Quelques théorèmes de géométrie.

Autor(en): **Kollros, Louis**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **11 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11878

Quelques théorèmes de géométrie

Par LOUIS KOLLROS, Zurich

Dans les § 1—4 nous démontrerons très simplement quelques théorèmes que Steiner a énoncés sans démonstration et nous ajouterons au § 5 une propriété de la congruence des tangentes à deux sphères.

Nous considérerons 4 familles de coniques déterminées par 2 cercles du plan (ou plus généralement par 2 coniques quelconques): le faisceau ponctuel (§ 1), le faisceau tangentiel (§ 2), les cercles tangents aux 2 cercles donnés c et c' et les suites récurrentes qu'ils peuvent former (§ 3), enfin les coniques bitangentes à c et c' qui se répartissent en 3 séries, les coniques d'une même série touchant les 2 cercles en 4 points alignés 2 à 2 sur l'un des 3 sommets de leur triangle polaire commun; au § 4 nous n'envisagerons qu'une de ces séries, celle qui interviendra dans le § 5.

§ 1. Faisceau ponctuel de cercles

Désignons par $c = o$ et $c' = o$ les équations ponctuelles des 2 cercles donnés; toutes les coniques du faisceau ponctuel qu'ils déterminent sont aussi des cercles ayant pour équation $c - \lambda c' = o$; nous appellerons c_λ le cercle qui correspond à la valeur λ du paramètre. L'équation $\frac{c}{c'} = \lambda$ montre que *le cercle c_λ est le lieu géométrique des points dont les puissances par rapport aux 2 cercles donnés ont un rapport constant $\lambda = k^2$*, ou dont les tangentes à c et c' ont le rapport k.

Les cercles c (centre O), c' (centre O') et leur axe radical c_1 (centre O_∞) correspondent respectivement à $\lambda = 0$, ∞, et 1; le centre M' de c_λ aura la coordonnée projective λ par rapport au point-unité O_∞, au point-zéro O et au point-infini O'; donc:

$$(M' O_\infty O O') = \frac{M' O}{M' O'} = \lambda \, . \qquad \text{Ainsi :}$$

Le centre M' de c_λ divise le segment OO' dans le rapport $\lambda = \frac{M'O}{M'O'}$.

Le cercle c_{-1} du faisceau est réel si c et c' se coupent en 2 points réels; son centre est le milieu M de OO'; c_{-1} est le lieu des points P dont les puissances par rapport à c et c' sont égales et de signes contraires; si la perpendiculaire t en P à la droite PO coupe le cercle c aux points A et B et c' en A' et B', on aura:

$$PA \cdot PB = - PA' \cdot PB' \quad \text{ou} \quad (ABA'B') = -1 \, .$$

Quand P varie sur le cercle c_{-1}, la droite t enveloppe une conique de foyers O et O' dont c_{-1} est le cercle principal; cette conique (enveloppe des droites t qui sont coupées harmoniquement par c et c') touche aussi les tangentes à c et c' en leurs 4 points communs. Cette propriété projective reste vraie si c et c' sont des coniques quelconques. On voit donc que:

L'enveloppe des droites coupant harmoniquement deux coniques c et c' est une conique $\bar{h}$ qui touche les huit tangentes à c et c' en leurs points communs.

$\bar{h}$ est la *conique harmonique tangentielle* ou *conique contravariante* de c et c'.

En particulier, si c' dégénère en 2 droites isotropes issues d'un point F, on a le théorème:

„Les cordes d'une conique c vues d'un point F sous un angle droit, enveloppent une conique $\bar{h}$ ayant F pour foyer et sa polaire par rapport à c pour directrice."

Si F est le centre de c, l'enveloppe $\bar{h}$ est un cercle concentrique.

Corrélativement:

Le lieu des points tels que les tangentes menées à deux coniques $\bar{c}$ et $\bar{c}'$ forment un groupe harmonique est une conique h qui passe par les huit points de contact des tangentes communes à $\bar{c}$ et $\bar{c}'$. h est la *conique harmonique ponctuelle* ou *conique covariante* de $\bar{c}$ et $\bar{c}'$.

Si $\bar{c}'$ se réduit aux 2 points cycliques du plan, h est le cercle orthoptique de la conique $\bar{c}$.

Un autre cercle de la famille c_λ est celui qui a pour diamètre le segment limité par les 2 centres de similitude I (intérieur) et E (extérieur) des 2 cercles donnés; c'est le *cercle de similitude* s de c et c'; il correspond à la valeur $k = \frac{r}{r'}$ ou $\lambda = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$, r et r' désignant les rayons des cercles c et c'. Puisque les tangentes menées d'un point quelconque de s aux 2 cercles c et c' sont proportionnelles aux rayons, on voit que:

Le cercle de similitude de deux cercles donnés est le lieu des points d'où l'on voit ces cercles sous le même angle.

Parmi les cercles c_λ il y en a 3 qui dégénèrent en paires de droites: l'un se compose de l'axe radical et de la droite à l'infini, les 2 autres sont des cercles de rayon nul (paires de droites isotropes) de centres Y et Z. Si X désigne le point à l'infini de l'axe radical, XYZ est le triangle polaire commun à tous les cercles c_λ. En général, le lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel est une conique circonscrite au triangle polaire commun; pour un faisceau de cercles, cette conique lieu des centres se réduit à la droite OO' et la droite à l'infini.

§ 2. Faisceau tangentiel déterminé par deux cercles

Cette famille comprend toutes les coniques $\bar{c}_\lambda$ inscrites au quadrilatère des 4 tangentes communes aux 2 cercles donnés c et c'; il y en a 3 qui dégénèrent en paires de points. Le lieu des centres de ces coniques étant la droite OO', on pourra faire correspondre à chacun des cercles c_λ du § 1, la conique $\bar{c}_\lambda$ qui a le même centre; au cercle de similitude correspond la paire de points I et E; à l'axe radical c_1 correspondra la seule parabole $\bar{c}_1$ du faisceau tangentiel; son foyer est le milieu M du segment OO'. Soit P un point quelconque de l'axe radical et t la perpendiculaire en P à la droite PM; t détermine sur c et c' des cordes $2s$ et $2s'$ (réelles ou imaginaires). Si a et a' sont les distances de P aux milieux de ces cordes, on aura $a = a'$ puisque M est le milieu de OO' et $(a+s)\,(a-s) = (a'+s')\,(a'-s')$

$$\text{ou}\quad a^2 - a'^2 = s^2 - s'^2$$

puisque P est sur l'axe radical; donc $s = s'$. Ainsi:

L'enveloppe des droites qui déterminent sur deux cercles donnés des cordes égales est une parabole ayant pour tangente au sommet l'axe radical des deux cercles et pour foyer le milieu du segment limité par leurs centres.

En faisant tourner la figure autour de l'axe OO', on voit que: „Tous les plans coupant deux sphères suivant des cercles égaux enveloppent un paraboloïde de révolution; son foyer est le milieu de la ligne des centres; le plan tangent au sommet est le plan radical des deux sphères.“

Plus généralement, si F et F' sont les 2 points de l'axe OO' tels que:

$$\frac{FO}{FO'} = k \quad \text{et} \quad \frac{F'O}{F'O'} = -k\,,$$

le milieu de FF' divisera le segment OO' dans le rapport $k^2 = \lambda$ et sera donc le centre du cercle c_λ et de la conique $\bar{c}_\lambda$. Si l'on joint F (ou F') à l'un quelconque des points P' de la circonférence c_λ et si l'on mène par P' la perpendiculaire à FP', cette droite détermine sur les cercles donnés c et c' des cordes $2s$ et $2s'$ dont le rapport est égal à k.

En effet, si a et a' sont les distances de P' aux milieux de ces cordes, on aura: $a = ka'$ puisque $FO = k \cdot FO'$

$$\text{et} \quad \frac{(a + s)\,(a - s)}{(a' + s')\,(a' - s')} = \lambda = k^2$$

puisque P' est sur le cercle c_λ; donc $a^2 - s^2 = k^2 a'^2 - k^2 s'^2$ et par suite $\frac{s}{s'} = k$.

Quand P' varie sur le cercle c_λ, la perpendiculaire à $P'F$ enveloppe la conique $\bar{c}_\lambda$ dont c_λ est le cercle principal.

Si $k = \frac{r}{r'}$, la conique de seconde classe $\bar{c}$ se réduit aux 2 centres de similitude I et E.

Ainsi: *Les droites qui coupent deux cercles donnés suivant des cordes dont le rapport k est constant, enveloppent une conique du faisceau tangentiel déterminé par les deux cercles.*

Lorsque k varie, on obtient toutes les coniques du faisceau. Leurs foyers forment une involution dont les points doubles sont les centres O et O' des 2 cercles; si ce sont les foyers imaginaires qui sont sur la ligne des centres, les foyers réels correspondants sont sur le cercle de diamètre OO'.

Ce théorème, trouvé dans un manuscrit de février 1825, a été énoncé sans démonstration par Steiner (O. c., t. II, p. 467); il l'avait envoyé en 1827 au rédacteur des Annales de Mathématiques de Montpellier, qui le publia plus tard — peut-être par erreur — sous un autre nom.

§ 3. Chaînes fermées de cercles et de sphères

Les cercles tangents à 2 cercles donnés C et c forment 2 séries distinctes suivant que les points de contact sont alignés sur le centre intérieur I ou sur le centre extérieur E de similitude. Nous considérerons seulement la série des cercles i qui peut donner lieu à des chaînes fermées. Il faut pour cela que les points d'intersection des cercles C et c soient imaginaires; en outre les points de contact doivent être alignés sur I si l'un des cercles est intérieur à l'autre, et sur E si les 2 cercles sont extérieurs.

Voici les démonstrations les plus simples des théorèmes énoncés par Steiner (O. c., t. I, p. 135, n° 11, 160, 225 et 455—457, n°s 80—83), mais qu'il n'a démontrés ni dans ses publications, ni dans ses manuscrits[1]):

[1]) Des démonstrations plus compliquées ont été trouvées par *Clausen* (Crelle, t. 6, 7 et 11); Ostwalds Klassiker, Nr. 123, p. 112 à 123, et par *Bützberger:* Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen (Teubner 1914; p. 33 à 48). Voir aussi mon premier travail sur cette question: Comm. math. helv. vol. 4, p. 97—101.

I. *On donne dans le plan deux cercles C et c (c intérieur à C); on trace un cercle i_1 tangent à C et c, puis un deuxième cercle i_2 tangent à i_1, C et c; un troisième i_3 tangent à i_2, C et c, etc. . . . Si, après u révolutions autour de c, on trouve un cercle i_n tangent au premier i_1, la chaîne des cercles inscrits se fermera toujours, quelle que soit la position du cercle initial i_1; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe entre les rayons R et r des deux cercles donnés et la distance d de leurs centres, la relation:*

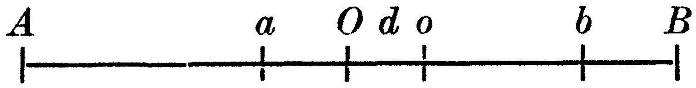
$$\underline{(R-r)^2 - 4\,Rr\ \mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n} = d^2\ .} \tag{1}$$

En effet, la relation est évidente dans le cas de 2 cercles concentriques ($d = 0$); tous les cercles i ont alors le même rayon $\frac{R-r}{2}$; ils doivent être vus du centre commun des 2 cercles donnés sous l'angle $\frac{2u\pi}{n}$ pour que la chaîne se ferme après u tours avec le n^{me} cercle; un triangle rectangle dont le côté opposé à l'angle $\frac{u\pi}{n}$ est $\frac{R-r}{2}$ et le côté adjacent $\sqrt{Rr}$, donne la condition de fermeture:

$$\mathrm{tg}\,\frac{u\pi}{n} = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{tg}^2\,\frac{u\pi}{n} = \frac{(R-r)^2}{4Rr}\ .$$

Or, on peut toujours transformer les 2 cercles non sécants C et c en cercles concentriques par une inversion; il suffit de prendre comme centre d'inversion l'un des 2 points Y ou Z, cercles de rayon nul du faisceau ponctuel (C, c); tous les cercles de ce faisceau coupent orthogonalement les cercles passant par Y et Z; ces derniers se transforment en un faisceau de droites; les premiers (C, c) se changeront donc en cercles concentriques.

Soient A, B et a, b, les points d'intersection de C et c avec la ligne des centres; le birapport:



(Fig. 1)

$$(A\,b\,a\,B) = \frac{A\,a}{b\,a}\cdot\frac{b\,B}{A\,B} = \frac{(R+d-r)\,(R-d-r)}{2r\cdot 2R} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{4Rr}$$

est conservé par l'inversion, ainsi que les nombres u et n; mais pour les cercles concentriques, ce birapport est

$$\frac{(R-r)^2}{4Rr} = \mathrm{tg}^2\,\frac{u\pi}{n}\ ;$$

on a donc: $\dfrac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}=\operatorname{tg}^2\dfrac{u\pi}{n}\cdot$ C'est la relation (1).

Exemple: $R=9$, $r=2$, $u=1$, $n=6$; il faut que $d=5$ pour que la chaîne se ferme.

Si les cercles sont *extérieurs*, le birapport invariant est (fig. 2):

(Fig. 2)

$$(AbaB)=\frac{(R+d+r)\,(d-R-r)}{2r\cdot 2R}=\frac{d^2-(R+r)^2}{4Rr}=\operatorname{tg}^2\frac{u\pi}{n}$$

d'où

$$(R+r)^2+4Rr\,\operatorname{tg}^2\frac{u\pi}{n}=d^2\cdot \tag{1'}$$

Pour $R=r$ et $d=4r$, on a $\operatorname{tg}^2\dfrac{u\pi}{n}=3$; donc $u=1$ et $n=3$.

II. *Pour des cercles tracés sur une sphère* (ou des cônes de révolution de même sommet), *la suite des cercles i* (ou des cônes i) *se ferme si l'on a la relation:*

$$\underline{\cos\,(R\mp r)\pm 2\,\sin R\,\sin r\,\operatorname{tg}^2\frac{u\pi}{n}=\cos\,d\,;} \tag{2}$$

(les signes inférieurs correspondent au cas où les cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre).

En effet, les cercles, les nombres u et n et le birapport $(AbaB)$ sont conservés par une projection stéréographique; les 4 termes du birapport sont maintenant les sinus de 4 angles inscrits, moitiés des angles au centre ou des arcs correspondants; on a donc:

$$(AbaB)=\frac{\sin\dfrac{R+d-r}{2}\,\sin\dfrac{R-d-r}{2}}{\sin r\quad\sin R}=\frac{\cos d-\cos(R-r)}{2\sin r\quad\sin R}=\operatorname{tg}^2\frac{u\pi}{n},$$

d'où la relation cherchée 2) pour c intérieur à C.

III. Si l'on fait tourner chacun des cercles i_1, i_2, ... du n° 1 autour d'un de ses diamètres, on a une *série de sphères* s_1, s_2, ... formant une chaîne fermée lorsque:

$$\operatorname{tg}^2\frac{u\pi}{n}=\frac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}\qquad (c \text{ intérieur à } C)\ . \tag{1''}$$

Il existe alors une *deuxième série de sphères* $S_1, S_2, \ldots$ dont chacune touche la précédente et toutes les sphères $s_1, s_2, \ldots$ de la première série.

Si l'une des 2 chaînes se ferme après u tours avec la n^{me} sphère, l'autre se ferme nécessairement aussi après U tours avec la N^{me} sphère, les 4 nombres u, n, U, N étant liés par la relation :

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2} .$$

Dans les manuscrits de Steiner, on n'a pas trouvé la démonstration de ce théorème; *Geiser* en a publié une à la fin de son livre: „Einleitung in die synthetische Geometrie" (§ 28; p. 172—183); le calcul assez long de Geiser peut être évité par la considération suivante:

Si l'on coupe toutes les sphères $S_1, S_2, \ldots$ par le plan perpendiculaire au plan des cercles C, c mené par la ligne des centres, on a une série de cercles tangents aux 2 cercles extérieurs de diamètres $Aa = R + d - r$ et $bB = R - d - r$ (fig. 1) dont la distance des centres est $R + r$. Pour avoir la condition de fermeture de la chaîne $S_1, S_2, \ldots$, il faut donc remplacer dans la formule 1′) $R + r$ par $\dfrac{Aa + bB}{2} = R - r$, d par $R + r$, $4Rr$ par $Aa \cdot bB = (R - r)^2 - d^2$, *u par U et n par N*; on a ainsi:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{U\pi}{N} = \frac{4Rr}{(R-r)^2 - d^2} .$$

C'est la valeur inverse de 1″); donc les 2 angles $\dfrac{u\pi}{n}$ et $\dfrac{U\pi}{N}$ sont complémentaires; $\quad \dfrac{u\pi}{n} + \dfrac{U\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{u}{n} + \dfrac{U}{N} = \dfrac{1}{2}$.

Si l'on a, par exemple, 3 sphères s_1, s_2, s_3 qui se touchent ($u = 1$, $n = 3$), les sphères qui leur sont tangentes formeront une chaîne fermée au premier tour avec la 6^{me} sphère ($U = 1$, $N = 6$). Ou bien, si l'on a sur un plan S_1 six sphères égales $s_1, \ldots, s_6$ qui se touchent 2 à 2, la sphère S_2 de même rayon qui leur est inscrite forme avec le plan S_1 et le second plan tangent S_3 parallèle à S_1 une des secondes chaînes fermées, car 2 plans parallèles peuvent être considérés comme des sphères de rayons infiniment grands se touchant à l'infini.

IV. *Soient S_1, S_3 deux sphères non concentriques* (S_3 intérieure à S_1); *dans la couronne comprise entre S_1 et S_3, il y a une double infinité de sphères tangentes à S_1 et S_3; soit S_2 l'une de ces sphères. On considère alors* *une suite de sphères* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *dont la première* s_1 *doit être seulement tangente à* S_1, S_2 *et* S_3; s_2 *devra toucher les* 4 *sphères* S_1, S_2, S_3 *et* s_1; s_3 *sera tangente à* S_1, S_2, S_3 *et* s_2; *etc.* . . .

Alors, *la chaîne de sphères* s *pourra se prolonger indéfiniment, ou bien, après* u *révolutions autour de* S_2, *il y aura une dernière sphère* s_n *tangente à la première* s_1; *dans ce cas, la chaîne se fermera toujours, quelles que soient les positions initiales de chacune des deux sphères* S_2 *et* s_1; *pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait entre les rayons* R *et* r *des deux sphères données et la distance* d *de leurs centres, la relation :*

$$(R \pm r)^2 \mp 16\,Rr \,\sin^2 \frac{u\pi}{n} = d^2 \tag{3}$$

(les signes inférieurs correspondant au cas où les sphères données sont extérieures l'une à l'autre).

Transformons, comme dans le n° 1, les 2 sphères données en sphères S_1' et S_3' de même centre O et de rayons R' et r' (par une inversion). Soient S_2' une sphère quelconque (de centre L) tangente à S_1' et S_3'; s_1' la première sphère (de centre M) de la chaîne $s_1', s_2', s_3', \ldots$ Les sphères $S_2', s_1', s_2', s_3', \ldots$ ont toutes le même rayon $\frac{R'-r'}{2}$. Les centres des sphères s' sont sur un cercle de rayon x lié à R' et r' par la relation:

$$x\,\frac{R'+r'}{2} = (R'-r')\sqrt{R'r'}$$

(qui exprime de 2 manières la surface du triangle OLM), d'où:

$$\frac{R'-r'}{2x} = \frac{R'+r'}{4\sqrt{R'r'}}\ .$$

Pour que la chaîne des sphères s' se ferme après u tours avec la n^{me} sphère, il faut que:

$$\sin\frac{u\pi}{n} = \frac{R'-r'}{2x} = \frac{R'+r'}{4\sqrt{R'r'}}$$

ou

$$\sin^2\frac{u\pi}{n} = \frac{(R'+r')^2}{16\,R'r'}\ . \tag{3'}$$

C'est la relation (3) pour $d = 0$.

Si d est différent de zéro, on sait que le birapport:

$$(A\,b\,a\,B) = \frac{(R-r)^2 - d^2}{4\,Rr}$$

est conservé par l'inversion; mais pour les sphères concentriques ce birapport est égal à

$$\frac{(R'-r')^2}{4R'r'} = 4\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1\ , \quad \text{d'après } (3')\ .$$

On a donc:

$$\frac{(R-r)^2-d^2}{4Rr} + 1 = 4\sin^2\frac{u\pi}{n} \quad \text{qui est la relation (3) :}$$

$$(R+r)^2 - 16Rr\sin^2\frac{u\pi}{n} = d^2\ .$$

Exemples: $u=1$, $n=3$; $R^2+r^2-10\,Rr=d^2$; pour $R=12$, $r=1$; $d=5$.
$u=1$, $n=4$; $R^2+r^2-\ 6\,Rr=d^2$; pour $R=15$, $r=2$; $d=7$.

Pour $d=0$, on a ainsi les relations entre les rayons r et R des 2 sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite aux 4 (ou 6) sphères égales ayant pour centres les sommets d'un tétraèdre (ou d'un octaèdre) régulier et pour rayon la moitié de la longueur d'une arête.

Si $R=\infty$, on a aussi $d=\infty$; l'une des sphères se réduit à un plan P; soit h la distance du centre de la sphère de rayon r à ce plan. Le birapport:

$$(AbaB_\infty) = \frac{Aa}{ba} = \frac{h-r}{2r} = 4\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1\ ,$$

d'où

$$\frac{h}{r} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1\ .$$

On a donc le théorème:

Soient P un plan et S une sphère de rayon r dont le centre est à la distance h du plan P, S' une sphère quelconque tangente à S et P; s_1, s_2, s_3, ... une chaîne de sphères tangentes à S, S', P et dont chacune touche la précédente extérieurement, la première s_1 étant arbitraire. Cette chaîne se fermera après u tours avec la n^{me} sphère, si l'on a :

$$\underline{\frac{h}{r} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1\ .}$$

S' pourra être, par exemple, le plan parallèle à P et tangent à S. En particulier, on aura les conditions de fermeture:

$$h = r \text{ pour } u = 1 \text{ et } n = 6$$
$$h = 3r \text{ pour } u = 1 \text{ et } n = 4$$
$$h = 5r \text{ pour } u = 1 \text{ et } n = 3.$$

Les 2 racines de l'équation:

$h^2 - 8hr + 11r^2 = 0$	correspondent	à $n = 5$	et $u = 1$ ou 2[2])
$h^2 - 6hr + r^2 = 0$	,,	à $n = 8$	et $u = 1$ ou 3
$h^2 - 6hr + 4r^2 = 0$	,,	à $n = 10$	et $u = 1$ ou 3
$h^2 - 6hr - 3r^2 = 0$	,,	à $n = 12$	et $u = 1$ ou 5.

Pour $n = 15$, il y a 4 solutions $u = 1$, 2, 4 et 7 qui correspondent aux 4 pentédécagones réguliers, etc. . . .

§ 4. Coniques bitangentes à deux cercles

Par un point quelconque du plan on mène les tangentes T et t à chacun des deux cercles donnés C et c; le lieu géométrique de tous les points pour lesquels la somme $T + t$ ou la différence $T - t$ (ou $t - T$) est constante ($= l$) est une conique bitangente à chacun des deux cercles.

Si les points de contact sont réels, ils divisent la conique en 4 arcs; pour 2 des arcs, c'est la somme, et pour les 2 autres, c'est la différence des tangentes qui est égale à la constante l.

Désignons par R et r les rayons des 2 cercles et par d la distance de leurs centres. Prenons le milieu M de cette distance comme origine d'un système de coordonnées rectangulaires dont l'axe des x est la ligne des centres. On peut alors mettre l'équation du lieu cherché sous l'une des 2 formes suivantes:

$$4l^2\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 - R^2\right] = (l^2 + r^2 - R^2 + 2dx)^2$$

ou

$$4l^2\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 - r^2\right] = (l^2 + R^2 - r^2 - 2dx)^2 .$$

On voit donc que les cordes de contact:

$$x = \frac{R^2 - r^2}{2d} \pm \frac{l^2}{2d}$$

de la conique avec chacun des 2 cercles sont symétriques par rapport à l'axe radical dont l'équation est:

$$x = \frac{R^2 - r^2}{2d} .$$

Il en résulte que les 4 points de contact (réels ou imaginaires) sont toujours sur un cercle de centre M; les droites qui les joignent 2 à 2 (et ne sont pas perpendiculaires à la ligne des centres) sont donc tangentes à la parabole du § 2.

[2]) L'équation $h^2 - 4hr - 16r^2 = 0$ citée par Steiner pour $n = 5$ (O. c., t. I, p. 160) est inexacte.

A chaque valeur de l ou de $\lambda = \frac{l^2}{2d}$ correspond une conique bitangente. La parabole ($\lambda = \frac{d}{2}$ ou $l = d$) sépare les ellipses ($l > d$) des hyperboles ($l < d$).

Pour $l = 0$, on a l'axe radical compté doublement; $l = \infty$ correspond à la droite à l'infini; les 2 paires de tangentes (intérieures et extérieures) sont 2 coniques dégénérées de la famille.

Les foyers de toutes ces coniques bitangentes à 2 cercles forment une involution dont les points doubles sont les 2 centres de similitude des cercles donnés; si les foyers imaginaires sont sur la ligne des centres, les foyers réels correspondants sont sur le cercle de similitude dont le centre est le foyer de la seule parabole bitangente.

Steiner a consacré un grand mémoire à cette famille de coniques bitangentes à deux cercles[1]) (O. c., t. II, p. 445—468). Il a trouvé que les 4 points d'intersection de 2 quelconques de ces coniques sont toujours sur un cercle de centre M, et que leurs 8 points de contact avec les 2 cercles donnés sont sur une conique. Pour les 2 paires de tangentes communes, c'est la conique covariante du § 1.

§ 5. Quadriques circonscrites à deux sphères

Faisons tourner les 2 cercles du § 4 et leurs coniques bitangentes autour de la ligne des centres; on aura 2 sphères S, S' et les quadriques de révolution Q qui leur sont circonscrites le long de 2 cercles dont les plans sont équidistants du plan radical des 2 sphères. Parmi ces quadriques, il y a les 2 cônes de révolution circonscrits à S et S', puis celles qui sont dégénérées en: le cercle c commun à S et S' d'une part et l'ombilicale d'autre part. *Soit d l'une quelconque des ∞^2 tangentes communes à S et S'; les paires de plans tangents menés de d à toutes les quadriques Q circonscrites aux deux sphères forment une involution dont les plans doubles passent par les deux centres de similitude I et E,* sommets (points doubles) des deux cônes circonscrits à S et S'. Mais, comme les 2 plans isotropes issus de d se correspondent dans cette involution, celle-ci sera *symétrique*; les 2 plans doubles dI et dE doivent donc être perpendiculaires entre eux et sont les plans bissecteurs de tous les dièdres formés par les paires de plans tangents menés de la droite d à toutes les quadriques Q, en particulier au cercle c commun aux 2 sphères.

Or il est facile de voir que *si la tangente varie, le dièdre formé par les 2 plans tangents au cercle c est constant et égal à l'angle des 2 sphères.*

---

[1]) ou à 2 coniques quelconques (p. 469—483).

En effet, soit P le point de contact de la droite d avec la sphère S. Une inversion de centre P transforme S en un plan $\overline{S}$ parallèle à la droite d qui ne change pas; à la sphère S' correspond une autre sphère $\overline{S}'$ tangente à d. Les 2 plans tangents menés par d au cercle c commun à S et S' ne changent pas puisqu'ils passent par le centre d'inversion P; ils sont aussi tangents au cercle $\bar{c}$ commun à la sphère $\overline{S}'$ et au plan $\overline{S}$.

Une projection orthogonale de la figure sur un plan perpendiculaire à la droite d montre que l'angle des deux plans tangents à $\bar{c}$ est égal à l'angle de la sphère $\overline{S}'$ et du plan $\overline{S}$, donc aussi à l'angle des 2 sphères données S et S'.

Le théorème est encore vrai si l'on remplace le cercle c par l'une quelconque des quadriques Q. Donc:

Si l'on mène par une quelconque des tangentes à deux sphères les plans tangents à une quadrique circonscrite à ces sphères, les dièdres formés par les deux plans tangents ont une grandeur constante; les plans bissecteurs de ces dièdres passent toujours par les centres de similitude des deux sphères.

(Reçu le 25 août 1938.)