Sur les rotations barotropes des masses fluides hétérogènes

Par R. Wavre, Genève

Considérons une masse fluide en rotation autour d'un axe OZ. Les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton et décrivent des circonférences perpendiculaires à OZ et centrée sur cet axe. La vitesse angulaire ω peut varier d'un parallèle à un autre. L'équilibre relatif n'est qu'un cas particulier. Ces mouvements, nous les appelons des rotations permanentes[1]). Elles seront dites barotropes s'il existe une relation entre la densité ϱ et la pression, de la forme $\varrho = \varrho(p)$. Alors, en posant

$$\varphi = \int \frac{dp}{\varrho} \quad , \qquad \lambda = x^2 + y^2 ,$$

les équations du mouvement s'écrivent, U étant le potentiel newtonien,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2(\lambda)\, x \ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2(\lambda)\, y \ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} \ ;$$

la vitesse angulaire ne dépend dans ce cas que de la distance à l'axe. En dérivant encore une fois pour former le laplacien de φ, on trouvera facilement après usage de l'équation de Poisson

$$\Delta \varphi = -4\pi i \varrho(\varphi) + 2\omega^2(\lambda) + 2\lambda \frac{d\omega^2}{d\lambda} \ , \tag{1}$$

i étant la constante de la gravitation universelle.

Or ϱ ne dépend que de φ et ω que de λ; de sorte que l'équation précédente s'écrit

$$\Delta \varphi = f(\varphi) + \Psi(\lambda) \ . \tag{2}$$

On pourra supposer $\Psi(0) = 0$, car une constante peut toujours être incorporée à $f(\varphi)$.

Cette équation (2) est donc une conséquence des équations fondamentales. Elle est insuffisante pour les remplacer, bien entendu.

Mais, comme M. Volterra[2]) l'indiquait déjà, elle permet d'exclure certaines répartitions des surfaces d'égale densité. En 1903, l'illustre auteur

---

[1]) *R. Wavre,* Figures planétaires et géodésie, p. 27 et suivantes.

[2]) *V. Volterra,* Acta Mathematica, t. 27, p. 105.

démontrait qu'une figure d'équilibre hétérogène ne pouvait pas être stratifiée en ellipsoïdes homothétiques.

Nous voulons étendre à des cas plus généraux cette méthode. Si les surfaces d'égale densité, ou mieux d'égale φ (car ϱ peut être constant quand φ varie) sont données par

$$F(x, y, z, \varphi) = 0 \tag{3}$$

on a, par un calcul élémentaire,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \ ,$$

d'où en dégageant $\Delta \varphi$ et en le remplaçant par $f + \Psi$

$$\Delta F\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Sigma\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^3 (f + \Psi) = 0 \ . \tag{4}$$

Cette dernière équation doit être satisfaite quelles que soient les variables x, y, z, φ liées par (3). L'élimination de l'une d'elles, z par exemple, conduit à une nouvelle relation $G(x, y, \varphi) \equiv 0$ qui doit être identiquement vérifiée, dans toute la masse fluide.

Envisageons alors des ellipsoïdes concentriques de forme quelconque

$$\alpha(\varphi)x^2 + \beta(\varphi)y^2 + z^2 = h(\varphi) \ . \tag{3'}$$

L'équation (4) revêt la forme suivante où les termes en β et y non écrits sont semblables à ceux en α et x

$$\begin{aligned} &2(\alpha + \beta + 1)(\alpha' x^2 + \cdot - h')^2 - 8(\alpha' x^2 + \cdot - h')(\alpha\alpha' x^2 + \cdot) \\ &+ 4(\alpha'' x^2 + \cdot - h'')(\alpha^2 x^2 + \cdot + z^2) + (\alpha' x^2 + \cdot - h')^3 (f + \Psi) = 0 \ . \end{aligned} \tag{4'}$$

En éliminant z entre (3') et (4') on trouve facilement:

$$\begin{aligned} &2(\alpha + \beta + 1)(\alpha' X + \beta' Y - h')^2 - 8(\alpha' X + \beta' Y - h')(\alpha\alpha' X + \beta\beta' Y) \\ &+ 4(\alpha'' X + \beta'' Y - h'')[\alpha(\alpha - 1)X + \beta(\beta - 1)Y + h] + (\alpha' X + \beta' Y - h')^3 (f + \Psi) \equiv 0 \ , \end{aligned} \tag{5}$$

On a posé $x^2 = X$ et $y^2 = Y$.

1° Examinons tout d'abord *le cas de l'équilibre relatif:* $\omega =$ const., $\Psi(\lambda) \equiv 0$. Alors, les trois premiers termes de (5) sont d'ordre 2 en X et Y, le dernier d'ordre 3; donc on doit avoir

$$\alpha' = 0 \quad \beta' = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \text{constante} \ , \quad \beta = \text{constante} \ .$$

Alors, les ellipsoïdes sont homothétiques et l'on retombe dans le cas envisagé par M. Volterra. La démonstration s'achève d'ailleurs facilement; l'on aurait

$$2(\alpha+\beta+1)h'^2-4h''[\alpha(\alpha-1)X+\beta(\beta-1)Y+h]=h'^3 f\ .$$

D'où $\alpha=1$ et $\beta=1$ qui donneraient des sphères ou $h''=0$ et $f=$ constante.

La masse serait homogène.

Une figure d'équilibre hétérogène ne peut être stratifiée en ellipsoïdes concentriques. (Théorème de Hamy et Véronnet, démontré par ces auteurs en faisant usage des formules de l'attraction des ellipsoïdes.)

2° Cas des rotations barotropes $\Psi(\lambda)\neq 0$.

Le problème ici ne se pose que si le corps est de révolution. Donc $\alpha=\beta$ et les ellipsoïdes ont maintenant l'équation simplifiée:

$$\alpha(\varphi)\lambda+z^2=h(\varphi)\ .$$

Il suffit de remplacer dans (5) X par λ et de supprimer les termes en β et Y.

L'équation (5) est alors de la forme

$$P_2(\lambda,\varphi)+(\alpha'\lambda-h')^3(f+\Psi)\equiv 0\ .$$

P_2 est un polynôme de degré 2 en λ.

Eliminons Ψ en donnant à φ des valeurs φ et φ_0 quelconques:

$$P_2(\lambda,\varphi)(\alpha'\lambda-h')_0^3-P_2(\lambda,\varphi_0)(\alpha'\lambda-h')^3=(f_0-f)(\alpha'\lambda-h')_0^3(\alpha'\lambda-h')^3\ .$$

Supposons la masse hétérogène, alors $f\neq f_0$. En λ le second terme est d'ordre 6 le premier d'ordre 5 à moins que l'on ait

$$\alpha'=0\quad,\quad \alpha=\text{constante}\ .$$

Les ellipsoïdes *seraient de nouveau homothétiques.* Il paraît difficile de poursuivre sans invoquer, pour: $\Psi\neq 0$, le potentiel lui-même et non seulement son laplacien.

Il faudra donc achever la démonstration dans ce cas par le calcul du potentiel[3]). M. Dive y est parvenu comme l'on sait.

Donc: *Une masse hétérogène en rotation barotrope ne peut être stratifiée en ellipsoïde concentrique.*

[3]) Voir note page suivante.

Signalons enfin un cas plus général de surface de révolution où l'élimination d'une des variables se fait facilement. C'est celui où l'on aurait

$$P_n(\lambda, \varphi) + Z^2 = 0 \quad \text{avec} \quad P_n = a_0(\varphi) + a(\varphi)\lambda + \cdots + a_n(\varphi)\lambda^n .$$

Alors l'équation (5) revêt la forme

$$Q_{3n-1}(\varphi, \lambda) = [f(\varphi) + \Psi(\lambda)] \left(\frac{\partial P_n}{\partial \varphi}\right)^3 .$$

Le polynome Q étant de degré $3\,n - 1$. On peut encore ici exclure toute stratification de cette forme où le coefficient a_n ne serait pas constant.

---

[3]) On pourrait encore aller plus loin par la méthode précédente et réduire la difficulté qui résulte de l'emploi des formules du potentiel des ellipsoïdes homothétiques à un cas très spécial.

L'équation (5) s'écrit maintenant:

$$2\,\frac{2\alpha + 1}{h'} - 4h\,\frac{h''}{h'^3} - 4\alpha(\alpha - 1)\,\frac{h''}{h'^3}\,\lambda = f + \Psi .$$

Le coefficient de λ ne peut dépendre de φ.

On devrait donc avoir

$$-\frac{h''}{h'^3} = a = \text{constante} \quad \text{et} \quad \text{l'on peut intégrer.}$$

Comme on le vérifie facilement, la densité serait une fonction linéaire du carré du rayon polaire t de la surface de paramètre φ.

On aurait

$$\varrho = \varrho_0 - \frac{a}{8\pi i}(2\alpha + 3)\,t^2 \qquad (6) \qquad\qquad \frac{1}{t}\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{1}{t}\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 + \frac{a}{2}\,t^2 . \qquad (7)$$

L'indice zéro se rapporte à $t = 0$. Il suffit donc d'envisager cette loi (6) des densités et de la montrer incompatible avec (7) sur l'axe polaire, φ étant alors le potentiel newtonien.

(Reçu le 23 août 1938.)