Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen.

Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. II.*)

Von A. Pfluger, Solothurn

Zweiter Abschnitt

Über Kurven ohne Wendepunkte

16. Der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $h(\varphi)$ und $N^*(\varphi)$, wie er durch die Gleichung (1.61) festgelegt ist, läßt sich in einfacher Weise an speziellen ebenen Kurven veranschaulichen. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Hüllkurve der Geradenschar

$$x \cos \varrho\varphi + y \sin \varrho\varphi - h(\varphi) = 0 \quad , \qquad \alpha < \varphi < \beta \, , \tag{2.1}$$

wobei ϱ irgend eine positive reelle Zahl ist und die **Stützfunktion** $h(\varphi)$ den folgenden Voraussetzungen genügt:

1. $h(\varphi)$ ist stetig und je von rechts und links differenzierbar.

2. Diese Rechts- und Linksableitungen $h'_+(\varphi)$ und $h'_-(\varphi)$ sind von beschränkter totaler Schwankung und genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned} h'_+(\varphi - 0) &= h'_-(\varphi - 0) = h'_-(\varphi) \, , \\ h'_+(\varphi + 0) &= h'_-(\varphi + 0) = h'_+(\varphi) \, . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demnach besitzt die Funktion

$$h'(\varphi) = \frac{h'_+(\varphi) + h'_-(\varphi)}{2} \tag{2.3}$$

nur abzählbar viele Unstetigkeiten und es gilt für alle φ

$$h'(\varphi) = \frac{h'(\varphi + 0) + h'(\varphi - 0)}{2} \, . \tag{2.4}$$

17. Die Tatsache, daß die Stützfunktion $h(\varphi)$ nicht überall differenzierbar ist, sondern an abzählbar vielen Stellen nur die Rechts- und Linksableitung zu existieren braucht, bietet der Definition der Hüllkurve der

---

*) Vgl. dazu den 1. Abschnitt der vorliegenden Arbeit: Comm. Math. Helv., vol. 11, p. 180—213. Alle Hinweise auf Formeln mit Nummern der Form $(1, n)$ beziehen sich auf diesen ersten Abschnitt.

Geradenschar (2.1) gewisse Schwierigkeiten. Denn wollen wir bei festem φ und $\theta \to \varphi$ die Grenzlage des Schnittpunktes der beiden Geraden

$$x \cos \varrho\varphi + y \sin \varrho\varphi - h(\varphi) = 0$$
$$x \cos \varrho\theta + y \sin \varrho\theta - h(\theta) = 0$$

bestimmen, so ist zu unterscheiden, ob θ von rechts oder von links gegen φ strebt, und die Durchführung des Grenzüberganges liefert zwei Grenzpunkte, $P_+(\varphi)$ und $P_-(\varphi)$, die für abzählbar viele Werte von φ verschieden sein können. Die Koordinaten dieser Punkte sind

$$x_+(\varphi) = h(\varphi) \cos \varrho\varphi - \frac{1}{\varrho} h'_+(\varphi) \sin \varrho\varphi$$
$$y_+(\varphi) = h(\varphi) \sin \varrho\varphi + \frac{1}{\varrho} h'_+(\varphi) \cos \varrho\varphi$$

bzw.

$$x_-(\varphi) = h(\varphi) \cos \varrho\varphi - \frac{1}{\varrho} h'_-(\varphi) \sin \varrho\varphi$$
$$y_-(\varphi) = h(\varphi) \sin \varrho\varphi + \frac{1}{\varrho} h'_-(\varphi) \cos \varrho\varphi \,.$$

Durch diese Gleichungen sind jedem φ ein oder zwei Punkte der Ebene zugeordnet. Sie definieren eine Punktmenge und jedem abgeschlossenen Intervall in (α, β) entspricht wegen (2.2) ein abgeschlossenes Stück dieser Menge. Dieses Stück braucht aber nicht zusammenhängend zu sein. In der Tat sind $h'_+(\varphi)$ und $h'_-(\varphi)$ verschieden, so ist die Punktmenge zwischen $P_+(\varphi)$ und $P_-(\varphi)$ unterbrochen und die beiden Punkte können nicht durch eine in diesem Stück gelegene Kurve miteinander verbunden werden. Ergänzen wir aber die Menge in der Weise, daß wir jedes nicht zusammenfallende Punktepaar $P_-(\varphi)$, $P_+(\varphi)$ durch eine Strecke verbinden, so entsteht eine stetige Kurve, die **Hüllkurve** $\mathfrak{H}$ *der Geradenschar* (2.1).

Um die Unterscheidung zwischen Rechts- und Linksableitung in der Schreibweise zu vermeiden, setzen wir (vgl. (2.3))

$$x(\varphi) = h(\varphi) \cos \varrho\varphi - \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \sin \varrho\varphi \,, \quad y(\varphi) = h(\varphi) \sin \varrho\varphi + \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \cos \varrho\varphi \,.$$

Hiedurch wird jedem φ eindeutig ein Punkt $P(\varphi)$ zugeordnet. In jeder Stetigkeitsstelle von $h'(\varphi)$ gilt $P(\varphi - 0) = P(\varphi) = P(\varphi + 0)$. In den Unstetigkeitsstellen ist $P(\varphi)$ Mittelpunkt der Strecke $S(\varphi)$, welche $P(\varphi - 0) = P_-(\varphi)$ mit $P(\varphi + 0) = P_+(\varphi)$ verbindet und deren Länge $\frac{1}{\varrho} \mid h'(\varphi + 0) - h'(\varphi - 0) \mid$ beträgt.

18. Wir legen die Richtung $\varrho\varphi$ oder die Richtung des Vektors $\{\cos\varrho\varphi,\ \sin\varrho\varphi\}$ als die positive Normalenrichtung der Stützgeraden $x\cos\varrho\varphi + y\sin\varrho\varphi - h(\varphi) = 0$ fest und sagen kurz: Die Stützgerade besitze die Normalenrichtung $\varrho\varphi$. Diese Normalenrichtung ist demnach eine stetige und monoton wachsende Funktion des Parameters φ und daher ihre Hüllkurve ohne Wendepunkte. Denn die Wendepunkte einer Hüllkurve entsprechen jenen Parameterwerten, für welche die Normalenrichtung der erzeugenden Geraden als Funktion des Parameters ein relatives Maximum oder Minimum besitzt[31]).

Legen wir weiter die Richtung des Vektors $\{-\sin\varrho\varphi,\ \cos\varrho\varphi\}$ als die positive Richtung der Stützgeraden $x\cos\varrho\varphi + y\sin\varrho\varphi - h(\varphi) = 0$ fest, so dreht sich diese orientierte Stützgerade mit wachsendem φ stets im positiven Sinne. Denken wir uns also, bei einem festen Winkel φ_1 im Intervall (α, β) anfangend, die Ausgangsgerade $x\cos\varrho\varphi_1 + y\sin\varrho\varphi_1 - h(\varphi_1) = 0$ an der Hüllkurve $\mathfrak{H}$ im positiven Sinne rollend, so daß sie sukzessive nach wachsendem φ geordnet die Lagen sämtlicher Geraden $x\cos\varrho\varphi + y\sin\varrho\varphi - h(\varphi) = 0,\ \varphi > \varphi_1$, einnimmt, so kommt jeder Punkt $P(\varphi)$ bzw. dessen zugehörige Strecke $S(\varphi)$ auf einen Punkt $\tilde{P}(\varphi)$ bzw. auf eine Strecke $S(\varphi)$ der rollenden Geraden zu liegen, wir sagen: *Die Hüllkurve wird auf die rollende Gerade abgewickelt.* Dabei kann sich der Punkt $P(\varphi)$ (bei wachsendem φ) im positiven oder negativen Sinne auf der rollenden Geraden bewegen und daher gewisse Stellen der Geraden mehrfach überdecken. Die Entfernung des Punktes $\tilde{P}(\varphi)$ von $\tilde{P}(\varphi_1)$, welche ab- oder zunehmen kann, mißt nicht die absolute Länge des abgewickelten Kurvenstückes; denn sie zählt gewisse Bogen positiv und andere wieder negativ. Auf jeden Fall aber hat der Punkt $\tilde{P}(\varphi)$ eine nach Betrag und Vorzeichen bestimmte Entfernung von $\tilde{P}(\varphi_1)$. Wir nennen sie im Gegensatz zur absoluten die **relative Länge** des zwischen $P(\varphi_1)$ und $P(\varphi)$ gelegenen Stücks der Hüllkurve und bezeichnen sie mit $\mathfrak{L}(\varphi,\varphi_1)$. Die Gleichung $\mathfrak{L}(\varphi,\varphi_1) = \mathfrak{L}(\varphi) - \mathfrak{L}(\varphi_1)$ definiert dann — bis auf eine additive Konstante — eine Funktion $\mathfrak{L}(\varphi)$. Wir nennen sie die zur Hüllkurve $\mathfrak{H}$ gehörige **Bogenfunktion** und stellen uns die Aufgabe, diese Bogenfunktion aus der Stützfunktion zu berechnen.

19. Die Größe des relativen Bogenelementes $d\mathfrak{L}(\varphi)$ nach Betrag und Vorzeichen ergibt sich aus der Tatsache, daß es gleich der Länge der Normalprojektion des Vektors $\overrightarrow{P(\varphi - \tfrac{1}{2}d\varphi)\,P(\varphi + \tfrac{1}{2}d\varphi)} = \{dx(\varphi),\ dy(\varphi)\}$

[31]) Kurven ohne Wendepunkte wurden erstmals von *H. Brunn* [1] untersucht. Doch werden die dortigen Ergebnisse hier nicht gebraucht.

auf die positive Richtung der Stützgeraden von Normalenrichtung $\varrho\varphi$ ist. Wir bilden also das skalare Produkt der beiden Vektoren $\{dx(\varphi), dy(\varphi)\}$ und $\{-\sin\varrho\varphi, \cos\varrho\varphi\}$ und erhalten

$$d\mathfrak{L}(\varphi) = -dx(\varphi)\cdot\sin\varrho\varphi + dy(\varphi)\cdot\cos\varrho\varphi\ ^{32)}\,.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} dx(\varphi) &= -\left(\varrho h(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\varrho}dh'(\varphi)\right)\sin\varrho\varphi \\ dy(\varphi) &= \quad\left(\varrho h(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\varrho}dh'(\varphi)\right)\cos\varrho\varphi \end{aligned} \tag{2.5}$$

und daher das Differential der Bogenfunktion

$$d\mathfrak{L}(\varphi) = \varrho h(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi)\,. \tag{2.6}$$

Durch Integration von (2.6) folgt

$$\mathfrak{L}(\varphi) - \mathfrak{L}(\varphi_1) = \varrho\int_{\varphi_1}^{\varphi} h(\theta)d\theta + \frac{1}{\varrho}\,[h'(\varphi) - h'(\varphi_1)]\,, \tag{2.7}$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist. Aus (2.7) ergibt sich unmittelbar, daß sich $\mathfrak{L}(\varphi)$ bezüglich Stetigkeit gleich wie $h'(\varphi)$ verhält. Denn es existieren die Grenzwerte $\mathfrak{L}(\varphi - 0)$ und $\mathfrak{L}(\varphi + 0)$ und es gilt

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \frac{\mathfrak{L}(\varphi + 0) + \mathfrak{L}(\varphi - 0)}{2} \tag{2.8}$$

und

$$\mathfrak{L}(\varphi + 0) - \mathfrak{L}(\varphi - 0) = \frac{1}{\varrho}\left(h'(\varphi + 0) - h'(\varphi - 0)\right)\,. \tag{2.9}$$

In (2.6) haben wir zugleich ein Kriterium dafür, ob durch $\mathfrak{L}(\varphi)$ ein Bogen positiv oder negativ gezählt wird. Dieses analytische Kriterium läßt sich wie folgt durch ein rein geometrisches ersetzen.

20. Die orientierte Stützgerade von Normalenrichtung $\varrho\varphi$ im positiven Sinne durchlaufend, kommen wir überein, die Seite rechter Hand als rechte Seite und jene linker Hand als linke Seite zu bezeichnen und definieren: *Ist die Hüllkurve $\mathfrak{H}$ in der Umgebung des Punktes $x(\varphi)/y(\varphi)$ auf der linken bzw. rechten Seite ihrer Stützgeraden von Normalenrichtung*

---

[32]) Differential der Funktion $f(x)$ an der Stelle x nennen wir hier eine Funktion von h, für die in der Umgebung von $h = 0$ $\quad df(x) - \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right] = o\,(h)$ ist.

$\varrho\varphi$ gelegen, so heißt sie in der Umgebung dieses Punktes bezüglich der Richtung $\varrho\varphi$ **konvex** *bzw.* **konkav**.[33])

Ist die Kurve in der Umgebung jedes Punktes im obigen Sinne konvex (konkav), so heißt die ganze Kurve konvex (konkav).

Wir zeigen nun, daß „*konvexer Bogen*" und „*durch* (2.6) *positiv gezählter Bogen*" identische Begriffe sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei benachbarte Winkel φ und φ' mit $\varphi' > \varphi$ und die zugehörigen Punkte $P(\varphi)$ und $P(\varphi')$, für deren Koordinaten

$$\begin{aligned} x(\varphi)\cos\varrho\varphi + y(\varphi)\sin\varrho\varphi - h(\varphi) &= 0 \\ x(\varphi')\cos\varrho\varphi' + y(\varphi')\sin\varrho\varphi' - h(\varphi') &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

gilt. Ist nun der Bogen in der Umgebung von $P(\varphi)$ konvex, so liegen $P(\varphi')$ bzw. $P(\varphi)$ auf der linken Seite der Stützgeraden von Normalenrichtung $\varrho\varphi$ bzw. $\varrho\varphi'$. Es ist also

$$\begin{aligned} & x(\varphi')\cos\varrho\varphi + y(\varphi')\sin\varrho\varphi - h(\varphi) < 0 \\ \text{und} \quad & \\ & x(\varphi)\cos\varrho\varphi' + y(\varphi)\sin\varrho\varphi' - h(\varphi') < 0\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Werden die Gleichungen (2.10) addiert und davon die Ungleichungen (2.11) subtrahiert, so folgt

$$\big(x(\varphi') - x(\varphi)\big)\big(\cos\varrho\varphi' - \cos\varrho\varphi\big) + \big(y(\varphi') - y(\varphi)\big)\big(\sin\varrho\varphi' - \sin\varrho\varphi\big) > 0\,.$$

Durch Übergang zum Differential unter Berücksichtigung von $d\varphi > 0$, wegen $\varphi' > \varphi$, ergibt sich $(-\sin\varrho\varphi)\,dx(\varphi) + \cos\varrho\varphi \cdot dy(\varphi) > 0$

und wegen (2.5) $$\varrho\, h(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi) > 0\,.$$

Diese Rechnung läßt sich umkehren und entsprechend für eine konkave Umgebung durchführen. Daraus folgt dann:

---

[33]) Gemäß dieser Definition kann ein Kurvenstück konkav oder konvex sein, je nachdem wie die Stützgerade oder das Kurvenstück selbst orientiert wird. Wird die Kurve mittels der Stützfunktion definiert, so ist auch ihre Orientierung festgelegt und damit entschieden, welche Bogen konvex und welche konkav sind. Ist aber die Kurve gegeben, so besitzt sie im wesentlichen zwei Stützfunktionen. Ist $h_1(\varphi)$ die eine, so $h_2(\varphi) = -h_1\left(\varphi + \frac{\pi}{\varrho}\right)$ die andere. Sie bewirken entgegengesetzte Orientierung der Kurve. Obige Definition von konkav und konvex besitzt also nur hinsichtlich einer Stützfunktion einen Sinn.

Die Hüllkurve der Geradenschar (2.1) *ist in der Umgebung des Punktes* $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ *dann und nur dann konvex* (*konkav*), *wenn* $d\mathfrak{L}(\varphi) = \varrho h(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi) > 0\ (< 0)$ *ist*[34]) .

Insbesondere folgt: Es ist dann und nur dann die ganze Hüllkurve konvex (konkav), wenn $\mathfrak{L}(\varphi)$ eine monoton wachsende (abnehmende) Funktion des Winkels φ ist.

Die Eigenschaft der Hüllkurve, an einer bestimmten Stelle konvex (konkav) zu sein, ist gegenüber der Transformation $\Phi = \lambda\varphi$, $\lambda > 0$, invariant, m. a. W. ist die Hüllkurve der Schar

$$x \cos \varrho\varphi + y \sin \varrho\varphi - h(\varphi) = 0$$

an der Stelle φ_0 konvex (konkav), so ist die Hüllkurve der transformierten Schar

$$x \cos\left(\frac{\varrho}{\lambda}\,\Phi\right) + y \sin\left(\frac{\varrho}{\lambda}\,\Phi\right) - H(\Phi) = 0 \ , \quad H(\Phi) = h\left(\frac{\Phi}{\lambda}\right) = h(\varphi)\,,$$

an der Stelle $\Phi_0 = \lambda\varphi_0$ konvex (konkav). Berücksichtigt man nämlich, daß $H(\Phi) = h(\varphi)$, $d\Phi = \lambda d\varphi$, $dH'(\Phi) = \frac{1}{\lambda}\, dh'(\varphi)$, so folgt

$$\frac{\varrho}{\lambda}\, H(\Phi_0)\, d\Phi + \frac{\lambda}{\varrho}\, dH'(\Phi_0) = \varrho\, h(\varphi_0)\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi_0) \ ,$$

woraus in Verbindung mit dem vorigen Ergebnis die Behauptung folgt.

21. Aus dem Vorangehenden (insbesondere Nr. 19) sehen wir, daß jedem $h(\varphi)$, das den eingangs gemachten Voraussetzungen genügt, mittels (2.7) eine Funktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ zugeordnet ist, die von beschränkter totaler Schwankung ist und der Bedingung (2.8) genügt. Diese Zuordnung ist umkehrbar, d. h. zu jeder Funktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ mit beschränkter totaler Schwankung, die (2.8) erfüllt, existiert eine Funktion $h(\varphi)$, welche den in Nr. 16 gemachten Voraussetzungen genügt und die Gleichung (2.7) erfüllt. Geometrisch gesprochen heißt dies: Jede solche Funktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ kann Bogenfunktion einer Hüllkurve der Schar (2.1) sein; diese Hüllkurve ist bis auf Translationen eindeutig bestimmt.

Satz 6. *Sei* $\mathfrak{L}(\varphi)$ *eine Funktion, die im Intervall* $\alpha < \varphi < \beta$ *von beschränkter totaler Schwankung ist und der Bedingung*

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \frac{\mathfrak{L}(\varphi + 0) + \mathfrak{L}(\varphi - 0)}{2} \tag{2.12}$$

[34]) Vgl. hierzu auch *R. Heine* [1].

genügt. Zu irgend zwei reellen Zahlen a und b, zu einem Winkel φ_0 in (α, β) und zu $\varrho > 0$ existiert dann eine und nur eine Stützfunktion $h(\varphi)$, welche die Voraussetzungen von Nr. 16 erfüllt, eine Hüllkurve mit der Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ erzeugt und den Lagebedingungen

$$h(\varphi_0) = a\,, \qquad h'(\varphi_0) = b \tag{2.13}$$

genügt. Diese Stützfunktion besitzt die Darstellung

$$h(\varphi) = a \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + \frac{b}{\varrho} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)\,. \tag{2.14}$$

22. *Beweis von Satz 6.*

Es ist zu zeigen,

1. daß $h(\varphi)$ die Voraussetzungen in Nr. 16 erfüllt,
2. daß $\varrho h(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\varrho} dh'(\varphi) = d\mathfrak{L}(\varphi)$ ist und
3. daß die Lagebedingungen (2.13) erfüllt sind und die Funktion $h(\varphi)$ eindeutig bestimmen.

Zum Beweis von (1) und (2) genügt es $h_1(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta) = - \mathfrak{L}(\varphi_0) \cdot \sin \varrho(\varphi - \varphi_0) + \varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varrho(\varphi - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta$ zu betrachten.

1. Für jedes beliebig kleine η gilt

$$\frac{h_1(\varphi + \eta) - h_1(\varphi)}{\eta} = - \mathfrak{L}(\varphi_0) \cdot \frac{\sin \varrho(\varphi + \eta - \varphi_0) - \sin \varrho(\varphi - \varphi_0)}{\eta} +$$

$$+ \frac{\varrho}{\eta}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi+\eta} \cos \varrho(\varphi + \eta - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varrho(\varphi - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta\right] =$$

$$= - \mathfrak{L}(\varphi_0) \frac{\Delta \sin \varrho(\varphi - \varphi_0)}{\eta} + \frac{\varrho}{\eta} \int_{\varphi}^{\varphi+\eta} \cos \varrho(\varphi + \eta - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos \varrho(\varphi + \eta - \theta) - \cos \varrho(\varphi - \theta)}{\eta}\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta$$

und durch Grenzübergang, $\eta \to +0$, folgt

$$\frac{1}{\varrho} h'_{+1}(\varphi) = \mathfrak{L}(\varphi + 0) - \left[\mathfrak{L}(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + \varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta\right] \tag{2.15}$$

und entsprechend bei $\eta \to -0$

$$\frac{1}{\varrho} h_{-1}'(\varphi) = \mathfrak{L}(\varphi - 0) - \left[\mathfrak{L}(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + \varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho (\varphi - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta\right]. \quad (2.16)$$

Aus (2.15), (2.16) und (2.12) folgt dann (vgl. (2.3))

$$\frac{1}{\varrho} h_1'(\varphi) = \mathfrak{L}(\varphi) - \mathfrak{L}(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) - \varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi (\varphi - \theta)\, \mathfrak{L}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varrho (\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)\,. \quad (2.17)$$

Da die eckigen Klammern auf der rechten Seite von (2.15) und (2.16) stetig sind, folgt wegen der Voraussetzungen über $\mathfrak{L}(\varphi)$, daß die Ableitungen $h_{+1}'(\varphi)$ und $h_{-1}'(\varphi)$ und daher auch $h_+'(\varphi)$ und $h_-'(\varphi)$ von beschränkter totaler Schwankung sind und der Bedingung (2.2) genügen; damit ist (1) bewiesen.

2. Zum Beweis von (2) gehen wir von (2.17) aus und bilden

$$\frac{1}{\varrho} dh_1'(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi+\frac{1}{2}d\varphi} \cos \varrho \left(\varphi + \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right) d\mathfrak{L}(\theta) - \int_{\varphi_0}^{\varphi-\frac{1}{2}d\varphi} \cos \varrho\left(\varphi - \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right) d\mathfrak{L}(\theta) =$$

$$= \int_{\varphi-\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi} \cos \varrho\left(\varphi - \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right) d\mathfrak{L}(\theta) + \int_{\varphi}^{\varphi+\frac{1}{2}d\varphi} \cos \varrho\left(\varphi + \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right) d\mathfrak{L}(\theta) +$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\cos \varrho\left(\varphi + \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right) - \cos \varrho\left(\varphi - \tfrac{1}{2}d\varphi - \theta\right)\right] d\mathfrak{L}(\theta)$$

$$= d\mathfrak{L}(\varphi) - \varrho\, d\varphi \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho (\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)$$

$$= d\mathfrak{L}(\varphi) - \varrho h_1(\varphi)\, d\varphi\,.$$

Damit ist (2) bewiesen.

3. Da $h_1(\varphi_0) = 0$ und $h_1'(\varphi_0) = 0$, so ist nach (2.14) die Bedingung (2.13) erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß $h(\varphi)$ durch die Bedingung (2.13) eindeutig bestimmt ist. Sei $h^*\varphi$ noch eine zweite Funktion, die (2.6) und (2.13) genügt. Dann ist

$$h(\varphi) = a \cos \varrho (\varphi - \varphi_0) + \frac{b}{\varrho} \sin \varrho (\varphi - \varphi_0) +$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho (\varphi - \theta) \left[\varrho h^*(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\varrho} dh^{*\prime}(\theta)\right]$$

und es folgt durch partielle Integration

$$\frac{1}{\varrho}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varrho(\varphi-\theta)\,dh^{*\prime}(\theta) = \frac{1}{\varrho}\sin\varrho(\varphi-\theta)\cdot h^{*\prime}(\theta)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi} +$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi} h^{*\prime}(\theta)\cos\varrho(\varphi-\theta)\cdot d\theta\ ,$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} h^{*\prime}(\theta)\cos\varrho(\varphi-\theta)\,d\theta = h^{*}(\varphi)\cos\varrho(\varphi-\theta)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi} - \varrho\int_{\varphi_0}^{\varphi} h^{*}(\theta)\sin\varrho(\varphi-\theta)\cdot d\theta$$

und wegen (2.13)

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varrho(\varphi-\theta)\left[\varrho h^{*}(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\varrho}\,dh^{*\prime}(\theta)\right] =$$

$$= -\frac{b}{\varrho}\sin\varrho(\varphi-\varphi_0) - a\cos\varrho(\varphi-\varphi_0) + h^{*}(\varphi)$$

und daraus $h(\varphi)\equiv h^{*}(\varphi)$. Damit ist auch die Eindeutigkeit bewiesen.

23. Spielte bei den vorigen Betrachtungen die Periodizität der Funktionen $h(\varphi)$ und $d\mathfrak{L}(\varphi)$ keine Rolle, so soll jetzt, um den Anschluß an den ersten Abschnitt*) zu gewinnen, untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Stützfunktion $h(\varphi)$ und das Differential der Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ gleichzeitig die Periode 2π besitzen können. Setzen wir voraus, $h(\varphi)$ besitze die Periode 2π; dann hat nach (2.6) $d\mathfrak{L}(\varphi)$ dieselbe Periode oder, was dasselbe bedeutet, die Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ besitzt die Eigenschaft

$$\mathfrak{L}(\varphi\pm 2\pi) = \mathfrak{L}(\varphi) \pm \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big)\ . \tag{2.18}$$

Jeder Stützfunktion mit der Periode 2π ist also eine Bogenfunktion mit der Eigenschaft (2.18) *zugeordnet.*

Gilt auch die Umkehrung: Jeder Bogenfunktion mit der Eigenschaft (2.18) ist eine Stützfunktion mit der Periode 2π zugeordnet?

Für ganzzahlige ϱ, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ läßt sich diese Frage leicht mit der Formel (2.14) entscheiden. Ersetzen wir nämlich dort ϱ durch n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ und φ durch $\varphi+2\pi$ so folgt

$$h(\varphi+2\pi) = a\cos n(\varphi-\varphi_0) + \frac{b}{n}\sin n(\varphi-\varphi_0) +$$

$$+\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\right)\sin n(\varphi+2\pi-\theta)\,d\mathfrak{L}(\theta)$$

oder

$$h(\varphi+2\pi) = h(\varphi) + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\sin n(\varphi-\theta)\ d\mathfrak{L}(\theta)\ .$$

*) Comm. Math. Helv., vol. 11, p. 180—213.

Demnach besitzt die Funktion $h(\varphi)$ dann und nur dann die Periode 2π, wenn die Funktion

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \sin n(\varphi-\theta)\, d\mathfrak{L}(\theta) = \sin n\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta) - \cos n\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta)$$

identisch verschwindet oder wenn

$$\int_0^{2\pi} \cos n\,\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin n\,\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta) = 0$$

ist. Unter diesen Bedingungen besitzt also jede zu $\mathfrak{L}(\varphi)$ gehörige Stützfunktion die Periode 2π und die einzelnen Funktionen unterscheiden sich um eine additive Funktion von der Form $A \cos n\varphi + B \sin n\varphi$.

Anders jedoch für nicht ganzzahlige ϱ, $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$. In diesem Falle ist die Existenz periodischer Funktionen aus (2.14) nicht ersichtlich und existiert eine solche, so wird durch Addition von $A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$ die Periodizität wieder zerstört. Wie nun im folgenden genauer formuliert und bewiesen werden soll, gibt es zu jedem $\mathfrak{L}(\varphi)$ mit der Eigenschaft (2.18) eine und nur eine Stützfunktion von der Periode 2π.

Diese Tatsachen legen einen tiefgehenden Unterschied zwischen ganzzahligem und nicht ganzzahligem ϱ bloß und geben zugleich einen ersten Hinweis auf die Beziehung dieser Betrachtung zu ganzen Funktionen. Denn dort ist der Strahltypus $h(\varphi)$ einer ganzen Funktion vom Mitteltypus einer ganzzahligen Ordnung ϱ durch die Nullstellen nur bis auf eine additive Funktion von der Form $A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$ bestimmt, währenddem der Strahltypus bei nicht ganzzahliger Ordnung durch die Nullstellenverteilung vollständig bestimmt ist.

Satz 7. *Sei $\mathfrak{L}(\varphi)$ eine für alle φ definierte Funktion, welche die Voraussetzungen von Satz* 6 *und die Bedingung*

$$\mathfrak{L}(\varphi \pm 2\pi) = \mathfrak{L}(\varphi) \pm \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \tag{2.18}$$

erfüllt.

(I) *Zu einem nicht ganzzahligen positiven ϱ gibt es dann eine und nur eine Stützfunktion $h(\varphi)$ mit der Periode 2π, welche die Voraussetzung in Nr. 16 erfüllt und eine Hüllkurve mit der Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ erzeugt. Diese Stützfunktion besitzt die Darstellung*

$$2 \sin \varrho\pi \cdot h(\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot d\mathfrak{L}(\varphi+\theta)\,, \tag{2.19}$$

welcher nach Satz 6 noch die folgende an die Seite gestellt werden kann:

$$h(\varphi) = h(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi-\varphi_0) + \frac{h'(\varphi_0)}{\varrho} \sin \varrho(\varphi-\varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi-\theta) \cdot d\mathfrak{L}(\theta)\,.$$

(II) *Zu jedem ganzzahligen ϱ, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ gibt es dann und nur dann eine Stützfunktion $h(\varphi)$ von der obigen Eigenschaft, wenn die Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi)$ überdies den Bedingungen*

$$\int_0^{2\pi} \cos \varrho\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta) = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} \sin \varrho\theta \cdot d\mathfrak{L}(\theta) = 0$$

genügt. Diese Funktion $h(\varphi)$ ist dann von der Form (2.14).

Aus diesem Satz folgt nun unmittelbar die im ersten Abschnitt angekündigte geometrische Deutung der Beziehung (1.61). Denn setzen wir in (2.19) $\mathfrak{L}(\varphi) = 2\pi \cdot N^*(\varphi)$, so folgt[35] (1.61). Der durch $N^*(\varphi)$ bestimmte Strahltypus $h(\varphi)$ erzeugt daher als Stützfunktion eine Hüllkurve, deren Bogenfunktion $\mathfrak{L}(\varphi) = 2\pi\, N^*(\varphi)$ ist. Es folgt

Satz 8. *Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion von der präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho$, $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$. Ist ihre Nullstellen- und Polstellenverteilung meßbar bezüglich dieser Ordnung und sind $N_0(\varphi)$ und $N_\infty(\varphi)$ ihre entsprechenden Maßfunktionen, so genügt ihr Strahltypus $h(\varphi)$ den Voraussetzungen von Nr. 16 und erzeugt als Stützfunktion eine Kurve ohne Wendepunkte, deren Bogenfunktion*

$$\mathfrak{L}(\varphi) = 2\pi\big(N_0(\varphi) - N_\infty(\varphi)\big)$$

ist. Im entsprechenden Fall ganzer Funktionen erzeugt der Strahltypus als Stützfunktion eine konvexe Kurve mit der Bogenfunktion $2\pi N(\varphi)$.

24. *Beweis von Satz 7.* Es bleibt (I) zu beweisen. Wir zeigen,

1. daß $h(\varphi)$ die Voraussetzungen in Nr. 16 erfüllt und die Periode 2π besitzt,
2. daß $\varrho h(\varphi)\, d\varphi + \dfrac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi) = d\mathfrak{L}(\varphi)$ ist,
3. daß $h(\varphi)$ durch diese Eigenschaften falls $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ eindeutig bestimmt ist.

1. Da nach (2.18) $d\mathfrak{L}(\theta)$ die Periode 2π besitzt, so gilt nach (2.19) dasselbe für $h(\varphi)$. Durch partielle Integration folgt weiter aus (2.19)

$$2 \sin \varrho\pi \cdot h(\varphi) = \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \cos \varrho\pi + \varrho \int_0^{2\pi} \mathfrak{L}(\varphi + \theta) \sin(\varrho\theta - \varrho\pi)\, d\theta$$

oder

$$2 \sin \varrho\pi \cdot h(\varphi) = \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \cos \varrho\pi + \varrho \int_\varphi^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \sin \varrho(\theta - \varphi - \pi)\, d\theta\,. \quad (2.20)$$

[35]) Die Funktion $2\pi\, N^*(\varphi)$ genügt wegen (1.43) den Voraussetzungen von Satz 7.

Für jedes beliebig kleine η gilt dann

$$2 \sin \varrho\pi \cdot \frac{h(\varphi+\eta) - h(\varphi)}{\eta} =$$

$$= \frac{\varrho}{\eta} \int_{\varphi+\eta}^{\varphi+\eta+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \sin \varrho(\theta - \varphi - \eta - \pi)\, d\theta - \frac{\varrho}{\eta} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \sin \varrho(\theta - \varphi - \pi)\, d\theta =$$

$$= \varrho \int_{\varphi+\eta}^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \frac{\sin \varrho(\theta-\varphi-\eta-\pi) - \sin \varrho(\theta-\varphi-\pi)}{\eta}\, d\theta +$$

$$+ \frac{\varrho}{\eta} \int_{\varphi+2\pi}^{\varphi+\eta+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \sin \varrho(\theta-\varphi-\eta-\pi)\, d\theta - \frac{\varrho}{\eta} \int_{\varphi}^{\varphi+\eta} \mathfrak{L}(\theta) \sin \varrho(\theta-\varphi-\pi)\, d\theta \ .$$

Berücksichtigen wir (2.18), so folgt durch Grenzübergang $\eta \to +0$

$$\frac{2 \sin \varrho\pi}{\varrho} \cdot h'_+(\varphi) = \tag{2.21}$$
$$= \mathfrak{L}(\varphi+0) \cdot 2 \sin \varrho\pi + \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \sin \varrho\pi - \varrho \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \cos \varrho(\theta-\varphi-\pi)\, d\theta$$

und entsprechend bei $\eta \to -0$

$$\frac{2 \sin \varrho\pi}{\varrho} \cdot h'_-(\varphi) = \tag{2.22}$$
$$\mathfrak{L}(\varphi-0) \cdot 2 \sin \varrho\pi + \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \sin \varrho\pi - \varrho \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \cos \varrho(\theta-\varphi-\pi)\, d\theta \ .$$

Aus (2.21) und (2.22) ergibt sich

$$\frac{2 \sin \varrho\pi}{\varrho} \cdot h'(\varphi) = \tag{2.23}$$
$$= \mathfrak{L}(\varphi) \cdot 2 \sin \varrho\pi + \big(\mathfrak{L}(2\pi) - \mathfrak{L}(0)\big) \sin \varrho\pi - \varrho \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathfrak{L}(\theta) \cos \varrho(\theta-\varphi-\pi)\, d\theta \ .$$

Da die Integrale auf den rechten Seiten von (2.21) und (2.22) stetig sind, so folgt wegen der Voraussetzungen über $\mathfrak{L}(\varphi)$, daß die Ableitungen $h'_+(\varphi)$ und $h'_-(\varphi)$ von beschränkter Schwankung sind und die Bedingung (2.2) erfüllen. Damit ist (1) bewiesen.

2. Zum Beweis von (2) bilden wir aus (2.23)

$$\frac{2\sin\varrho\pi}{\varrho}\cdot dh'(\varphi)=$$

$$=2\sin\varrho\pi\cdot d\mathfrak{L}(\varphi)-\varrho\int\limits_{\varphi+\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi+2\pi+\frac{1}{2}d\varphi}\mathfrak{L}(\theta)\cos\varrho(\theta-\varphi-\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)\,d\theta+$$

$$+\varrho\int\limits_{\varphi-\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi+2\pi-\frac{1}{2}d\varphi}\mathfrak{L}(\theta)\cos\varrho(\theta-\varphi+\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)\,d\theta=$$

$$=2\sin\varrho\pi\cdot d\mathfrak{L}(\varphi)-\varrho\int\limits_{\varphi+2\pi-\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi+2\pi+\frac{1}{2}d\varphi}\mathfrak{L}(\theta)\cos\varrho(\theta-\varphi-\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)\,d\theta+$$

$$+\varrho\int\limits_{\varphi-\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi+\frac{1}{2}d\varphi}\mathfrak{L}(\theta)\cos\varrho(\theta-\varphi+\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)\,d\theta-$$

$$-\varrho\int\limits_{\varphi+\frac{1}{2}d\varphi}^{\varphi+2\pi-\frac{1}{2}d\varphi}\mathfrak{L}(\theta)\left[\cos\varrho(\theta-\varphi-\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)-\cos\varrho(\theta-\varphi+\tfrac{1}{2}d\varphi-\pi)\right]d\theta=$$

$$=2\sin\varrho\pi\cdot d\mathfrak{L}(\varphi)-\varrho\cdot d\varphi\Big[\big(\mathfrak{L}(2\pi)-\mathfrak{L}(0)\big)\cos\varrho\pi+$$

$$+\varrho\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\mathfrak{L}(\theta)\sin\varrho(\theta-\varphi-\pi)\,d\theta\Big]\,.$$

Daraus folgt aber in Verbindung mit (2.20) die Gleichung (2.6).

3. Es bleibt zu zeigen, daß $h(\varphi)$ durch $\mathfrak{L}(\varphi)$ und die Periodizitäteigenschaft bei $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen an, es gäbe eine zweite Funktion $h^*(\varphi)$ mit der Periode 2π, für die $\varrho h^*(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\varrho}\,dh^{*\prime}(\varphi) = d\mathfrak{L}(\varphi)$ ist. Dann ist wegen (2.19)

$$2\sin\varrho\pi\cdot h(\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}\cos\varrho(\theta-\pi)\left(\varrho h^*(\varphi+\theta)\,d\theta+\frac{1}{\varrho}\,dh^{*\prime}(\varphi+\theta)\right).$$

Durch partielle Integration folgt

$$\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varrho(\theta-\pi)\,dh^{*\prime}(\varphi+\theta)=\frac{1}{\varrho}\cos\varrho(\theta-\pi)\,h^{*\prime}(\varphi+\theta)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\sin\varrho(\theta-\pi)\,h^{*\prime}(\varphi+\theta)\,d\theta\quad,\qquad\int\limits_0^{2\pi}\sin\varrho(\theta-\pi)\,h^{*\prime}(\varphi+\theta)\,d\theta=$$

$$=\sin\varrho(\theta-\pi)\,h^*(\varphi+\theta)\Big|_0^{2\pi}-\varrho\int\limits_0^{2\pi}\cos\varrho(\theta-\pi)\,h^*(\varphi+\theta)\cdot d\theta\,.$$

Berücksichtigen wir die Periodizität von $h^*(\varphi)$, so folgt

$$2 \sin \varrho\pi \cdot h(\varphi) =$$
$$\int_0^{2\pi} \cos \varrho(\theta-\pi) \left(\varrho h^*(\varphi+\theta)\, d\theta + \frac{1}{\varrho} dh^{*\prime}(\varphi+\theta)\right) = 2 \sin \varrho\pi \cdot h^*(\varphi)\,.$$

$h(\varphi)$ und $h^*(\varphi)$ sind also identisch. Damit ist der ganze Satz bewiesen.

25. In Satz 3*) haben wir eine Klasse von Funktionen kennen gelernt, deren Strahltypus $h(\varphi)$ die Darstellung (1.46) besitzt, wo $N(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion ist; nach Satz 8 umhüllt dieser Strahltypus als Stützfunktion eine konvexe Kurve. Anderseits weiß man, daß jeder Strahltypus einer Funktion von der Ordnung ϱ der Funktionalungleichung (1.17) genügt. In welchem Verhältnis diese drei Eigenschaften zueinander stehen, gibt der folgende Satz Aufschluß:

Satz 9. *Die folgenden drei Bedingungen für die Funktion $h(\varphi)$ sind äquivalent:*

A) *Es gibt eine monoton wachsende Funktion $\mathfrak{L}(\varphi)$, so daß für geeignete Konstanten a, b und φ_0*

$$h(\varphi) = a \cos \varrho(\varphi-\varphi_0) + b \sin \varrho(\varphi-\varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi-\theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)$$

ist.

B) *Die Funktion $h(\varphi)$ erzeugt bei gegebenem $\varrho > 0$ mittels* (2.1) *eine konvexe Hüllkurve*[36]).

C) *Für jedes Wertetripel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ mit*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho} \quad , \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho} \tag{2.24}$$

genügt $h(\varphi)$ der Funktionalungleichung

$$h(\varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3-\varphi_2) + h(\varphi_2) \sin \varrho(\varphi_1-\varphi_3) + h(\varphi_3) \sin \varrho(\varphi_2-\varphi_1) \geqslant 0\,. \tag{2.25}$$

Daß die Bedingungen A) und B) äquivalent sind, ergibt sich aus Nr. 20 und Nr. 21. Es bleibt die Äquivalenz der Bedingungen A) und C) zu beweisen.

26. *Aus Bedingung A) folgt C).*

Da die trigonometrischen Funktionen $\cos \varrho\varphi$ und $\sin \varrho\varphi$ die Funktional-

[36]) Die Funktion $h(\varphi)$ soll natürlich auch den Voraussetzungen von Nr. 16 genügen. Betreffend die Stützfunktion konvexer Bereiche vgl. auch *G. Pólya* [1], S. 571—578.

*) Vgl. 1. Abschnitt, Comm. Math. Helv., vol. 11, p. 206.

gleichung erfüllen, die aus (2.25) durch Ersetzen von $\geqslant$ durch $=$ erhalten wird, so genügt es, $h_1(\varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)$ zu betrachten.

Setzen wir in der linken Seite von (2.25) ein, so folgt

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin \varrho(\varphi_1 - \theta) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2)\, d\mathfrak{L}(\theta) + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_2} \sin \varrho(\varphi_2 - \theta) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3)\, d\mathfrak{L}(\theta) +$$
$$+ \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_3} \sin \varrho(\varphi_3 - \theta) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1)\, d\mathfrak{L}(\theta) =$$
$$= \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \{ \sin \varrho(\varphi_1 - \theta) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin \varrho(\varphi_2 - \theta) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3) +$$
$$+ \sin \varrho(\varphi_3 - \theta) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \}\, d\mathfrak{L}(\theta) + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\sin \varrho(\varphi_2 - \theta) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3) +$$
$$+ \sin \varrho(\varphi_3 - \theta) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1)]\, d\mathfrak{L}(\theta) + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3} \sin \varrho(\varphi_3 - \theta) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot d\mathfrak{L}(\theta).$$

Nun ist die geschweifte Klammer $\{\ \}$ identisch null und die eckige Klammer $[\ ]$ gleich $\sin \varrho(\theta - \varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2)$. Also wird aus der linken Seite der Funktionalungleichung (2.25)

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varrho(\theta - \varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2) \cdot d\mathfrak{L}(\theta) + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3} \sin \varrho(\varphi_3 - \theta) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot d\mathfrak{L}(\theta),$$

woraus wegen $d\mathfrak{L}(\theta) \geqslant 0$ und (2.24) folgt, daß diese linke Seite stets $\geqslant 0$ ist.

27. *Aus C) folgt A).*

Wir zeigen zunächst, daß $h(\varphi)$ den Voraussetzungen von Nr. 16 genügt und betrachten hierzu eine Stelle φ_0 in der

$$h(\varphi_0) < 0 \tag{2.26}$$

gilt. Es sei

$$\frac{\pi}{\varrho} > \varepsilon' > \varepsilon > 0\,. \tag{2.27}$$

Indem man $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in (2.25) durch

$\varphi_0 - \varepsilon', \varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0$ bzw. $\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0, \varphi_0 + \varepsilon$ bzw. $\varphi_0, \varphi_0 + \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon'$

ersetzt, erhält man

$$\frac{h(\varphi_0 - \varepsilon') - h(\varphi_0)}{\sin(-\varrho\varepsilon')} < \frac{h(\varphi_0 - \varepsilon) - h(\varphi_0)}{\sin(-\varrho\varepsilon)} < \frac{h(\varphi_0 + \varepsilon) - h(\varphi_0)}{\sin \varrho\varepsilon} < \frac{h(\varphi_0 + \varepsilon') - h(\varphi_0)}{\sin \varrho\varepsilon'}\,. \tag{2.28}$$

Für das zuerst betrachtete Wertetripel ergibt nämlich (2.25)

$$h(\varphi_0 - \varepsilon') \sin \varrho\varepsilon - h(\varphi_0 - \varepsilon) \sin \varrho\varepsilon' \geqslant - h(\varphi_0) \sin \varrho(\varepsilon' - \varepsilon)\,,$$

woraus weiter

$$\begin{aligned}(h(\varphi_0 - \varepsilon') - h(\varphi_0)) \sin \varrho\varepsilon - (h(\varphi_0 - \varepsilon) - h(\varphi_0)) \sin \varrho\varepsilon' \\ \geqslant h(\varphi_0)\,[\sin \varrho\varepsilon' - \sin \varrho\varepsilon - \sin \varrho(\varepsilon' - \varepsilon)] \\ = - 2h(\varphi_0) \sin \frac{\varrho}{2}\,\varepsilon' \cdot \sin \frac{\varrho}{2}\,\varepsilon \cdot \sin \frac{\varrho}{2}\,(\varepsilon' - \varepsilon) > 0\end{aligned}$$

folgt, unter Beachtung von (2.26) und (2.27); d. h.

$$[h(\varphi_0 - \varepsilon') - h(\varphi_0)] \sin \varrho\varepsilon > [h(\varphi_0 - \varepsilon) - h(\varphi_0)] \sin \varrho\varepsilon'\,,$$

was mit der ersten der Ungleichungen (2.28) gleichbedeutend ist.

Nun bedeutet aber (2.28), daß die (für $x = 0$ nicht definierte) Funktion $\dfrac{h(\varphi_0 + x) - h(\varphi_0)}{\sin \varrho x}$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = 0$ stets zunehmend ist. Daher strebt sie gegen einen Grenzwert, sowohl dann, wenn x von rechts, als auch dann, wenn x von links in den Nullpunkt hineinrückt; d. h. es existieren die rechts- und linksseitigen Differentialquotienten $h'_+(\varphi_0)$ und $h'_-(\varphi_0)$ und es ist

$$h'_-(\varphi_0) \leqslant h'_+(\varphi_0)\,. \tag{2.29}$$

Zugleich folgt, daß $h(\varphi)$ in der Umgebung von φ_0 stetig und daher für einen benachbarten Winkel $\varphi > \varphi_0$ noch negativ ist. Daher ist auch $\dfrac{h(\varphi + x) - h(\varphi)}{\sin \varrho x}$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$ stets zunehmend. Setzen wir $x = \varphi - \varphi_0$, so folgt

$$h'_+(\varphi_0) \leqslant \varrho\,\frac{h(\varphi_0 + x) - h(\varphi_0)}{\sin \varrho x} = \varrho\,\frac{h(\varphi - x) - h(\varphi)}{\sin(-\varrho x)} \leqslant h'_-(\varphi)$$

und daraus in Verbindung mit (2.29)

$$h'_+(\varphi_0) \leqslant h'_-(\varphi) \leqslant h'_+(\varphi)\,, \tag{2.30}$$

sofern $\varphi > \varphi_0$ und $\varphi - \varphi_0$ genügend klein ist. Demnach ist bei kleinem positiven η

$$\begin{aligned}h'_+(\varphi_0) \leqslant h'_+(\varphi_0 + \eta) \leqslant \varrho\,\frac{h(\varphi_0 + 2\eta) - h(\varphi_0 + \eta)}{\sin \varrho\eta} = \\ = 2\varrho\,\frac{h(\varphi_0 + 2\eta) - h(\varphi_0)}{2 \sin \varrho\eta} - \varrho\,\frac{h(\varphi_0 + \eta) - h(\varphi_0)}{\sin \varrho\eta}\,.\end{aligned}$$

Bei $\eta \to 0$ strebt die letzte Seite dieser Ungleichung gegen $h'_+(\varphi_0)$. Entsprechendes gilt bei kleinem negativen η und $\eta \to 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} h'_+(\varphi_0 + 0) &= h'_-(\varphi_0 + 0) = h'_+(\varphi_0) \\ h_+(\varphi_0 - 0) &= h'_-(\varphi - 0) = h'_-(\varphi_0) \,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Nun wollen wir uns von der Beschränkung (2.26) befreien. Die Ungleichung (2.25) bleibt richtig, wenn darin $h(\varphi)$ durch

$$h(\varphi) - A \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) = h_1(\varphi) \tag{2.32}$$

ersetzt wird, A als konstant vorausgesetzt. Bei passender Wahl von A ist die Funktion (2.32) für $\varphi = \varphi_0$ negativ und besitzt daher für $\varphi = \varphi_0$ einen rechts- und linksseitigen Differentialquotienten, der je (2.29), (2.30) und (2.31) genügt. Die Funktionen $h'_+(\varphi)$ und $h'_-(\varphi)$ erfüllen daher die Bedingung (2.2), sind stückweise monoton und somit von beschränkter totaler Schwankung. $h(\varphi)$ genügt also den Voraussetzungen in Nr. 16[37]).

Wir setzen nun $d\mathfrak{L}(\varphi) = \varrho h(\varphi) d\varphi + \dfrac{1}{\varrho} dh'(\varphi)$. Dieses Differential erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6. Also ist

$$h(\varphi) = a \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + \frac{b}{\varrho} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta)\, d\mathfrak{L}(\theta)$$

und es bleibt zu zeigen, daß $d\mathfrak{L}(\theta)$ stets positiv ist. Durch Anwendung der Funktionalungleichung (2.25) mit $\varphi_1 = \varphi_2 - \varepsilon$, φ_2, $\varphi_3 = \varphi_2 + \varepsilon$, folgt für jedes $\varepsilon > 0$ (vgl. Nr. 26)

$$\int_{\varphi_2-\varepsilon}^{\varphi_2} \sin \varrho(\theta - \varphi_2 + \varepsilon) \sin \varrho\varepsilon \cdot d\mathfrak{L}(\theta) + \int_{\varphi_2}^{\varphi_2+\varepsilon} \sin \varrho(\varphi_2 + \varepsilon - \theta) \sin \varrho\varepsilon \cdot d\mathfrak{L}(\theta) \geqslant 0$$

oder mit $\theta - \varphi_2 = \theta'$

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \sin \varrho(\theta' + \varepsilon) \sin \varrho\varepsilon \cdot d\mathfrak{L}(\theta' + \varphi_2) + \int_{0}^{\varepsilon} \sin \varrho(-\theta' + \varepsilon) \sin \varrho\varepsilon \cdot d\mathfrak{L}(\theta' + \varphi_2) \geqslant 0.$$

Diese Beziehung kann aber nur dann für jedes $\varepsilon > 0$ gelten, wenn $\mathfrak{L}(\theta)$ in der Umgebung von $\varphi = \varphi_2$ und daher überhaupt monoton ist. Damit ist alles bewiesen.

---

[37]) In dieser Nr. folgten wir bis hieher zum Teil wörtlich der Beweisführung von *G. Pólya* [1], S. 574—575.

28. V. Bernstein hat gezeigt, daß zu jeder Funktion $h(\varphi)$, die der Funktionalungleichung (2.25) genügt, eine ganze Funktion vom Mitteltypus der Ordnung ϱ existiert, die diese Funktion als Strahltypus besitzt, daß also die Funktionalungleichung (2.25) die Klasse der Strahltypen vollständig charakterisiert[38]). Satz 9 und Satz 4 und 3 des ersten Abschnittes ergeben folgende Ergänzung dieses Resultates:

Satz 10. *Zu jeder Wachstumsordnung* $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ *und zu jeder Funktion* $h(\varphi)$, *welche der Ungleichung* (2.25) *genügt, gibt es eine ganze Funktion von der präzisen Wachstumsordnung* $\varrho(r)$ *und der Eigenschaft* (1.45).

Nr. 19 und Nr. 15 ergeben in Verbindung mit Satz 8 ein entsprechendes Resultat für meromorphe Funktionen:

Satz 11. *Zu jeder Wachstumsordnung* $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ *und zu jeder Funktion* $h(\varphi)$, *die den Voraussetzungen in Nr.* 16 *genügt, gibt es eine meromorphe Funktion von der Eigenschaft* (1.60).

Dritter Abschnitt

Die Variation des Argumentes und die Nullstellenverteilung ganzer Funktionen mit regulärem asymptotischen Verhalten

29. Im ersten Abschnitt lösten wir die Aufgabe, das asymptotische Verhalten ganzer Funktionen mit meßbarer Nullstellenverteilung zu bestimmen. Dabei stellte sich heraus, daß solchen Nullstellenverteilungen ein weitgehend reguläres Verhalten des Betrages $|f(z)|$ entspricht (vgl. Satz 3). Das Ziel dieses Abschnittes ist die Lösung der umgekehrten Aufgabe: Aus dem regulären asymptotischen Verhalten ganzer Funktionen ist ihre Nullstellenverteilung, allgemein ihre Wertverteilung zu bestimmen. Hierzu erledigen wir zuerst die Hilfsaufgabe, aus dem asymptotischen Verhalten des absoluten Betrages dasjenige des Argumentes zu bestimmen. Aus dem Verhalten beider, des Betrages und des Argumentes, schließen wir dann auf die Wertverteilung.

In den nun folgenden Betrachtungen können wir uns von der Voraussetzung, daß es sich um ganze Funktionen handle, befreien und allgemein solche Funktionen zugrunde legen, die in einem Winkelraum regulär sind. $f(z)$ bedeute also bis auf weiteres eine Funktion, die im

[38]) *V. Bernstein* [4]. Für ganze Funktionen vom Exponentialtypus ist dieser Satz zuerst in *G. Pólya* [1], S. 595, formuliert und bewiesen worden.

Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ sich regulär verhält. Bezeichnen wir mit $M(r)$ ihren maximalen Betrag auf dem Kreisbogen $|z| = r$, $\alpha < \arg z < \beta$, so lassen sich die in Nr. 2 gegebenen Definitionen für Ordnung ϱ, präzise Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und Strahltypus $h(\varphi)$ von $f(z)$ wörtlich auf unsere allgemeinere Funktionsklasse übertragen. Dagegen kann jetzt die Ordnung ϱ auch negativ werden. Wir lassen diesen Fall außer Betracht und beschränken uns auf solche Funktionen, die in einem Winkelraum regulär und von positiver Ordnung[39]) sind. Hievon beschäftigt uns hauptsächlich jene Klasse, deren asymptotisches Verhalten regulär ist. Letzteres wird durch folgende Definition genauer formuliert:

Das asymptotische Verhalten einer ganzen Funktion, die im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$, *regulär und von präziser Wachstumsordnung* $\varrho(r)$ *ist, heißt regulär, wenn für jedes* φ *im Intervall* (α, β)

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{V(r)} = h(\varphi) \tag{3,1}$$

ist.

Zur Definition dieser Regularität wurde lediglich der absolute Betrag der Funktion zu Hilfe genommen. Es ist also genauer genommen eine Regularität des Betrages. Unser Ziel ist zu zeigen, daß eine solche Funktion sich auch hinsichtlich des Argumentes und der Wertverteilung regulär verhält, was nachträglich eine Rechtfertigung unseres Regularitätsbegriffes bedeutet.

30. Vergleichen wir zunächst das Verhalten des Betrages und des Argumentes von $f(z)$. Ein weitgehender Unterschied ist offensichtlich: Der absolute Betrag $|f(z)|$ ist eine eindeutige Funktion, das Argument $\arg f(z)$ dagegen unendlich vieldeutig und in den Nullstellen von $f(z)$ sogar völlig unbestimmt. Um $\arg f(z)$ korrekt zu definieren, wählen wir in einem festen Punkt z_0, der keine Nullstelle ist, einen bestimmten Zweig des Argumentes und setzen diesen von z_0 aus längs eines Weges, der die Nullstellen von $f(z)$ vermeidet, bis nach z stetig fort. Der so erhaltene Wert $\arg f(z)$ ist eine eindeutige Funktion des gewählten Weges, also eine **Wegfunktion.** Setzen wir $\arg f(\zeta)$ längs eines zweiten „erlaubten", d. h. die Nullstellen meidenden Weges von z_0 nach z fort, so stimmen die beiden Endwerte dann und nur dann überein, wenn die Anzahl der von beiden Wegen im positiven Sinne umschlossenen Nullstellen gleich Null ist.

---

[39]) Ob solche Funktionen immer auch eine präzise Wachstumsordnung $\varrho(r)$ im Sinne von Nr. 2 besitzen ist m. E. noch nicht sichergestellt. Wir betrachten deshalb von vornherein nur solche Funktionen mit einer präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$.

Betrachten wir nun $\arg f(z)$ speziell auf der Halbgeraden $\arg z = \varphi$. Enthält sie keine Nullstellen der Funktion, so hat man nur in einem ihrer Punkte, etwa im Nullpunkt, einen Zweig des Argumentes festzulegen und diesen dann längs der ganzen Halbgeraden stetig fortzusetzen. Enthält sie Nullstellen, so ist festzulegen, auf welchem erlaubten Wege irgend ein Punkt des Strahles erreicht werden soll. Seien $\varrho_n e^{i\varphi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Nullstellen auf $\arg z = \varphi$; s_n die dazwischen liegende offene Strecke $te^{i\varphi}$, $\varrho_n < t < \varrho_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Zwei benachbarte Strecken können im wesentlichen auf zwei Arten durch einen genügend kleinen Halbkreis[40]) miteinander verbunden werden, entweder rechts oder links um die trennende Nullstelle herum, wenn die Gerade von $z = 0$ ins Unendliche durchlaufen wird. Verbinden wir willkürlich auf die eine oder andere Art je zwei benachbarte dieser Strecken, so entsteht eine zusammenhängende Punktmenge. Irgend zwei Punkte $r_1 e^{i\varphi}$ und $r_2 e^{i\varphi}$, die keine Nullstellen sind, können dann auf einem erlaubten Weg in dieser Punktmenge verbunden werden, und zwar im wesentlichen auf nur eine Art. Setzen wir also einen Zweig des Argumentes in einem Punkt $r_0 e^{i\varphi}$, der keine Nullstelle ist, längs der festgesetzten Wege in die Punkte der Strecken s_n stetig fort und definieren wir $\arg f(\varrho_n e^{i\varphi}) = \lim\limits_{t \to \varrho_n - 0} \arg f(te^{i\varphi})$, so ist $\arg f(z)$ auf der ganzen Halbgeraden $\arg z = \varphi$ eine eindeutige Funktion von z oder $\arg f(re^{i\varphi})$ als eindeutige Funktion von r erklärt. Sie erleidet bei einer k-fachen Nullstelle den Sprung $\pm k\pi$. Bei verschiedener Wahl des Ausgangszweiges unterscheiden sich die erhaltenen Funktionen nur um ein Vielfaches von 2π. Wenn im folgenden irgendwie von $\arg f(re^{i\varphi})$ als eindeutig definierter Funktion von r die Rede ist, so ist dies immer auf eine der eben beschriebenen Möglichkeiten geschehen.

Wir betrachten ein Beispiel: Sei $f(z) = 2 \cos \pi z = e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}$. Dann ist

$$f(re^{i\varphi}) = e^{\pi r\,|\sin\varphi| - i\,(\operatorname{sign}\varphi)\,\pi r \cos\varphi} \cdot \bigl(1 + \psi(r,\varphi)\bigr) ,$$

wobei $\psi(r,\varphi) \to 0$, wenn $r \to \infty$ und $\varphi \neq 0, \pi$ ist. Daher gilt für $\varphi \neq 0, \pi$

$$\frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})| \to \pi |\sin\varphi| = h(\varphi)$$

und

$$\frac{1}{r} \cdot \arg f(re^{i\varphi}) \to -(\operatorname{sign}\varphi)\pi\cos\varphi = -h'(\varphi) .$$

Diese Limesbeziehung des Argumentes gilt nicht mehr für $\varphi = 0$. Dahin

---

40) „Genügend klein" heißt hier, der Halbkreis kann auf seinen Mittelpunkt zusammengezogen werden, ohne dabei Nullstellen der Funktion zu überstreichen.

deutet schon die Tatsache, daß die beiden Grenzwerte $-h'(+0) = -\pi$ und $-h'(-0) = +\pi$ verschieden sind. Durch genaueres Hinsehen erkennt man auch, daß immer

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{1}{r} \arg f(r) \leqq \pi \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} \inf \frac{1}{r} \arg f(r) \geqq -\pi$$

ist, wie auch $\arg f(r)$ als eindeutige Funktion erklärt worden sei, und daß durch besondere Wahl der Definition je eine der beiden Grenzen erreicht werden kann. Diese Störung der Limesbeziehung für $\arg f(re^{i\varphi})$ bei $\varphi = 0$ trifft in diesem Beispiel mit zwei andern Tatsachen zusammen: Einerseits mit dem Auftreten ,,vieler" Nullstellen auf der positiven reellen Achse, anderseits mit der Unstetigkeit von $h'(\varphi)$ bei $\varphi = 0$. Unsere nachfolgende Untersuchung zeigt, daß diese drei Momente immer gleichzeitig auftreten, vorausgesetzt natürlich, daß es sich um Funktionen von regulärem asymptotischen Verhalten handelt.

31. Die Feststellungen beim soeben betrachteten Beispiel veranlassen uns, die Untersuchung von $\arg f(re^{i\varphi})$ zunächst auf solche Richtungen zu beschränken, für welche $h'(\varphi)$ stetig ist. Der Kern dieser Untersuchung besteht im Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 5. *Die im Winkelraum* $|\arg z| < \alpha$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *von der präzisen Wachstumsordnung* $\varrho(r)$ *genüge den Bedingungen*

$$h(0) = 0, \lim_{\theta\to 0} h'(\theta) = h'(0) = 0 \tag{3.2}$$

und

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |f(r)| = h(0) = 0 \ . \tag{3.3}$$

Dann gilt, wie immer auch $\arg f(r)$ *auf der positiven reellen Achse als eindeutige Funktion erklärt worden sei,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\arg f(r)}{V(r)} = 0 \ . \tag{3.4}$$

Beweis: Wegen (3.2) gibt es eine nicht negative Funktion $B(\varphi)$, die mit φ gegen Null strebt[41]), so daß

$$h(\theta) \leqq B(\varphi) \sin \varrho\varphi, \quad |\theta| \leqq \varphi \ , \tag{3.5}$$

für jedes positive $\varphi (< \alpha)$ und daher wegen (1.16) bei genügend großem r

---

[41]) Dies kann z. B. aus (2.14) geschlossen werden.

$$\log |f(z)| < \bigl(B(\varphi)\sin\varrho\varphi + o(1)\bigr)(1+\sin\varphi)^{\varrho}\cdot V(r)$$

für z in $|z-r| \leqslant r\sin\varphi$ und wegen (3.3)

$$\log |f(z_0)| > -o(1)\cdot V(r)$$

für ein z_0 in $|z-r| \leqslant \frac{r}{2}\sin\varphi$. Durch Anwendung von Hilfssatz 2b (Abschnitt 1) auf die Funktion $f(z)$ im Kreis $|z-r| < r\sin\varphi$ mit $k=\frac{1}{2}$ folgt dann

$$\left|\int\limits_{r(1-\frac{1}{2}\sin\varphi)}^{r(1+\frac{1}{2}\sin\varphi)} d\{\arg f(t)\}\right| < H\bigl(B(\varphi)\sin\varrho\varphi + o(1)\bigr)(1+\sin\varphi)^{\varrho}\cdot V(r).$$

Setze nun $r(1+\frac{1}{2}\sin\varphi) = R$ und wähle r so groß, daß $|o(1)| < B(\varphi)\sin\varrho\varphi$. Dann ist $r(1-\frac{1}{2}\sin\varphi) = (1-\frac{1}{2}\sin\varphi)(1+\frac{1}{2}\sin\varphi)^{-1}\cdot R = \eta R\ (\frac{1}{3} < \eta < 1)$ und

$$\frac{1}{(1-\eta^{\varrho})V(r)}\left|\int\limits_{\eta R}^{R} d\{\arg f(t)\}\right| < 2HB(\varphi)\frac{\sin\varrho\varphi}{1-\left(\dfrac{1-\frac{1}{2}\sin\varphi}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi}\right)^{\varrho}}(1+\sin\varphi)^{\varrho} < H'B(\varphi) \tag{3.6}$$

für jedes positive $\varphi < \frac{\pi}{2}$ bzw. η zwischen $\frac{1}{3}$ und 1. Setzen wir

$\frac{1}{V(R)}\int\limits_0^R d\{\arg f(t)\} = A(R)$, so folgt aus

$$\frac{1}{V(R)}\int\limits_0^R d\{\arg f(t)\} =$$

$$= \eta^{\varrho}\cdot\frac{1}{\eta^{\varrho}V(R)}\int\limits_0^{\eta R} d\{\arg f(t)\} + (1-\eta^{\varrho})\cdot\frac{1}{(1-\eta^{\varrho})V(R)}\int\limits_{\eta R}^{R} d\{\arg f(t)\}$$

und (3.6)

$$|A(R)| \leqslant \eta^{\varrho}\bigl(1+o(1)\bigr)|A(\eta R)| + (1-\eta^{\varrho})H'B(\varphi). \tag{3.7}$$

Wir zeigen zunächst: $|A(R)|$ ist beschränkt. Dazu wählen wir ein festes η zwischen 1 und $\frac{1}{3}$ und dann R so groß ($R > R_0$), daß $|o(1)| < \frac{1-\eta^{\varrho}}{2\eta^{\varrho}}$ (und $< B(\varphi)\sin\varrho\varphi$) wird. Letzteres ist möglich, da $o(1)$ in (3.7) nur von $V(R)$ abhängt. Wäre nun $|A(R)|$ unbeschränkt, so gäbe es unendlich viele $R > R_0$ mit $|A(R)| > 2H'B(\varphi)$ und unter diesen ein solches R^*, daß $|A(r)| < |A(R^*)|$ für $r < R^*$. Dies ergibt aber

$$|A(R^*)| = \eta^\varrho\left(1+\frac{1-\eta^\varrho}{2\eta^\varrho}\right)\cdot|A(R^*)| + (1-\eta^\varrho)\cdot\frac{|A(R^*)|}{2}$$

$$> \eta^\varrho(1+0(1))\,|A(\eta R^*)| + (1-\eta^\varrho)\cdot H'\cdot B(\varphi)\,,$$

was der Ungleichung (3.7) widerspricht. Da nun $\limsup\limits_{R\to\infty}|A(R)|$ endlich ist, so folgt aus (3.7)

$\limsup\limits_{R\to\infty}|A(R)| \leqslant \eta^\varrho\cdot\limsup\limits_{R'\to\infty}|A(R')| + (1-\eta^\varrho)H'B(\varphi)$ und daher $\limsup\limits_{R\to\infty}|A(R)| \leqslant H'B(\varphi)$.

Da aber hier die linke Seite von φ unabhängig ist und zugleich φ beliebig klein gewählt werden kann, folgt aus $B(\varphi)\to 0$ mit $\varphi\to 0$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{V(R)}\int_0^R d\{\arg f(t)\} = 0$$

und schließlich wegen $\int\limits_0^R d\{\arg f(t)\} = \arg f(R) - c$ die Behauptung.

Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz ergibt sich

Satz 12. *Sei die im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ reguläre Funktion $f(z)$ von der präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und von regulärem asymptotischen Verhalten. Dann gilt für jede Stetigkeitsstelle der Funktion $h'(\varphi)$*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} = -\frac{1}{\varrho}h'(\varphi)\,, \tag{3.8}$$

wie auch $\arg f(re^{i\varphi})$ als eindeutige Funktion von r definiert worden sei[42]).

Bemerkung: Der Ausdruck $-\frac{1}{\varrho}h'(\varphi)$ hat eine einfache geometrische Bedeutung (vgl. Abschnitt II). Hat $P(\varphi)$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 17 und bezeichnet $F(\varphi)$ den Fußpunkt des Lotes von O aus auf die Stützgerade von Normalenrichtung $\varrho\varphi$, so ist die nach Betrag und Vorzeichen bestimmte Strecke $\overrightarrow{P(\varphi)F(\varphi)}$ gleich $-\frac{1}{\varrho}h'(\varphi)$[43]) .

Beweis: Sei φ eine Stetigkeitsstelle von $h'(\theta)$. Setzen wir

$$F(z) = f(z)\cdot e^{-[h(\varphi)-\frac{i}{\varrho}h'(\varphi)]\,V(ze^{-i\varphi})}\,,$$

so gilt

[42]) Vgl. *A. Pfluger* [2]. Mit der Funktion $h(\varphi)$ ist natürlich auch die Beziehung (3.8) invariant gegenüber Translationen der z-Ebene.

[43]) Über Fußpunktkurven konvexer Kurven vgl. *G. Doetsch* [1] und [2], S. 80—86.

$$\log |F(re^{i\theta})| =$$

$$\log |f(re^{i\theta})| - [h(\varphi) \cos \varrho(\theta - \varphi) + \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \sin \varrho(e - \varphi)] V(r) + 0(V(r)) .$$

Werden $\arg f(re^{i\theta})$ und $\arg F(re^{i\theta})$ in gleicher Weise als eindeutige Funktionen erklärt, d. h. wird je ein fester Funktionszweig auf gleichen erlaubten Wegen in die Punkte der Halbgeraden $\arg z = \theta$ stetig fortgesetzt, so gilt ferner

$$\arg F(re^{i\theta}) = \tag{3.9}$$

$$\arg f(re^{i\theta}) - [h(\varphi) \sin \varrho(\theta - \varphi) - \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \cos \varrho(\theta - \varphi)] V(r) + o(V(r)) .$$

Bezeichnet $H(\theta)$ den Strahltypus von $F(z)$, so folgt

$$H(\theta) = h(\theta) - [h(\varphi) \cos \varrho(\theta - \varphi) + \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \sin \varrho(\theta - \varphi)]$$

und daraus

$$H(\varphi) = 0 \quad , \quad \lim_{\theta \to \varphi} H'(\theta) = H'(\varphi) = 0 .$$

$F(z)$ erfüllt also die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 mit $\theta = \varphi$ an Stelle von $\theta = 0$. Es folgt $\arg F(re^{i\varphi}) = o(V(r))$ und hieraus in Verbindung mit (3.9) die Behauptung (3.8).

32. Untersuchen wir nun das Verhalten von $\arg f(re^{i\varphi})$ längs jener Richtungen, für welche $h'(\varphi)$ unstetig ist. Wie das am Schluß von Nr. 30 angeführte Beispiel zeigt, kann hier nicht die Existenz eines Limes im Sinne von Satz 12 erwartet werden. Anderseits hängen im allgemeinen die stets existierenden Zahlen

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} = \overline{A}(\varphi) \quad \text{und} \quad \liminf_{r \to \infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} = \underline{A}(\varphi) \tag{3.10}$$

von der gewählten Definition von $\arg f(re^{i\varphi})$ ab. Damit ergibt sich die Aufgabe, eine obere bzw. untere Schranke der Zahlen $\overline{A}(\varphi)$ bzw. $\underline{A}(\varphi)$ zu suchen, die unabhängig sind von der Definition des Ausdruckes $\arg f(re^{i\varphi})$.

Für alle Stetigkeitsstellen von $h'(\theta)$ gilt nach Satz 12

$$\overline{A}(\theta) = \underline{A}(\theta) = -\frac{1}{\varrho} h'(\theta) .$$

Beachten wir ferner, daß $-\frac{1}{\varrho} h'(\theta + 0) \leqq -\frac{1}{\varrho} h'(\theta - 0)$ (vgl. (2.9)) und daß die Stetigkeitsstellen von $h'(\theta)$ überall dicht liegen, so führt eine etwas voreilige Überlegung zum Schluß, daß allgemein gilt

$$\overline{A}(\varphi) \leqslant -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi - 0) \qquad \text{und} \qquad \underline{A}(\varphi) \geqslant -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi + 0) .$$

Wir wollen dies als Satz formulieren und dann den voreiligen Schluß nachträglich rechtfertigen.

Satz 13. *Ist die Funktion* $f(z)$ *im Winkelraum* $\alpha < \arg z < \beta$ *regulär, von der präzisen Wachstumsordnung* $\varrho(r)$ *und von regulärem asymptotischen Verhalten, so gilt, wie auch* $\arg f(re^{i\varphi})$ *als eindeutige Funktion von* r *erklärt worden sei*

$$-\frac{1}{\varrho} h'(\varphi + 0) \leqslant \liminf_{r\to\infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} \leqslant -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi - 0). \tag{3.11}$$

Bemerkung: Satz 13 enthält als Spezialfall Satz 12.

Beweis: Es genügt, den Fall $f(0) \neq 0$ zu betrachten; denn Satz 13 gilt für die beiden Funktionen $f(z)$ und $z^n \cdot f(z)$ gleichzeitig. Wir dürfen weiterhin ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktionen $\arg f(re^{i\varphi})$ bei $r = 0$ für alle φ im Intervall (α, β) denselben Zweig des Argumentes besitzen. Denn der allgemeine Fall entsteht hieraus durch Addition je eines Vielfachen von 2π (zu den Funktionen $\arg f(re^{i\varphi})$), was die Beziehung (3.11) wiederum nicht zu stören vermag. Unter diesen Voraussetzungen zeigen wir, daß

$$\overline{A}(\varphi) \leqslant \liminf_{\eta\to+0} \overline{A}(\varphi - \eta) \quad \text{und} \quad \underline{A}(\varphi) \geqslant \limsup_{\eta\to-0} \underline{A}(\varphi + \eta),\ \eta > 0, \tag{3.12}$$

ist, wovon (3.11) dann eine einfache Folgerung ist. Denn für unendlich viele, gegen φ strebende θ gilt (3.8) und daher

$$\liminf_{\eta\to+0} \overline{A}(\varphi - \eta) \leqslant -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi - 0) \text{ und } \limsup_{\eta\to+0} \underline{A}(\varphi + \eta) \geqslant -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi + 0),$$

woraus in Verbindung mit (3.12) die Behauptung (3.11) folgt.

Zum Beweis von (3.12) betrachten wir $\arg f(z)$ auf einer Kurve Γ, die im wesentlichen mit dem Rande des Sektors $|z| \leqslant r$, $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$ übereinstimmt, eventuell Nullstellen auf diesem Rande aber auf folgende Weise durch kleine Kreisbogen umgeht: Wird $\arg f(z)$ von einem Punkt $re^{i\varphi}$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ im positiven Umlaufsinne längs dieser Kurve Γ stetig fortgesetzt, so soll diese Funktion auf den Grenzradien des Sektors je mit

$\arg f(re^{i\varphi_1})$ und $\arg f(re^{i\varphi_2})$ übereinstimmen[44]). Bezeichnet $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen, die von Γ umschlossen werden, so gilt

$$\oint_\Gamma d \arg f(z) = 2\pi \cdot n(r) .$$

Da

$$\int_r^0 d \arg f(te^{i\varphi_2}) + \int_0^r d \arg f(te^{i\varphi_1}) = \arg f(re^{i\varphi_1}) - \arg f(re^{i\varphi_2}) ,$$

so folgt

$$\arg f(re^{i\varphi_1}) - \arg f(re^{i\varphi_2}) = 2\pi \cdot n(r) - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \arg f(re^{i\theta}) \qquad (3.13)$$

und schließlich

$$\arg f(re^{i\varphi_1}) \geqslant \arg f(re^{i\varphi_2}) - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \arg f(re^{i\theta}) .$$

Setzt man

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \arg f(re^{i\theta}) \right| = J(\varphi_1 , \varphi_2) , \qquad (3.14)$$

so folgt bei Verwendung der Bezeichnung (3.10) weiter

$$\begin{aligned} \overline{A}(\varphi_1) &\geqslant \overline{A}(\varphi_2) - J(\varphi_1 , \varphi_2) \\ \underline{A}(\varphi_1) &\geqslant \underline{A}(\varphi_2) - J(\varphi_1 , \varphi_2) . \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Wir untersuchen das Verhalten von $J(\varphi_1, \varphi_2)$, wenn $\varphi_2 - \varphi_1 \to 0$. Hierzu setzen wir

$$F_\varphi(z) = f(z)\, e^{-h(\varphi)\cdot V(z\cdot e^{-i\varphi})}, \quad \alpha < \varphi < \beta . \qquad (3.16)$$

Es gilt dann

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log | F_\varphi(re^{i\varphi}) | = 0 \quad (\alpha < \varphi < \beta)$$

und

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \log | F_\varphi(re^{i\theta}) | < \varepsilon/2$$

in jedem Teilintervall $(\alpha <)\, \alpha' \leqslant \varphi \leqslant \beta' (< \beta)$ von (α, β) und für jedes $\varepsilon > 0$, sobald $|\varphi - \theta| < 2\,\delta(\varepsilon, \alpha', \beta') = 2\,\delta$. Daher ist

$$\log |F_\varphi(z)| < \varepsilon V(r) \qquad \text{für } |z - re^{i\varphi}| \leqslant r \sin 2\,\delta \text{ und}$$

$$\log |F_\varphi(z_0)| > -\varepsilon V(r) \quad \text{für ein } z_0 \text{ in } |z - re^{i\varphi}| < r \sin \delta ,$$

[44]) Auf welchen kleinen Halbkreisen der Weg Γ die Nullstellen auf dem Bogen $|z| = r$, $\varphi_1 \lesseqgtr \arg z \lesseqgtr \varphi_2$ umgeht, ist an und für sich gleichgültig. Doch setzen wir fest, daß sie immer im positiven Sinne umgangen werden sollen, wenn nichts anderes ausdrücklich bemerkt wird.

sobald r genügend groß ist. Durch Anwendung von Hilfssatz 2b (Abschnitt 1) auf die Funktion $F_\varphi(z)$ im Kreis $|z - re^{i\varphi}| \leqslant r \sin 2\delta$ mit $k = \dfrac{\sin\delta}{\sin 2\delta}$ folgt dann

$$\left| \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} d\left\{ \arg F_\varphi(re^{i\theta}) \right\} \right| < \varepsilon H V(r)$$

und wegen (3.16)

$$\left| \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} d\left\{ \arg f(re^{i\theta}) \right\} \right| < \left(H\varepsilon + 2\,|h(\varphi)|\sin\delta + o(1)\right) V(r)$$

für r genügend groß, δ genügend klein und für alle φ im Intervall (α', β'). Für $\varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ und $\varphi_2 - \varphi_1 = \delta$ ergibt letzteres

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\{\arg f(re^{i\theta})\} \right| < H\varepsilon + 2\,|h(\varphi)|\,\sin\delta\,.$$

Da die rechte Seite mit δ beliebig klein wird, so folgt

$$\lim_{\varphi_2-\varphi_1\to 0} J(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,, \tag{3.17}$$

wo auch das Wertepaar φ_1, φ_2 im Intervall (α', β') gewählt werde. Aus (3.17) und (3.15) folgt (3.12), womit unser Satz bewiesen ist.

33. Die Untersuchung der vorigen Nummer, insbesondere die Gleichung (3.13) ergibt auch sofort ein erstes Resultat über die Verteilung der Nullstellen. Denn zu jeder Stelle φ im Intervall (α, β) gibt es beliebig nahe bei φ gelegene Zahlen θ' und θ'' mit $\theta' < \varphi < \theta''$, für welche $h'(\theta)$ stetig ist. Aus (3.13) und Satz 12 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho} h'(\theta') + \frac{1}{\varrho} h'(\theta'') &= 2\pi \liminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\theta',\theta'')}{V(r)} - \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\theta'}^{\theta''} d\{\arg f(re^{i\theta})\} \\ &= 2\pi \limsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\theta',\theta'')}{V(r)} - \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\theta'}^{\theta''} d\{\arg f(re^{i\theta})\}, \end{aligned}$$

wenn $n(r, \theta', \theta'')$ die Anzahlfunktion der Nullstellen im Winkelraum $\theta' \leqslant \arg z \leqslant \theta''$ bezeichnet. Daraus folgt in Verbindung mit (3.17) und (3.14): *Der obere und der untere Limes des Ausdruckes* $2\pi \cdot \dfrac{n(r, \varphi-\varepsilon, \varphi+\varepsilon)}{V(r)}$ *kommen bei genügend kleinem* $\varepsilon > 0$ *je beliebig nahe an die Zahl* $\dfrac{1}{\varrho}\left[h'(\varphi+0) - h'(\varphi-0)\right]$ *heran.* Insbesondere kommen sie bei jeder

Stetigkeitsstelle von $h'(\varphi)$ der Null beliebig nahe, währenddem sie bei jeder Unstetigkeitsstelle sich einer positiven Zahl beliebig nähern. Wie am Schluß von Nr. 30 zunächst an einem Beispiel gezeigt wurde, ist jetzt das Zusammentreffen der folgenden drei Umstände allgemein[45]) bewiesen:

1. $h'(\varphi)$ ist an der Stelle φ_0 unstetig,
2. der Grenzwert (3.8) existiert für $\varphi = \varphi_0$ nicht mehr,
3. die untere Dichte der Nullstellen in jedem noch so kleinen Winkelraum um φ_0 kann eine positive Zahl nicht unterschreiten.

Der eben besprochene Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Betrages, des Argumentes und der Nullstellen einer regulären Funktion läßt sich in quantitativer Hinsicht noch erheblich verschärfen. Dazu führt wieder die Gleichung (3.13) und eine genauere Untersuchung des Integrals auf der rechten Seite.

34. Wir beweisen zunächst

Satz 14. *Es sei die Funktion $f(z)$ im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ regulär, von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und von regulärem asymptotischen Verhalten. Dann gilt für irgend zwei Stellen φ' und φ'' im Intervall $\alpha < \varphi < \beta$*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\{\arg f(re^{i\theta})\} = \varrho \int_{\varphi'}^{\varphi''} h(\theta)\, d\theta \ . \tag{3.18}$$

Beweis: Wir teilen das Intervall (φ', φ'') in $2n$ gleiche Teile von der Länge $\delta = \dfrac{\varphi'' - \varphi'}{2n}$, bezeichnen die Teilpunkte mit $\varphi' = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$ $\varphi_{2n+1} = \varphi''$ und setzen

$$F_\nu(z) = f(z)\, e^{-[h(\varphi_{2\nu}) - \frac{i}{\varrho} h'(\varphi_{2\nu})]\, V(ze^{-i\varphi_{2\nu}})} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Bezeichnet $H_\nu(\varphi)$ den Strahltypus von $F_\nu(z)$, so folgt

$$H_\nu(\varphi) = h(\varphi) - \left[h(\varphi_{2\nu}) \cos \varrho(\varphi - \varphi_{2\nu}) + \frac{1}{\varrho} h'(\varphi_{2\nu}) \sin \varrho(\varphi - \varphi_{2\nu})\right]$$

und weiter nach (2.14) mit $\varphi_0 = \varphi_{2\nu}$, $a = h(\varphi_{2\nu})$ und $b = h'(\varphi_{2\nu})$

$$H_\nu(\varphi) = \int_{\varphi_{2\nu}}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta) \cdot d\Omega(\theta) \ .$$

---

[45]) „Allgemein“ meint hier immer unter der Voraussetzung, daß sich die Funktion asymptotisch regulär verhalte.

Es ist also

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |F_\nu(re^{i\varphi_{2\nu}})| = 0,$$

und

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \log |F_\nu(re^{i\varphi})| \leqq \sin 2\varrho\delta\,(\mathfrak{L}(\varphi_{2\nu}+2\delta) - \mathfrak{L}(\varphi_{2\nu}-2\delta)),$$

$$\varphi_{2\nu} - 2\delta \leqq \varphi \leqq \varphi_{2\nu} + 2\delta \,.$$

Darnach gilt gleichmäßig in $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$ bei genügend großem r

$$\log |F_\nu(z)| < [\sin 2\varrho\,\delta\,(\mathfrak{L}(\varphi_{2\nu}+2\,\delta) - \mathfrak{L}(\varphi_{2\nu} - 2\,\delta)) + o(1)](1+\sin 2\delta)^\varrho \cdot V(r)$$

$$\text{für} \quad |z - re^{i\varphi_{2\nu}}| \leqq r \sin 2\,\delta$$

und

$$\log |F_\nu(z_0)| > -o(1)\,V(r)$$

für ein z_0 in $|z - re^{i\varphi_{2\nu}}| \leqq r \sin \delta$. Durch Anwendung von Hilfssatz 2b auf die Funktion $F_\nu(z)$ im Kreis $|z - re^{i\varphi_{2\nu}}| \leqq r \sin 2\,\delta$ mit $k = \dfrac{\sin \delta}{\sin 2\delta}$ folgt

$$\left| \int_{\varphi_{2\nu}-\delta}^{\varphi_{2\nu}+\delta} d\,\{\arg F_\nu(z)\} \right| =$$

$$\left| \int_{\varphi_{2\nu}-\delta}^{\varphi_{2\nu}+\delta} d\{\arg f(re^{i\theta})\} - h(\varphi_{2\nu})\; 2 \sin \varrho\delta \cdot V(r) \right| \leqq$$

$$\leqq H\,[\sin 2\varrho\delta(\mathfrak{L}(\varphi_{2\nu}+2\delta) - \mathfrak{L}(\varphi_{2\nu}-2\delta)) + o(1)](\sin 2\delta + 1)^\varrho V(r),$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Die Addition dieser Ungleichungen gibt nach Division durch $V(r)$

$$\left| \frac{1}{V(r)} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\{\arg f(re^{i\theta})\} - \sum_{\nu=1}^{n} h(\varphi_{2\nu})\; 2 \sin \varrho\delta \right| \leqq$$

$$\leqq H[\,2 \sin 2\varrho\delta\,(\mathfrak{L}(\varphi''+\delta) - \mathfrak{L}(\varphi'-\delta)) + o(1)\,](1+\sin 2\delta)^\varrho =$$

$$= K \sin 2\varrho\delta + o(1)$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(\varphi_{2\nu})\; 2 \sin \varrho\delta - K \sin 2\varrho\,\delta - o(1) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{V(r)} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\{\arg f(re^{i\theta})\} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} h(\varphi_{2\nu})\; 2 \sin \varrho\delta + K \sin 2\varrho\,\delta + o(1)\,.$$

Beachten wir nun, daß bei $\delta \to 0$ die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} h(\varphi_{2\nu})\, 2 \sin \varrho\, \delta$ gegen das Integral $\varrho \int_{\varphi'}^{\varphi''} h(\theta) d\theta$ strebt, so folgt aus der letzten Ungleichung bei $\delta \to 0$ und $r \to \infty$ die Behauptung (3.18).

35. Kehren wir nun zur Formel (3.13) zurück und legen wir fest, daß die zur stetigen Fortsetzung von $\arg f(z)$ nötigen Umwege die Nullstellen auf dem Rande des Sektors $0 \leqq |z| \leqq r$, $\varphi_1 \leqq \arg z \leqq \varphi_2$, immer im positiven Sinne umlaufen. Dann umschließt Γ (vgl. Nr. 32) die in diesem Sektor gelegenen Nullstellen von $f(z)$. Bezeichnen wir ihre Anzahl mit $n(r, \varphi_1, \varphi_2)$[46], so ist

$$\arg f(re^{i\varphi_1}) - \arg f(re^{i\varphi_2}) = 2\pi \cdot n(r, \varphi_1, \varphi_2) - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\, \{\arg f(re^{i\theta})\}\,.$$

In Verbindung mit Satz 13 und Satz 14 folgt daraus

$$\frac{1}{\varrho}[h'(\varphi_2 - 0) - h'(\varphi_1 + 0)] - o(1) \leqq$$

$$2\pi \frac{n(r, \varphi_1, \varphi_2)}{V(r)} - \varrho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h(\theta)\, d\theta \leqq \frac{1}{\varrho}[h'(\varphi_2 + 0) - h'(\varphi_1 - 0)] + o(1)\,. \quad (3.19)$$

Für zwei Stetigkeitsstellen φ_1 und φ_2 von $h'(\varphi)$ gilt insbesondere

$$2\pi \lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \varphi_1, \varphi_2)}{V(r)} = \varrho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\varrho}[h'(\varphi_2) - h'(\varphi_1)]\,. \quad (3.20)$$

Da aber diese Stetigkeitsstellen im Intervall (α, β) überall dicht liegen, so ist die Nullstellenverteilung der Funktion $f(z)$ im Winkelraum (α, β) meßbar (vgl. Nr. 11, Abschnitt 1).

Satz 15. *Es sei die Funktion $f(z)$ im Intervall $\alpha < \arg z < \beta$ regulär, von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und von regulärem asymptotischen Verhalten. Dann ist ihre Nullstellenverteilung in diesem Winkelraume meßbar bezüglich der Ordnung $\varrho(r)$ und es gilt für ihre Maßfunktion*

$$2\pi \cdot dN(\varphi) = \varrho h(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, dh'(\varphi) = d\mathfrak{L}(\varphi)\,.^{*)} \quad (3.21)$$

36. Im Anschluß an den 2. Abschnitt lassen sich die Ergebnisse, wie sie in Satz 12 bis Satz 15 ausgesprochen wurden, folgendermaßen geometrisch interpretieren: Wir betrachten die Hüllkurve $\mathfrak{H}$ der Geradenschar (2.1),

---

[46]) Im Gegensatz zu früher (Nr. 11) bezeichnet jetzt $n(r, \varphi_1, \varphi_2)$ die Anzahl der Nullstellen im *abgeschlossenen* Sektor $|z| \leqq r$, $\varphi_1 \leqq \arg z \leqq \varphi_2$.

*) Vgl. *A. Pfluger* [2].

wo $h(\varphi)$ jetzt den Strahltypus der Funktion $f(z)$ bedeuten soll, und ordnen jedem Winkel φ gemäß Nr. 17 den Punkt $P(\varphi)$ zu. Bezeichnet $\overparen{P(\varphi_1)\,P(\varphi_2)}$ die Länge des zwischen $P(\varphi_1)$ und $P(\varphi_2)$ gelegenen Stücks der Hüllkurve, so folgt nach (3.19) und (2.7)

$$\overparen{P_+(\varphi_1)\,P_-(\varphi_2)} - o(1) < 2\pi\frac{n(r,\varphi_1,\varphi_2)}{V(r)} < \overparen{P_-(\varphi_1)\,P_+(\varphi_2)} + o(1)\,.$$ [47])

Bezeichnen wir weiter mit $F(\varphi)$ den Fußpunkt des Lotes, das von O aus auf die Stützgerade von Normalenrichtung $\varrho\varphi$ errichtet wird, und mit $\overrightarrow{P(\varphi)F(\varphi)}$ nach Betrag und Vorzeichen die Länge der Strecke $P(\varphi)F(\varphi)$ auf der orientierten Stützgeraden. Nach (3.11) und der Bemerkung zu Satz 12 ist dann

$$\overrightarrow{P_+(\varphi)\,F(\varphi)} - o(1) < \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} < \overrightarrow{P_-(\varphi)\,F(\varphi)} + o(1)\,.$$

Bezeichnen wir schließlich mit $\overparen{F(\varphi_1)\,F(\varphi_2)}$ die Länge des Weges von F_1 nach P_1 entlang der ersten Stützgeraden, von P_1 nach P_2 entlang der Hüllkurve und von P_2 nach F_2 entlang der zweiten Stützgeraden, jedes Wegstück nach Betrag und Vorzeichen gezählt, setzen wir also

$$\overparen{F(\varphi_1)\,F(\varphi_2)} = \overrightarrow{F(\varphi_1)P(\varphi_1)} + \overparen{P(\varphi_1)\,P(\varphi_2)} + \overrightarrow{P(\varphi_2\,F(\varphi_2)}\,, \tag{3.22}$$

so folgt aus (3.18) und (2.7)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\{\arg f(re^{i\theta})\} = \overparen{F(\varphi_1)\,F(\varphi_2)}\,. \tag{3.23}$$

Speziell für zwei Stetigkeitsstellen von $h'(\varphi)$ ist

$$2\pi\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\varphi_1,\varphi_2)}{V(r)} = \overparen{P(\varphi_1)\,P(\varphi_2)} \tag{3.24}$$

und

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\arg f(re^{i\varphi_2})}{V(r)} = P(\varphi_2)\,F(\varphi_2)\;;\;\lim_{r\to\infty}\frac{\arg f(re^{i\varphi_1})}{V(r)} = F(\varphi_1)P(\varphi_1)\,. \tag{3.25}$$

Nach (3.23), (3.24) und (3.25) erweist sich die Gleichung (3.22) als geometrische Interpretation von (3.20). Jetzt ist auch geometrisch ersichtlich, daß die Grenzwerte bei (3.25) und (3.24) unstetig sein können, dagegen der Grenzwert bei (3.23) stetig von φ abhängt.

[47]) Dies ist eine Verallgemeinerung bereits bekannter Resultate über die Nullstellenverteilung von Exponentialsummen. Siehe *G. Pólya* [3], [4]; *E. Schwengeler* [1].

37. Die Sätze 12 bis 15 gelten allgemein für solche Funktionen, die in einem Winkelraume regulär, von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho > 0$, und von regulärem asymptotischen Verhalten sind. Äußerlich wenigstens spielt hier der Unterschied, ob ϱ eine ganze oder nichtganze Zahl sei, keine Rolle.

Um den Anschluß an den ersten Abschnitt zu gewinnen, betrachten wir jetzt ganze Funktionen von der Ordnung $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$. Für diese Funktionen ist Satz 15 eine Umkehrung von Satz 3: *Ganze Funktionen von der Ordnung* $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ *mit meßbarer Nullstellenverteilung verhalten sich asymptotisch regulär und umgekehrt ganze Funktionen von regulärem asymptotischen Verhalten besitzen eine meßbare Nullstellenverteilung.* In beiden Fällen gelten (3.11), (3.18) und (3.21). Für $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ sind also meßbare Nullstellenverteilung und reguläres asymptotisches Verhalten je charakteristische Eigenschaften einer speziellen Klasse ganzer Funktionen, deren Verhalten bezüglich Betrag, Argument und Nullstellenverteilung leicht erfaßt werden kann. Die sich hier anschließende Frage, ob eine ähnliche Charakterisierung durch das Argument möglich sei, werden wir bald im bejahenden Sinne beantworten können. Letztere Charakterisierung durch das Argument sowie diejenige durch den absoluten Betrag gelten allgemein für positive endliche Ordnungen. Eine Charakterisierung der Funktionsklasse von den Nullstellen her ist hingegen nur bei nicht ganzzahliger Ordnung möglich. Die Nullstellen nehmen in diesem Rahmen bei $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ eine Ausnahmestellung ein, auf die wir noch näher eintreten wollen.

Aus dem ersten und zweiten Abschnitt, insbesondere aus (1.46) und (2.6) folgt bei $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$, daß die Funktionen $dN(\varphi)$ und $h(\varphi)$ immer gleichzeitig identisch null sind, daß also mit andern Worten die Funktionen $n(r, 2\pi)$ und $\log M(r)$ immer gleichzeitig vom Minimal- bzw. Mitteltypus sind. Für $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ trifft dies jedoch nicht allgemein zu. Denn wie die Zusätze von Hilfssatz 1 und Satz 3 zeigen, kann die Größenordnung von $n(r, 2\pi)$ wesentlich kleiner sein als jene von $\log M(r)$, kann also die Funktion $n(r, 2\pi)$ bezüglich einer Wachstumsordnung $\varrho(r)$ vom Minimaltypus und ihre zugehörige Funktion $\log M(r)$ vom Mitteltypus sein.

Um diesen Sachverhalt vom dritten Abschnitt aus zu beleuchten, betrachten wir eine ganze Funktion von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und regulärem asymptotischen Verhalten und suchen die Bedingungen, unter denen $dN(\varphi) \equiv 0$ und $h(\varphi) \not\equiv 0$ sein kann. Diese Frage kommt darauf hinaus, die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\varrho^2 \int h(\varphi)\, d\varphi + h'(\varphi) = 0$$

mit der Periode 2π zu bestimmen. $H(\varphi) = \int h(\varphi)\,d\varphi$ gesetzt, geht letztere über in die Differentialgleichung

$$H''(\varphi) + \varrho^2 H(\varphi) = 0\,,$$

deren allgemeine Lösung $H(\varphi) = a \sin \varrho\varphi + b \cos \varrho\varphi$ ist. Daraus folgt $h(\varphi) = \varrho a \cos \varrho\varphi + \varrho b \sin \varrho\varphi$. Für $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ besitzt diese Funktion dann und nur dann die Periode 2π, wenn a und b null sind, also $h(\varphi)$ identisch verschwindet. Für ganzzahlige ϱ hingegen besitzt $h(\varphi) = A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$ für alle Zahlen A und B die Periode 2π. Daraus folgt:

Bei ganzen Funktionen von positiver endlicher Ordnung mit regulärem asymptotischen Verhalten sind $n(r, 2\pi)$ *und* $\log M(r)$ *im allgemeinen zugleich vom Minimaltypus einer präzisen Ordnung.* $n(r, 2\pi)$ *ist dann und nur dann vom Minimaltypus ohne daß auch* $\log M(r)$ *es ist, wenn*

1. $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ *und*
2. $h(\varphi) = A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$ *ist.*

Demnach spielen die ganzzahligen ϱ im Rahmen des dritten Abschnittes nur scheinbar keine Ausnahmerolle. Sogar in einer weitern Hinsicht als bereits angegeben, besitzen die Nullstellenverteilung ganzer Funktionen mit ganzzahliger Ordnung eine Sonderstellung. Können nämlich bei $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ ganze Funktionen mit beliebig vorgeschriebener, monoton wachsender Maßfunktion gefunden werden, so besitzen jene Nullstellenverteilung, die zu ganzen Funktionen mit ganzzahliger Ordnung und regulärem asymptotischen Verhalten gehören, neben der Meßbarkeit noch eine Art Gleichgewichtseigenschaft.

Aus Satz 7 folgt nämlich: *Die Maßfunktion der Nullstellenverteilung einer ganzen Funktion von ganzzahliger Ordnung* ϱ *und regulärem asymptotischen Verhalten, genügt den beiden Bedingungen*

$$\int_0^{2\pi} \cos \varrho\theta \cdot dN(\theta) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \int_0^{2\pi} \sin \varrho\theta \cdot dN(\theta) = 0\ .\ ^{*)}$$

38. Betrachten wir nun weiter die Klasse der Funktionen, die in einem Winkelraum regulär, von einer präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und von regulärem asymptotischen Verhalten sind. Nach den Sätzen 13, 14 und 15 besitzen alle diese Funktionen auch hinsichtlich des Argumentes

*) Ist z. B. eine Nullstellenverteilung meßbar bezüglich einer ganzzahligen Ordnung, sind aber obige Bedingungen nicht erfüllt, so tritt notwendig eine Erhöhung der Wachstumsordnung des Betrages ein; d. h. bezüglich der Wachstumsordnung des Betrages ist die Nullstellenverteilung vom Minimaltypus; vgl. hiezu die Funktion $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$.

und der Nullstellenverteilung eine Art reguläres Verhalten. Läßt sich also auch umgekehrt diese Funktionsklasse mittels der Nullstellenverteilung oder des Argumentes charakterisieren?

Daß bei ganzen Funktionen der Ordnung $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten sei, ist zum Teil schon gezeigt worden. Allgemein ist aber die Meßbarkeit der Nullstellen keine charakteristische Eigenschaft unserer Funktionsklasse. Denn es lassen sich leicht Funktionen konstruieren, die in einem Winkelraum regulär sind, aber keine Nullstellen und kein reguläres asymptotisches Verhalten besitzen.

Damit bleibt die Frage, ob vielleicht das Argument sich zur Bildung eines Kriteriums für reguläres asymptotisches Verhalten heranziehen läßt. In der Tat zeigt es sich, daß Satz 14 umkehrbar ist, d. h. es gilt

Satz 16. *Es genüge die Funktion $f(z)$, die im Winkelraum $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ regulär und von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ ist, der Voraussetzung*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\alpha}^{\beta} d\,\{\arg f(re^{i\theta})\} = \varrho \int_{\alpha}^{\beta} h(\theta)\,d\theta \,. \tag{3.26}$$

Dann ist $f(z)$ im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ von regulärem asymptotischen Verhalten.

Da bei ganzen Funktionen die beiden Bedingungen

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{0}^{2\pi} d\,\{\arg f(re^{i\theta})\} = \varrho \int_{0}^{2\pi} h(\theta)\,d\theta$$

und

$$2\pi \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{V(r)} = \varrho \int_{0}^{2\pi} h(\theta)\,d\theta$$

äquivalent sind, so folgt aus Satz 16 und Satz 14.

Corollar: *Eine ganze Funktion von positiver endlicher Ordnung ist dann und nur dann von regulärem asymptotischen Verhalten, wenn*

$$2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n(r)}{V(r)} = \varrho \int_{0}^{2\pi} h(\theta)\,d\theta \,. \;^{48)} \tag{3.27}$$

Zum Beweis von Satz 16 benötigen wir drei Hilfssätze, die wir dem eigentlichen Beweis voranschicken wollen.

---

[48]) Vgl. den Satz über Borel'sche Richtungen ganzer Funktionen, die (3.27) genügen, bei *M. L. Cartwright* [2], Theorem X, p. 440.

39. Hilfssatz 6. *Es sei die Funktion $f(z)$ in $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ regulär, $n(r, \alpha, \beta)$ die Anzahlfunktion ihrer Nullstellen. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta d\{\arg f(re^{i\theta})\} = r\frac{d}{dr}\int_\alpha^\beta \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \eta\cdot dn(r,\alpha,\beta)\,^{49)}, \quad |\eta| \leqq \pi, \tag{3.28}$$

und

$$\int_\alpha^\beta d\log|f(re^{i\theta})| = r\frac{d}{dr}\int_\alpha^\beta \arg f(re^{i\theta})\,d\theta\,. \tag{3.29}$$

Beweis: C bezeichne einen Weg, der im wesentlichen mit dem Bogen $|z| = r, \alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ übereinstimmt, eventuelle Nullstellen aber irgendwie, im positiven oder negativen Sinne, durch kleine Halbkreise umgeht. Längs dieses Weges gilt

$$\int_C d\{\log f(z)\} = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,.$$

Zerlegen wir nun das Integral auf der rechten Seite in ein Integral über die kleinen Halbkreise K und in ein solches über die Teilbogen B auf $re^{i\theta}, \alpha \leqq \theta \leqq \beta$, so folgt

$$\int_C d\{\log f(z)\} = \int_B \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\cdot rie^{i\theta}\,d\theta + \int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \tag{3.30}$$

und

$$\int_B \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\cdot ire^{i\theta}\,d\theta = ir\int_B \frac{f'(re^{i\theta})\,e^{i\theta}}{f(re^{i\theta})}\cdot d\theta = ir\int_B \frac{d}{dr}\log f(re^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= ir\frac{d}{dr}\int_B \log f(re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

Lassen wir nun die Radien der Halbkreise gegen Null streben, so strebt das Integral über einen einzelnen Halbkreis gegen $\pm\pi i$, je nach dem die betreffende Nullstelle im positiven oder negativen Sinne umlaufen wird. Der Grenzwert des zweiten Integrals auf der rechten Seite von (3.30) ist also absolut kleiner als $\pi\cdot dn(r,\alpha,\beta)$. Weiter gilt

$$\int_B \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \to ir\frac{d}{dr}\int_\alpha^\beta \log f(re^{i\theta})\,d\theta\,,\quad \int_C d\{\log f(z)\} \to \int_\alpha^\beta d\{\log f(re^{i\theta})\}\,.$$

Nach (3.30) folgt

$$\int_\alpha^\beta d\{\log f(re^{i\theta})\} = ir\frac{d}{dr}\int_\alpha^\beta \log f(re^{i\theta})\,d\theta + i\eta\cdot dn(r,\alpha,\beta)\,,\quad |\eta| \leqq \pi\,,$$

---

[49]) $dn(r,\alpha,\beta)$ ist gleich der Anzahl der Nullstellen auf dem Bogen $|z| = r, \alpha \lesseqgtr \arg z \lesseqgtr \beta$.

und daraus durch Gleichsetzen der Imaginär- und Realteile[50]) die Gleichungen (3.28) und (3.29).

40. Hilfssatz 7. *Ist $\varphi(r)$ in jedem Intervall $(1, r)$, $r > 1$, im Riemann'schen Sinne integrierbar und*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{V(r)} = l\,, \tag{3.31}$$

so gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_1^r \varphi(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{l}{\varrho}\,. \tag{3.32}$$

Beweis: Wir setzen

$$\Phi(r) = \int_1^r \varphi(t)\,\frac{dt}{t}\,.$$

Aus

$$\frac{\Phi(r)}{V(r)} = k^\varrho \cdot \frac{\Phi(kr)}{k^\varrho(V(r)} + \frac{\Phi(r) - \Phi(kr)}{V(r)} \quad (0 < k < 1)$$

folgt

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{V(r)} \leqslant k^\varrho \limsup_{r\to\infty} \frac{\Phi(kr)}{V(kr)} + \limsup_{r\to\infty} \frac{\Phi(r) - \Phi(kr)}{V(r)};$$

daraus

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{V(r)} \leqslant \frac{1}{1-k^\varrho} \limsup_{r\to\infty} \frac{\Phi(r) - \Phi(kr)}{V(r)}$$

und ganz entsprechend

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{V(r)} \geqslant \frac{1}{1-k^\varrho} \liminf_{r\to\infty} \frac{\Phi(r) - \Phi(kr)}{V(r)}\,.$$

Nun ist

$$(l - o(1))\,(1-k)\,k^\varrho \leqslant \frac{\Phi(r) - \Phi(kr)}{V(r)} \leqslant (l + o(1))\,\frac{1-k}{k}$$

und somit

$$(l - o(1))\,\frac{(1-k)\,k^\varrho}{1-k^\varrho} \leqslant \frac{\Phi(r)}{V(r)} \leqslant (l + o(1))\,\frac{1-k}{k(1-k^\varrho)}\,.$$

Lassen wir k gegen 1 streben, und beachten wir, daß dabei $\dfrac{1-k}{1-k^\varrho}$ gegen $\dfrac{1}{\varrho}$ strebt, so folgt (3.32).

---

[50]) η ist eine reelle Zahl.

41. Hilfssatz 8. *Die Funktion $f(z)$, welche im Winkelraum $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ regulär und von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ sei, genüge der folgenden Voraussetzung:*

Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\xi > 0$ gilt bei genügend großem r

$$\log |f(re^{i\theta})| - h(\theta)\, V(r) > -\varepsilon\, V(r) \tag{3.33}$$

im ganzen Intervall $\alpha < \theta < \beta$, ausgenommen höchstens eine Menge vom Maß $< \xi$.

Dann ist die Funktion $f(z)$ im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ von regulärem asymptotischen Verhalten.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß bei $\alpha < 0 < \beta$

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |f(r)| = h(0)$$

ist. Der Beweis dieser Tatsache ist aber schon in Nr. 8, Abschnitt 1, erbracht, sofern nur zufolge der verschiedenen Voraussetzungen (3.33) und (1.21) folgendes berücksichtigt wird: Um (1.24) für ein φ_0 im Intervall $(0, \beta/4)$ bei genügend großem r sicherzustellen, ist in (3.33) ε durch $\dfrac{\varepsilon}{4H}(1 - \sin\beta)^{\varrho}$ zu ersetzen und $\xi < \beta/4$ zu wählen.

42. *Beweis von Satz 16.*

Setzen wir $\varphi(r) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\{\arg f(re^{i\theta})\}$, so heißt (3.26)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{V(r)} = \varrho \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\theta)\, d\theta\,. \tag{3.34}$$

Gemäß (3.28) gilt dann

$$\int\limits_{1}^{r} \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \log |f(e^{i\theta})|\, d\theta\,. \tag{3.35}$$

Denn es ist

$$\int\limits_{1}^{r} \frac{\eta \cdot dn(t, \alpha, \beta)}{t}\, dt = 0\,.$$

Aus Hilfssatz 7 mit (3.34) an Stelle von (3.31) folgt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int\limits_{1}^{r} \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\theta)\, d\theta\,.$$

Aus (3.35) ergibt sich daher nach Division durch $V(r)$ und Übergang zur Grenze $r \to \infty$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_\alpha^\beta \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta = \int_\alpha^\beta h(\theta) d\theta \ . \tag{3.36}$$

Aus der letztern Bedingung folgt aber, daß die Voraussetzung von Hilfssatz 8 erfüllt ist. Denn sonst gäbe es zwei Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\xi > 0$, so daß für eine Folge $\{r_n\}$ mit $r_n \to \infty$

$$\log |f(re^{i\theta})| < h(\theta) \cdot V(r) - \varepsilon V(r) \tag{3.37}$$

auf einer Menge vom Maß $\geqslant \xi$ im Intervall $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$.

Da ferner im ganzen Intervall (α, β) für genügend große r

$$\log |f(re^{i\theta})| \leqslant h(\theta) \cdot V(r) + \frac{\varepsilon \xi}{2(\beta - \alpha)} \cdot V(r) \tag{3.38}$$

ist, so folgt aus (3.37) und (3.38) für die obige Folge

$$\int_\alpha^\beta \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta < V(r) \int_\alpha^\beta h(\theta) \, d\theta - \frac{\varepsilon \xi}{2} \cdot V(r) \ ,$$

was (3.36) widerspricht. Die Voraussetzung von Hilfssatz 8 ist also erfüllt und somit die Funktion $f(z)$ im Intervall (α, β) von regulärem asymptotischen Verhalten.

43. Es verbleibt noch, die erhaltenen Resultate über die Nullstellenverteilung zu übertragen auf die Verteilung der a-Stellen, also allgemein die Wertverteilung zu untersuchen. Wir betrachten hierzu einen Winkelraum $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, in dem $f(z)$ nicht nur die üblichen Eigenschaften der Regularität und des regulären asymptotischen Verhaltens, sondern überdies einen positiven Strahltypus, $h(\varphi) > 0$, $\alpha < \varphi < \beta$, besitzt. Daher kann die Subtraktion einer Konstanten a von $f(z)$ am Strahltypus und an der Regularität des asymptotischen Verhaltens nichts ändern. Es gilt also

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |f(re^{i\varphi}) - a| = h(\varphi) \ .$$

Daraus folgt:

1. *In Intervallen mit positivem Strahltypus ist für alle Werte a die Verteilung der a-Stellen meßbar bezüglich der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ von $f(z)$.*

2. *Für ihre Maßfunktion $N_a(\varphi)$ gilt dort*

$$2\pi \cdot dN_a(\varphi) = \varrho h(\varphi) \, d\varphi + \frac{1}{\varrho} \, dh'(\varphi) \ .$$

Es sind also dort alle Werte gleich „dicht“ verteilt. Ist speziell für eine ganze Funktion von regulärem asymptotischen Verhalten der Strahltypus stets positiv (oder nur an isolierten Stellen des Intervalles $(0, 2\pi)$ gleich null), so gilt $dN_a(\varphi) = dN_0(\varphi)$ und $2\pi(N_a(2\pi) - N_a(0)) = \varrho \int\limits_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta$ für alle φ und alle a.

Nach diesen Ergebnissen ist jede Richtung φ_0 eine **Borel'sche Richtung** für die Funktion $f(z)$, in deren Umgebung $h(\varphi)$ positiv und nicht von der Form $A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$ ist.

Obige Betrachtungen lassen sich nicht ohne weiteres auf solche Intervalle übertragen, in denen der Strahltypus null bzw. negativ ist, da dort durch Subtraktion einer Konstanten die Regularität des asymptotischen Verhaltens bzw. der Strahltypus gestört werden kann.

44. Besonders übersichtlich verhält sich die Wertverteilung solcher ganzer Funktionen, die einen Ausnahmewert im Sinne von Nr. 37 besitzen, d. h. einen Wert c, für den $dN_c(\varphi) \equiv 0$ und $h_c(\varphi) \not\equiv 0$*) ist. Gemäß Nr. 37 ist dann $f(z)$ eine ganze Funktion von ganzzahliger Ordnung mit $h_c(\varphi) = A \cos \varrho(\varphi - \alpha)$. Sei der Einfachheit wegen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $h_c(\varphi) = A \sin \varrho\varphi$. Dann ist auch für jedes $a \neq c$ $f(z) - a$ von regulärem asymptotischen Verhalten, aber von anderem Strahltypus.

Es gilt

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |f(re^{i\varphi}) - a| = h_a(\varphi) = \begin{cases} A \sin \varrho\varphi, \text{ wenn} \\ \nu\frac{\pi}{\varrho} \leqq \varphi \leqq \nu\frac{\pi}{\varrho} + \frac{\pi}{\varrho}, \ \nu = \\ \quad = 0, 2, 4, \ldots 2\varrho - 2, \\ 0 \text{ in den übrigen Teilen des Intervalles} \\ \quad (0, 2\pi). \end{cases}$$

Es sind also $\varphi = \nu \cdot \frac{\pi}{\varrho}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2\varrho - 1$ die **Borel'schen Richtungen** der Funktion $f(z)$ und es gilt in diesen Richtungen $2\pi \cdot dN_a(\varphi) = A$, $a \neq c$. [51])

Ist c sogar ein **Borel'scher Ausnahmewert,** so können wir uns von der Voraussetzung, daß die Funktion sich asymptotisch regulär verhalte, befreien. Denn dann ist die Funktion vom Mitteltypus einer ganzzahligen Ordnung, die Anzahlfunktion ihrer c-Stellen aber vom Minimaltypus dieser Ordnung, also

*) $h_c(\varphi)$ bedeutet den Strahltypus der Funktion $f(z) - a_c$.

[51]) Vgl. ähnliches bei *M. L. Cartwright* [1], S. 173—175, [3], S. 532.

$$f(z) - c = e^{Az^n} \cdot \varphi(z)$$

und

$$\lim_{r \to \infty}{}^* \frac{1}{r^n} \log | \varphi(re^{i\varphi}) | \equiv 0 \ .$$

$f(z)$ verhält sich somit regulär bezüglich des Betrages und es folgt:

Satz 18. *Besitzt eine ganze Funktion von positiver endlicher Ordnung einen* **Borel'schen Ausnahmewert,** *so ist sie vom Mitteltypus einer ganzzahligen Ordnung n. Ihre* **Borel'schen Richtungen** *schließen unter sich gleiche Winkel ein. Ist φ eine solche Richtung, so gilt*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \varphi - \delta, \varphi + \delta)}{r^n} = \frac{A}{2\pi}, \quad 0 < \delta < \frac{2\pi}{n},$$

wenn A den Typus der ganzen Funktion bedeutet.

Nach diesem Satz scheint die ganze Funktion das Vorhandensein eines Ausnahmewertes durch eine besonders regelmäßige Verteilung der übrigen Werte ausgleichen zu wollen.

(Eingegangen den 14. April 1939.)

LITERATUR-VERZEICHNIS

Bernstein, V.: [1] Sulla crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito. R. Acad. d'Italia 4 (1933).

— [2] Leçons sur les progrès de la Théorie des Séries de Dirichlet. Paris: Gauthier-Villars, 1933.

— [3] Sulle direzioni di Borel di funzione olomorfe. Annali di Mat. 12 (1934).

— [4] Sulle proprietà caratteristicche delle indicatrici di crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito. R. Acc. d'Italia 7 (1936).

Besicovitsch: [1] On integral functions of order < 1. Math. Ann. 97 (1927), 677—695.

Brunn, H.: [1] Über Kurven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift, München 1889.

Cartwright, M. L.: [1] The zeros of certain integral functions. Quart. J. of Math. (Oxfort Series) 1 (1930).

— [2] On functions which are regular and of finite order in an angle. Proc. London Math. Soc. 38 (1935), 158—179.

— [3] On the directions of Borel of analytic functions. Proc. London Math. Soc. 38 (1935), 417—457.

— [4] On the directions of Borel of functions which are regular and of finite order in an angle. Proc. London Math. Soc. 38 (1935), 503—541.

Doetsch, G.: [1] Konvexe Kurven und Fußpunktkurven. Math. Zeitschrift 41 (1936).

— [2] Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin: Julius Springer, 1937.

Faber, G.: [1] Bemerkungen zu einem funktionentheoretischen Satz des Herrn Hadamard. Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung 16 (1907).

Heine, R.: [1] Zur Theorie der konvexen Körper: Die Monotonie des Ausdruckes $\int h(\theta)\, d\theta + h'(\theta)$. Math. Annalen 115 (1938), S. 130—131.

Lindelöf, E.: [1] Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. Sci. Fenn. 31 (1902).

Nevanlinna, R.: [1] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin: Julius Springer, 1936.

Pennycuick, K.: [1] Extension of a Theorem of Faber-Pólya. J. London Math. Soc. 12 (1937).

Phragmen, E. et *Lindelöf, E.:* [1] Sur l'extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta math. 31 (1908).

Pfluger, A.: [1] Sur la croissance et la distributions des zéros de certaines fonctions entières d'ordre positif fini. C. R. Acad. Sci., Paris, 205 (1937), S. 889—890.

— [2] Sur la variation de l'argument et la distribution des zéros d'une certaine classe de fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris, 206 (1938), S. 1786—1787.

Pólya, G.: [1] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Zeitschrift 29 (1929).

— [2] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Part. II. Annals of Math. 34 (1933).

— [3] Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen. Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 285—290.

— [4] Analytische Fortsetzung und konvexe Kurven. Math. Ann. 89 (1923).

Schwengeler, E.: [1] Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen. Dissertation, Zürich 1925.

Valiron, G.: [1] Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini, et en particulier les fonctions à correspondance régulière. Ann. Fac. Sci. Toulouse 5 (1913).

— [2] Lectures on the general Theory of integral functions. Toulouse: Edouard Privat, 1923.