{u^2}{2} \dots\right) + p_0' \left(u - \frac{u^3}{6} \dots\right) + (p_0 + p_0' u \dots) \left(\frac{u^2}{2} \dots\right) + \\ &\quad + (p_0'' + p_0''' u + \dots) \left(\frac{u^2}{2} \dots\right) \\ &= p_0 + p_0' \cdot u + p_0'' \cdot \frac{u^2}{2} + (2 p_0' + 3 p_0''') \frac{u^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

und aus (6) die Entwicklung

$$\begin{aligned} p_1' &= p_0' \left(1 - \frac{u^2}{2} \dots\right) + (p_0' u + \dots) (u + \dots) + (p_0'' + p_0''' u) (u + \dots) \\ &= p_0' + p_0'' u + (p_0' + 2 p_0''') \frac{u^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Nach (7) und (9) stimmen sowohl p_1 als auch p_1 mit dem genauen Wert

$$p(u) = p_0 + p_0' u + p_0'' \frac{u^2}{2} + p_0''' \cdot \frac{u^3}{6} + \dots$$

bis zur 2. Ordnung überein, während das folgende *gewogene Mittel*

$$\frac{2p_1 + p_1}{3} = p_0 + p_0' u + p_0'' \frac{u^2}{2} + \left(\frac{-2p_0' + 2p_0' + 3p_0'''}{3} \right) \frac{u^3}{6} + \dots$$

eine Näherung 3. Ordnung ist.

Entsprechend sind nach (8) und (10) p_1' und p_1' Näherungen 1. Ordnung für den genauen Wert

$$p'(u) = p_0' + p_0'' u + p_0''' \frac{u^2}{2}$$

während der Mittelwert

$$\frac{p_1' + p_1'}{2} = p_0' + p_0'' u + \left(\frac{-p_0' + p_0' + 2p_0'''}{2} \right) \frac{u^2}{2}$$

bis zur 2. Ordnung richtig ist.

Sind in Fig. 2 π_1' und π' die Punkte, welche die Strecke $P_0'P_1'$ im Verhältnis 1:2 bzw. 1:1 teilen und $\kappa_1\pi_1$ das zwischen OQ_1' und P_1P_1 liegende Stück der Parallelen zu $P_0'P_1$ durch π_1' , dann ist

$$\kappa_1\pi_1 = \frac{2p_1 + p_1}{3} \quad \text{und} \quad \pi_1'P_0 = \pi_1'\pi_1 = \frac{2\varrho_0 + \varrho_1}{3} .$$

Die durch π' gehende Parallele zu $P_0'P_1$ hat von O den Abstand

$$O\kappa = \frac{p_1' + p_1'}{2} .$$

Ist π die Projektion von π_1 auf diese Parallele, so wird $\kappa\pi = \kappa_1\pi_1$. Zusammenfassend erhalten wir also folgende

Konstruktion: Mit dem Radius $\varrho_0 = p_0 + f(0, p_0, p_0')$ und Mittelpunkt P_0' zeichne man den Probebogen $P_0'P_1$ von willkürlichem Zentriwinkel u . Aus den abgelesenen Näherungswerten p_1 und p_1' ergibt die Differentialgleichung einen neuen Radius $\varrho_1 = p_0 + f(u, p_1, p_1')$, dem

ein Krümmungsmittelpunkt \mathfrak{P}'_0 entspräche. Jetzt teile man $P'_0 \mathfrak{P}'_0$ im Verhältnis 1 : 2, mache $\pi'_1 \pi_1 = \pi'_1 P_0$ und parallel zu $P'_0 P_1$ und projiziere endlich π_1 auf die durch den Mittelpunkt π' von $P'_0 \mathfrak{P}'_0$ gehende Parallele zu $P'_0 P_1$ nach π . Die Gerade $\pi \pi_1$ mit Berührungspunkt π ist dann ein Element des gesuchten Linienbildes von p , und zwar näherungsweise 3. Ordnung für p und 2. Ordnung für p' . Schließen wir mit der Bemerkung, daß nach dem Verfahren von Meißner in Fig. 2 an Stelle von π der Punkt M treten würde.

3. Kontrollbeispiel.

Die Güte der Methode wurde an derselben Differentialgleichung von bekannter Lösung erprobt wie bei Meißner⁴⁾, nämlich an der Gleichung

$$p''(u) = p(u).$$

Mit den Anfangswerten $p(0) = p'(0) = A$ besitzt sie die Lösung $p(u) = A \cdot e^u$. Der Krümmungsradius des Linienbildes wird gemäß (2) $\varrho(u) = p(u) + p''(u) = 2p(u)$.

Ohne die Zeichnungen wiederzugeben, stellen wir die aus ihnen gewonnenen Messungsergebnisse zusammen und vergleichen sie mit den nach Meißner erhaltenen Werten. In den beiden folgenden Tabellen stehen die letzteren Zahlen in der Spalte „interpoliert M “, die dem eben dargelegten gewogenen Verfahren entsprungenen in der Spalte „interpoliert V “. Mit $A = 8$ cm und dem Intervall $\Delta u = \frac{\pi}{12} \sim 15^\circ$ ergaben sich:

u^0	Berechnet $p = p'$	Funktionswerte p interpoliert				Ableitung p' interpoliert			
		V	Fehler	M	Fehler	V	Fehler	M	Fehler
0	8,00	8,00	—	8,00	—	8,00	—	8,00	—
15	10,39	10,38	—0,01	10,40	+0,01	10,38	—0,01	10,39	—
30	13,50	13,51	+0,01	13,58	+0,08	13,49	—0,01	13,57	+0,07
45	17,55	17,58	—0,03	17,70	+0,15	17,55	—	17,66	+0,11
60	22,80	22,80	—	23,07	+0,27	22,80	—	23,01	+0,21

⁴⁾ Meißner, a. a. O., Seite 42/44.

Wir stellen also fest, daß die sehr guten Näherungswerte nach Meißner durch das neue Interpolationsverfahren noch erheblich verbessert werden. Während nämlich nach 4 Schritten der kumulative Fehler beim alten Verfahren 0,27 cm erreicht, bleibt er beim neuen im Bereich der Ablesegenauigkeit weniger Zehntelsmillimeter. Um die Größenordnung der Verbesserung gegenüber dem alten Verfahren besser abschätzen zu können, mußte darum ein Beispiel gewählt werden, das auch beim neuen Verfahren etwas größere, über der Ablesegenauigkeit liegende Fehler ergab. Zu diesem Zwecke wurde dieselbe Differentialgleichung mit $A=5$ cm und dem großen Intervall $\Delta u = \frac{\pi}{6} \sim 30^\circ$ integriert. Dies sind die Ergebnisse:

u°	Berechnet	Funktionswerte p interpoliert				Ableitung p' interpoliert			
		V	Fehler	M	Fehler	V	Fehler	M	Fehler
0	5,00	5,00	—	5,00	—	5,00	—	5,00	—
30	8,44	8,43	—0,01	8,58	+0,14	8,36	—0,08	8,36	—0,08
60	14,25	14,21	—0,04	14,64	+0,39	14,18	—0,07	14,27	+0,02
90	24,05	24,01	—0,04	24,98	+0,93	23,86	—0,19	24,22	+0,17

Der Vergleich zeigt, daß die gewogene Interpolation einen mindestens zehnmal kleineren Fehler ergibt als die ungewogene. Trotz dem großen Intervall von 30° liefert sie noch sehr gute Werte, während das alte Verfahren beträchtliche Fehler aufweist. Bei der Ableitung p' zeigt sich kein solcher Unterschied der Methoden. Hier ist der Fehler bei beiden Verfahren von gleicher Größenordnung. Die Erklärung ist darin zu suchen, daß das neue *beim einzelnen Schritt* nur für die Ermittlung von p , nicht aber von p' , vom alten abweicht.

(Eingegangen den 24. Mai 1939.)

