Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Ta Li.

Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Ta Li

Von ALFRED KIENAST, Küsnacht bei Zürich

Der vorangehende Aufsatz von Herrn Ta Li stellt sehr weittragende Resultate dar. Er enthält jedoch nicht alle Hinweise, die ein Leser vielleicht wünschen möchte. Die nachfolgenden Ausführungen haben den Zweck, zur Beantwortung einiger Fragen, die sich naturgemäß einstellen, beizutragen.

I.

Setzt man

$$J^n(h) = \int_c^x dx_{n-1} \ldots dx_2 \int_c^{x_2} dx_1 \int_c^{x_1} h(t)\, dt\,, \qquad n \geqq 1\,,$$

so ist[1])

$$J^\mu(1) = \frac{(x-c)^\mu}{\mu\,!}\,, \quad \mu \geqq 0\,, \tag{52}$$

und wenn $D^\lambda = \dfrac{d^\lambda}{dx^\lambda}$, so ist $D^\lambda J^n(h) = J^{n-\lambda}(h)\,, \quad n - \lambda \geqq 1\,.$

Bezeichnet man weiter

$$T_m(h) = \sum_{\tau=0}^{n-1} f_{n-\tau}(x)\, J^{n-\tau} \sum_{\sigma=0}^{n-1} f_{n-\sigma} J^{n-\sigma} \ldots \sum_{\gamma=0}^{n-1} f_{n-\gamma} J^{n-\gamma} \sum_{\beta=0}^{n-1} f_{n-\beta} J^{n-\beta} \sum_{\alpha=0}^{n-1} f_{n-\alpha} D^\alpha h\,, \tag{53}$$

wobei die Summationen nach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau$ in der Anzahl m sind, so ist

$$T_1(h) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x)\, D^\lambda h(x) \quad \text{also mit (52)} \quad T_1 J^\mu(1) = \sum_{\lambda=0}^{\mu} f_{n-\lambda} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)\,!}$$

und es gelten: das distributive Gesetz

$$\text{(i)} \qquad T_m(g+h) = T_m(g) + T_m(h)$$

und die rekursiven Beziehungen, unter Weglassung von Klammern,

$$\text{(ii)} \qquad T_1 J^n T_m(h) = T_{m+1}(h)$$

$$\text{(iii)} \qquad T_m J^n T_1\ (h) = T_{m+1}(h)\,.$$

---

[1]) Die Numerierung setzt diejenige von Ta Li fort, und wenn ich Zahlen kleiner als (52) erwähne, so sind damit die Formeln im Aufsatz von Ta Li gemeint.

Hiermit ist es leicht, die Formeln von Ta Li zu übersehen: Seite 3 Mitte wird der Ansatz gemacht

$$y = g(x) + J^n\, T_1(g) + J^n\, T_2(g) + \cdots = R(g)\,.$$

Dies eingesetzt in die Differentialgleichung (1) gibt

$$\begin{aligned} D^n(y) &= D^n g + T_1(g) + T_2(g) + \cdots \\ &= \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda} D^\lambda y = T_1(y) = T_1(g) + T_1 J^n T_1(g) + T_1 J^n T_2(g) + \cdots \end{aligned}$$

mit Hilfe von (i); die letzte Reihe ergibt mit (ii)

$$= T_1(g) + T_2(g) + \cdots\ ;$$

somit folgt als Bedingung $D^n g = 0$.

Unter den zulässigen g sind die n einfachsten, von einander linear unabhängigen, die Funktionen

$$g_\mu(x) = \frac{(x - c)^\mu}{\mu\,!} = J^\mu(1)\,;$$

somit erhält man die n Lösungen

$$y_\mu(x) = R(J^\mu(1)) = J^\mu(1) + J^n T_1 J^\mu(1) + J^n T_2 J^\mu(1) + \cdots \tag{54}$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots,\quad n - 1\,;$$

dies ist die Formel (2). Differenziert man sie formal, so folgt

$$D^\varrho y_\mu = J^{\mu-\varrho}(1) + J^{n-\varrho} T_1 J^\mu(1) + J^{n-\varrho} T_2 J^\mu(1) + \cdots \tag{55}$$

$$\varrho \text{ ganzzahlig und } 0 \leqq \varrho \leqq n - 1\,.$$

Die Ergebnisse des § 1 kann man so zusammenfassen:

Satz: Wenn die $f_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, in $a \leqq x \leqq b$ integrierbar und dort gleichmäßig beschränkt sind, d. h.

$$|f_\nu(x)| < M\,,\quad \nu = 1, 2, \ldots n\,,$$

dann sind die Reihen (55)

(1) im abgeschlossenen Intervall absolut und gleichmäßig konvergent;

(2) (54) ist in denjenigen Punkten des Intervalls, in denen alle $f_\nu(x)$ stetig sind, n mal gliedweise differentiierbar.

Beweis: Setzt man mit Ta Li $e^{|x-c|} \leqq N$, so ist

$$| T_1 J^{\mu}(1) | \leqq MN$$

$$| T_2 J^{\mu}(1) | \leqq (MN)^2 | x - c |$$

und durch Induktion, wie auf Seite 4,

$$| T_{m+1} J^{\mu}(1) | \leqq (MN)^{m+1} (m!)^{-1} | x - c |^m \ . \tag{56}$$

Jeder Term der Reihe (55) ist in $a \leqq x \leqq b$ stetig und (56) ergibt, daß die Reihe dort absolut und gleichmäßig konvergiert; folglich hat $D^{\varrho-1} y_{\mu}$ in jedem Punkt des Intervalls einen Differentialquotienten und dieser ist dargestellt durch die Reihe für $D^{\varrho} y_{\mu}$. Für $\varrho = n$ ist $D^n y_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{\nu} J^{\mu}(1)$, woraus die Behauptung (2) folgt.

II.

Im § 6 wird die Voraussetzung betreffend die f_{ν} erweitert für den Fall, daß eine einzige unter ihnen von null verschieden ist. Ta Li setzt voraus (Seite 14), daß für ein festes $0 < \lambda \leqq n$

$$J^{\lambda} f(x) \quad \text{existiert in} \quad a \leqq x \leqq b \, .$$

Dies schließt ein, daß

erstens, für $\lambda \geqq 1$ $\quad \int_c^x f(t)\, dt$ existiert in $a < x < b$;

zweitens $\lim\limits_{x \to a+0} J^{\lambda} f$ und $\lim\limits_{x \to b-0} J^{\lambda} f$ existieren und endlich sind. Somit ist

$$J^{\lambda} f = \int_c^x f(t)\, (x - t)^{\lambda - 1}\, dt \tag{57}$$

$$|J^{\lambda} f| < M \ \text{(endlich), für } a \leqq x \leqq b \, . \tag{58}$$

Letzteres ist (35). Es ist aber noch mehr darin enthalten.

Setzt man voraus, daß f nach Lebesgue integrierbar ist, dann ist auch $|f|$ integrierbar und es ist angezeigt, (58) zu interpretieren als

$$J^{\lambda} |f| < M \quad \text{für } a \leqq x \leqq b \, . \tag{59}$$

Setzt man jedoch für f nur Integrierbarkeit nach Riemann voraus, dann ist auch $|f|$ integrierbar, solange f beschränkt ist. Will man auch unbeschränkte f umfassen, dann hat man (59) als weitere Voraussetzung ausdrücklich hinzuzunehmen. Nur dann bleibt Seite 16 Zeile 2 von unten richtig.

Ist z. B. $f(x)$ eine mit Ausnahme isolierter Punkte von a bis b reguläre analytische Funktion, a, b zwei ihrer Singularitäten, während im Intervall zwischen a und b noch andere Singularitäten liegen können, dann ist durch die Bedingung (59) (vgl. (57)) die Art der Singularitäten beschrieben, über die hinaus das Intervall nicht erweitert werden kann, falls die zugehörigen Reihen (54) konvergent sein sollen.

Formel (37) ist ein Spezialfall von

$$J^\lambda(fg) = \sum_{\varrho=0}^{\lambda}(-1)^\varrho \binom{\lambda}{\varrho} J^\varrho(D^\varrho g \cdot J^\lambda f) \tag{60}$$

Mit (60) folgt, wenn $D^\varrho g \geqq 0 \ , \quad 0 \leqq \varrho \leqq \lambda$,

$$|J^\lambda(fg)| \leqq Mg\, 2^\lambda \tag{61}$$

und dies ist (38). Ferner

$$|J^n(fg)| \leqq J^{n-\lambda}(Mg\, 2^\lambda) = M\, 2^\lambda J^{n-\lambda}\, g \tag{62}$$

was Seite 15 Zeile 3—4 von unten entspricht.

(53) gibt, wenn $J^\mu(1) = h$ gesetzt wird,

$$|J^n T_{m+1}(h)| \leqq J^n |f| J^n \dots J^n |fh|$$

worin J^n $(m + 1)$ mal vorkommt; mit (62) folgt

$$\leqq (M\, 2^\lambda)^m\, J^{mn-m\lambda}\, J^n\, |f J^\mu(1)|$$

und mit (61)

$$\leqq (M\, 2^\lambda)^{m+1}\, |J^{(m+1)\,(m-\lambda)+\mu}(1)| \ ;$$

dies ist Seite 15 letzte Zeile.

Damit ist die Abschätzung gewonnen, aus der folgt, daß die Reihen (54) absolut und gleichmäßig konvergieren unter der Voraussetzung (59) bei $\lambda < n$ und für $\lambda = n$, wenn noch $M\, 2^n < 1$.

Es bleibt übrig die Aussage über die Differentiierbarkeit unter der erweiterten Voraussetzung zu beweisen.

Die Reihen (55) lassen sich schreiben

$$D^{\varrho} y_{\mu} = J^{\mu-\varrho}(1) + J^{n-\varrho}(f y_{\mu}) ;$$

hier ist die rechte Seite stetig in $a \leqq x \leqq b$, wenn

$$n - \varrho \geqq \lambda ; \quad \text{somit} \quad \varrho \leqq n - \lambda .$$

Infolge der Voraussetzung ist $\int\limits_c^x f y_{\mu}\, dt$ stetig im offenen Intervall $a<x<b$. Daher existiert $D^{\varrho} y_{\mu}$ für $n - \lambda < \varrho \leqq n - 1$ im offenen Intervall $a < x < b$. Da y_{μ} stetig (und daher beschränkt) ist im abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$, so existiert $D^n y_{\mu} = f y_{\mu}$ in denjenigen Punkten von $a < x < b$, in denen f stetig ist.

Reihen, wie sie hier durch das Verfahren von Ta Li entstehen, mit der Eigenschaft für analytische Funktionen nicht nur im Mittag-Lefflerschen Stern zu konvergieren, sondern unter bestimmten Voraussetzungen noch auf Intervallen, die singuläre Stellen einschließen, falls letztere einen geeigneten Charakter besitzen, sind schon von P. Painlevé angegeben worden. Siehe Note I, S. 101—148, § 26 u. f. (S. 140) in *E. Borel*, Leçons sur les Fonctions de Variables réelles. Paris 1905.

(Eingegangen den 20. Mai 1939.)