

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Konforme Abbildung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel.
Autor: Pfluger, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13565>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Konforme Abbildung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel

Von A. PFLUGER, Freiburg

1. Ein einfach zusammenhängender Bereich D werde berandet von endlich vielen Jordanbogen J_1, J_2, \dots, J_n . Die konforme Abbildung des Bereiches D auf den Einheitskreis ist also am Rande noch stetig und es werden die Jordanbogen J_1, J_2, \dots, J_n umkehrbar eindeutig und stetig auf Kreisbogen K_1, K_2, \dots, K_n abgebildet, die ihrerseits die Kreisperipherie einfach überdecken. Wir schreiben

$$J_\nu \longleftrightarrow K_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Sei $w = f(z)$ die analytische Funktion, welche die konforme Abbildung des Bereiches D der z -Ebene auf den Einheitskreis $|w| < 1$ der w -Ebene vermittelt. Ihrer (einzigen) Nullstelle a_0 in D entspricht der Mittelpunkt des Bildkreises. Durch Angabe dieser Nullstelle ist demnach die Abbildung — bis auf eine Drehung der w -Ebene — eindeutig festgelegt; also auch die gegenseitige Lage der Kreisbogen K_1, K_2, \dots, K_n . Läßt sich über den Zusammenhang zwischen Nullstelle der Abbildungsfunktion und der gegenseitigen Lage der Bildbogen K_1, K_2, \dots, K_n etwas Bestimmtes aussagen?

Den gemeinsamen Punkt zweier aufeinanderfolgender Jordanbogen nennen wir „Ecken“. E_ν bezeichne die Ecke, in der die Bogen J_ν und $J_{\nu+1}$ zusammenstoßen, $\nu = 1, 2, \dots, n$; $J_{n+1} = J_1$. Entsprechend stoßen dann die Kreisbogen K_ν und $K_{\nu+1}$ im Bildpunkt von E_ν , d. i. G_ν zusammen ($\nu = 1, 2, \dots, n$; $K_{n+1} = K_1$). In der Ecke E_1 greifen wir einen eindeutigen Zweig der Funktion $\arg w = \arg f(z)$ heraus und setzen ihn längs J_1, J_2, \dots, J_n stetig fort. Jeder Ecke E_ν entspricht dann eindeutig die Richtung ω_ν zum Bildpunkt G_ν und K_ν ist der Kreisbogen zwischen den Richtungen ω_ν und $\omega_{\nu+1}$. Wir betrachten folgende mittlere Richtung des Kreisbogens K_ν ,

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{\int_{J_\nu} \arg f(z) \cdot \left| \frac{dz}{z} \right|}{\int_{J_\nu} \left| \frac{dz}{z} \right|}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

und präzisieren obige Frage folgendermaßen: *Was läßt sich aussagen über den Zusammenhang zwischen der Lage der Nullstelle der Abbildungsfunktion und den mittlern Richtungen $\bar{\omega}_\nu$ der Kreisbogen K_ν ?*

Diese Fragestellung kann verallgemeinert werden: Es sei die Funktion $f(z)$ im Innern des Bereiches D regulär, auf dem Rande stetig und von null verschieden. Wir fassen speziell die Bilder B_ν der Jordanbogen J_ν ins Auge und betrachten neben einer mittlern Richtung $\bar{\omega}_\nu$ gemäß (1) auch eine mittlere logarithmische Entfernung

$$\bar{R}_\nu = \frac{\int_{J_\nu} \log \left| f(z) \right| \cdot \left| \frac{dz}{z} \right|}{\int_{J_\nu} \left| \frac{dz}{z} \right|}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Gesucht wird eine Beziehung zwischen den mittlern Richtungen und Entfernungen der Bildbogen B_ν und der Nullstellenverteilung von $f(z)$ in D .¹⁾

Wir lösen die Aufgabe für den Kreissektorstumpf. D bezeichne also im folgenden den Bereich $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$. Er wird begrenzt von den Jordanbogen $J_1(z = \rho e^{i\varphi_2}, r_2 \geq \rho \geq r_1)$, $J_2(z = r_1 e^{i\theta}, \varphi_2 \geq \theta \geq \varphi_1)$, $J_3(z = \rho e^{i\varphi_1}, r_1 \leq \rho \leq r_2)$, $J_4(z = r_2 e^{i\theta}, \varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2)$ und besitzt die Ecken $E_1(z = r_2 e^{i\varphi_2})$, $E_2(z = r_1 e^{i\varphi_2})$, $E_3(z = r_1 e^{i\varphi_1})$, $E_4(z = r_2 e^{i\varphi_1})$. Der Reihenfolge E_1, \dots, E_4 entspricht der positive Umlaufssinn des Bereiches. Für die mittleren Richtungen und Entfernungen gilt jetzt

$$\bar{\omega}_{1,3} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} = \int_{r_1}^{r_2} \arg f(\rho e^{i\varphi_{2,1}}) \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \quad (1')$$

$$\bar{\omega}_{2,4} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(r_{1,2} e^{i\theta}) \cdot d\theta, \quad (1'')$$

$$\bar{R}_{1,3} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} = \int_{r_1}^{r_2} \log |f(\rho e^{i\varphi_{2,1}})| \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2')$$

$$\bar{R}_{2,4} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(r_{1,2} e^{i\theta})| \cdot d\theta. \quad (2'')$$

2. Es sei also die Funktion $f(z)$ im Innern von D regulär, und auf dem Rande noch stetig und von null verschieden. In der Ecke $E_1(z = r_2 e^{i\varphi_2})$ greifen wir einen eindeutigen Zweig der Funktion $\log f(z)$ bzw. $\arg f(z)$ heraus und setzen ihn längs J_1, \dots, J_4 stetig fort. Dies soll die Bedeutung

¹⁾ Allgemein gefaßt, handelt es sich um den Zusammenhang zwischen dem Verhalten einer Funktion auf dem Rande und der Lage ihrer Nullstellen im Innern eines Bereiches. Im Fall des Kreises macht die *Jensen'sche* Formel hierüber eine bestimmte Aussage:

$$2\pi \log \left| \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{r^n} \right| - \log |f(0)| = \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

von $\log f(z)$ bzw. $\arg f(z)$ auf dem Rande von D sein. Es ist klar, daß Anfangs- und Schlußwert dieser Funktion in E_1 verschieden sind, wenn der Bereich Nullstellen enthält. Er enthält aber nur endlich viele Nullstellen und deshalb sind die Bogen $z = \rho e^{i\theta}$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2$ — bis auf endlich viele — von Nullstellen frei. Wir greifen ein solches ρ ($r_1 \leq \rho \leq r_2$) heraus und betrachten den folgenden Teilbereich $D' : r_1 \leq |z| \leq \rho$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$. Er wird begrenzt von den Jordanbogen J_2 , $J'_4(z = \rho e^{i\theta}$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2$), $J'_{1,3}(z = t e^{i\varphi_{2,1}}$, $r_1 \leq t \leq \rho$). Bezeichnet $n(\rho)$ die Anzahl der Nullstellen im Bereich D' , so gilt nach dem Argumentprinzip

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \oint_{J'_1+J_2+J'_3+J'_4} d \log f(z) = \int_{J'_1+J_2+J'_3} d \log f(z) + \int_{J'_4} d \log f(z) ,$$

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \log f(\rho e^{i\varphi_1}) - \log f(\rho e^{i\varphi_2}) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \log f(\rho e^{i\theta}) . \quad (3)$$

Nun ist

$$d \log f(\rho e^{i\theta}) = i \rho \cdot \frac{f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta}}{f(\rho e^{i\theta})} \cdot d\theta = i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

und daher

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \log f(\rho e^{i\theta}) = i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta . \quad 2)$$

Daraus folgt in Verbindung mit (3)

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \log f(\rho e^{i\varphi_1}) - \log f(\rho e^{i\varphi_2}) + i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

und weiter, durch Gleichsetzen der Real- und Imaginärteile

$$\log |f(\rho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\rho e^{i\varphi_2})| = \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) d\theta , \quad (4)$$

$$2\pi \cdot n(\rho) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) + \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) = \rho \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta . \quad 3) \quad (5)$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung (5). Das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(\rho e^{i\theta})| \cdot d\theta$ hat für alle ρ ($r_1 \leq \rho \leq r_2$) einen Sinn, es ist eine stetige Funktion von ρ und für alle ρ , denen keine Nullstellen entsprechen, stetig differenzier-

2) Integrieren und Differenzieren nach dem Parameter ρ sind hier vertauschbar, da $\log f(z)$ in der Umgebung jedes innern Punktes des Bogens J'_4 regulär ist.

3) Vgl. auch *A. Pfluger, Comm. Math. Helv.* 12, S. 59.

bar. Enthält der Bogen J'_4 dagegen Nullstellen, so erleidet die Ableitung dort, wie sich unmittelbar aus (5) ergibt, einen Sprung um den Betrag $2\pi \frac{n(\rho + 0) - n(\rho - 0)}{\rho}$. Wir dividieren (5) durch ρ und integrieren von r_1 bis r_2 . Es folgt

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} n(\rho) \frac{d\rho}{\rho} + \int_{r_1}^{r_2} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(r_2 e^{i\theta})| - \log |f(r_1 e^{i\theta})| \} d\theta \quad (6)$$

oder mit Benützung von (1') bis (2'')

$$2\pi \cdot \int_{r_1}^{r_2} n(\rho) \frac{d\rho}{\rho} + \log \frac{r_2}{r_1} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_3) = (\varphi_2 - \varphi_1) (\bar{R}_4 - \bar{R}_2) . \quad (6')$$

Die entsprechende Umformung der Gleichung (4) bietet Schwierigkeiten. Zunächst ist das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) \cdot d\theta$ nur definiert für solche ρ , denen keine Nullstellen entsprechen. Dort ist es auch stetig nach ρ differenzierbar. An jenen Stellen ρ , denen Nullstellen entsprechen, ist aber das Integral selbst unstetig. Für solche kritische ρ läßt sich $\arg f(z)$ — ausgehend vom wohlbestimmten $\arg f(\rho e^{i\varphi_1})$ — längs J'_4 nicht stetig fortsetzen. Umgehen wir jedoch die Nullstellen auf J'_4 im *positiven* Sinne durch kleine Halbkreise und setzen wir längs des abgeänderten Weges stetig fort, so entsteht eine Funktion $\arg^+ f(\rho e^{i\theta})$, die überall auf J'_4 stetig ist, bis auf die Nullstellen. Dort erleidet sie aber einen Sprung um $+\pi p$, wenn p die Vielfachheit der betreffenden Nullstelle bedeutet. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f((\rho + \varepsilon) e^{i\theta}) d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg^+ f(\rho e^{i\theta}) \cdot d\theta , \quad \varepsilon > 0 .$$

Umgehen wir aber die Nullstellen im *negativen* Sinne durch kleine Halbkreise, so entsteht analog eine Funktion $\arg^- f(\rho e^{i\theta})$, die in den Nullstellen einen Sprung von der Höhe $-\pi p$ erleidet. Entsprechend gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f((\rho - \varepsilon) e^{i\theta}) \cdot d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg^- f(\rho e^{i\theta}) \cdot d\theta , \quad \varepsilon > 0 .$$

Die Differenz $\arg^+ f(\rho e^{i\theta}) - \arg^- f(\rho e^{i\theta})$ dagegen ist stückweise konstant.

Sie ist unstetig in den Nullstellen und besitzt dort Sprünge von der Höhe $2\pi p$. Bezeichnen wir die Nullstellen in D mit a_μ , jede ihrer Vielfachheit nach hingeschrieben, so folgt

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) d\theta - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi \sum_{|a_\mu|=\varrho} (\varphi_2 - \arg a_\mu) . \quad (4)$$

Es ist also die Summe auf der rechten Seite der Sprung, den unser Integral bei einem kritischen ϱ erleidet.

Wir dividieren (4) durch ϱ , integrieren von r_1 bis r_2 , indem wir die Unstetigkeiten von $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) \cdot d\theta$ berücksichtigen, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \{ \log |f(\varrho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\varrho e^{i\varphi_2})| \} \frac{d\varrho}{\varrho} + 2\pi \sum_{(\mu)} (\varphi_2 - \arg a_\mu) = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

oder mit Benützung von (1') bis (2'')

$$2\pi \sum_{(\mu)} (\varphi_2 - \arg a_\mu) + \log \frac{r_2}{r_1} (\bar{R}_3 - \bar{R}_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) (\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2) . \quad (7')$$

3. Die Ergebnisse der vorigen Nummer lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 1. *Sei die Funktion $f(z)$ im Bereiche $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär, auf dem Rande noch stetig und von null verschieden. Längs dieses Randes, nachdem er bei $z = r_2 e^{i\varphi_2}$ aufgeschnitten wurde, sei ein eindeutiger und stetiger Zweig von $\arg f(z)$ festgelegt. $n(\theta)$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen im Bereich $r_1 < |z| < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \theta_2$ und $n(\varrho)$ ihre Anzahl in $r_1 < |z| \leq \varrho$, $\varrho \leq r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{r_1}^{r_2} n(\varrho) \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} + \int_{r_1}^{r_2} \{ \arg f(\varrho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\varrho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\varrho}{\varrho} = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(r_2 e^{i\theta})| - \log |f(r_1 e^{i\theta})| \} d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

und

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} n(\theta) d\theta + \int_{r_1}^{r_2} \{ \log |f(\varrho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\varrho e^{i\varphi_2})| \} \frac{d\varrho}{\varrho} = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta . \end{aligned} \quad (7)$$

⁴⁾ Es ist $\varphi_1 < \arg a_\mu < \varphi_2$.

Wir können uns von der Beschränkung befreien, daß die Funktion auf dem Rande von null verschieden sein müsse. Dagegen müssen wir noch fordern, daß der Bereich im Innern nur endlich viele Nullstellen enthalte. Dann läßt sich nämlich der gegebene Bereich von innen durch Teilbereiche so approximieren, daß ihr Rand keine Nullstellen überstreicht. Für diese Teilbereiche ist die Voraussetzung des Satz 1 erfüllt. Wählen wir die Bestimmung auf dem Rand des gegebenen Bereiches so, daß ein stetiger Anschluß erfolgt, so ergibt sich der Satz durch Grenzübergang auch für den gegebenen Bereich.

Es ist vorteilhaft, folgenden Fall hervorzuheben. Die Funktion sei in und auf dem Rande des Bereiches $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär. Dieser Bereich kann dann durch Bereiche von „rechts unten“, d. i. $r_1 + \varepsilon \leq |z| \leq r_2 + \varepsilon$, $\varphi_1 - \varepsilon \leq \arg z \leq \varphi_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (ε genügend klein), approximiert werden, ohne daß ihr Rand Nullstellen überstreicht. Wie unten genauer angegeben wird, sei $\arg f(z)$ auf dem Rande von D und analog D' so definiert, daß der stetige Anschluß gewährleistet ist. Es gilt dann im Anschluß an das Vorgehende

Satz 2. *Sei die Funktion $f(z)$ in und auf dem Rande des Bereiches $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär. Entlang des Randes, der bei $z = r_2 e^{i\varphi_2}$ aufgeschnitten sei, werde ein bestimmter Zweig von $\arg f(z)$ stetig fortgesetzt, indem eventuelle Nullstellen auf dem Rand durch kleine Halbkreise umgangen werden, und zwar von $r_2 e^{i\varphi_2}$ über $r_1 e^{i\varphi_2}$ bis $r_1 e^{i\varphi_1}$ im negativen Sinn, von $r_1 e^{i\varphi_1}$ über $r_2 e^{i\varphi_1}$ bis $r_2 e^{i\varphi_2}$ aber im positiven Sinn. $n(\theta)$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen im Bereich $r_1 < |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z < \theta_2$ und $n(\rho)$ ihre Anzahl in $r_1 < |z| \leq \rho$, $\rho \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z < \varphi_2$. Dann gelten die Formeln (6) und (7) des Satzes 1.*

Der Satz gilt entsprechend auch für meromorphe Funktionen, wenn $n(\rho)$ durch die Differenz $n_0(\rho) - n_\infty(\rho)$ der Anzahlfunktionen der Pol- und Nullstellen ersetzt wird und $n(\theta)$ entsprechend durch $n_0(\theta) - n_\infty(\theta)$.

4. Die beiden vorangehenden Sätze stellen eine Verallgemeinerung und Erweiterung der Jensen'schen Formel dar. Mit $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $r_1 = 0$, $r_2 = r$ geht der Kreissektorstumpf über in den Kreis $|z| \leq r$. Gemäß den Festsetzungen in Satz 2 ergibt sich dann unmittelbar aus (6)

$$\int_0^r n(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \quad (8)$$

und gewissermaßen dual dazu, aus (7)

$$\int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg f(re^{i\theta}) d\theta - \arg f(0) , \quad (9)$$

sofern $z = 0$ keine Nullstelle ist.

Formel (9) stellt einen Zusammenhang dar zwischen den Mittelwerten des Argumentes auf der Peripherie und dem Mittelpunkt des Kreises einerseits, den Argumenten der Nullstellen in diesem Kreise andererseits. Sie könnte als die *Jensen'sche* Formel des Argumentes betrachtet werden, (8) dagegen als die *Jensen'sche* Formel des Betrages. Während aber die Formel (8) vollkommen eindeutig ist, spielt in (9) die Unbestimmtheit des Argumentes eine unangenehme Rolle. Um den Zusammenhang zwischen dem Argument im Nullpunkt und auf der Peripherie zu verstehen, ist immer die ganze Figur, wie sie allgemein im Kreissektorstumpf vorliegt, im Auge zu behalten; also auch die beiden zusammenfallenden, aber entgegengesetzt orientierten Radien, J_1 und J_3 , die den Mittelpunkt J_2 mit der Peripherie J_4 verbinden. In Übereinstimmung mit (9) wählen wir für J_1 bzw. J_3 das Stück der positiven reellen Achse. Es kann jedoch irgend ein anderer Radius für J_1 bzw. J_3 gewählt werden, sofern dann $\arg f(re^{i\theta})$ und $n(\theta)$ sinngemäß modifiziert werden. Die Bedeutung der Formel (9) ist aus folgendem Satz ersichtlich:

Satz 3. *$f(z)$ sei in $|z| \leq r$ regulär, $f(0) \neq 0$ und $n(\theta)$ die Anzahl ihrer Nullstellen in $|z| \leq r$, $0 \leq \arg z < \theta$. Es sei ferner ein Zweig von $\arg f(z)$ in $z = 0$ festgelegt und stetig fortgesetzt entlang der positiven reellen Achse bis $z = r$ und von dort im positiven Sinne längs der Kreisperipherie, indem eventuelle Nullstellen im positiven Sinne durch kleine Halbkreise umgangen werden. Schließlich sei*

$$m \leq \arg f(re^{i\theta}) - \arg f(0) \leq M, \quad 0 \leq \theta < 2\pi . \quad (10)$$

Dann gilt

$$m \leq \int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta \leq M . \quad (11)$$

Die Schranken des Argumentes auf dem Rande des Bereiches liefern also keine Schranke für die Zahl der Nullstellen im ganzen Bereich, wohl aber für ihre Anzahl in gewissen Sektoren. Denn in (11) hat eine Nullstelle um so größeres Gewicht, je kleiner ihr Argument ist. So folgt aus (11) z. B.: Die Zahl der Nullstellen in $0 \leq \arg z < \pi$ ist kleiner als $\frac{M}{\pi}$. Liegen sämtliche Nullstellen auf der negativen reellen Achse, so ist ihre Anzahl zwischen $\frac{m}{\pi}$ und $\frac{M}{\pi}$.

5. Die Lösung der eingangs gestellten Frage über konforme Abbildung eines Kreissektorstumpfes ergibt sich sofort aus Satz 1. Denn die Abbildungsfunktion $f(z)$ hat auf dem Rande den Betrag 1 und im Innern nur eine einzige Nullstelle a_0 . (6) und (7) reduzieren sich also auf

$$\int_{r_1}^{r_2} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) \} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \log \frac{r_2}{|a_0|} \quad (12)$$

und

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta = 2\pi (\varphi_2 - \arg a_0) . \quad (13)$$

Daraus folgt

Satz 4. *Zwischen der Lage der Nullstelle a_0 der Abbildungsfunktion und den mittlern Richtungen der Kreisbogen besteht folgender Zusammenhang*

$$\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1 = 2\pi \cdot \frac{\log r_2 - \log |a_0|}{\log r_2 - \log r_1} , \quad (12')$$

$$\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 = 2\pi \cdot \frac{\varphi_2 - \arg a_0}{\varphi_2 - \varphi_1} . \quad (13')$$

Satz 4 legt also den „Richtungsunterschied gegenüberliegender Bogen“ fest. Wählen wir die Nullstelle im „Mittelpunkt“, gilt also

$$|a_0| = \sqrt{r_1 \cdot r_2} , \quad \arg a_0 = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1)$$

so folgt $\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 = \pi$, d. h. die Richtungen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_3$ bzw. $\bar{\omega}_4$ und $\bar{\omega}_2$ sind entgegengesetzt. Aus Symmetriegründen folgt dann weiter, daß die Richtungen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$ aufeinanderfolgend rechte Winkel einschließen.

6. Es scheint, daß die Formeln (6) und (7) zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen nützlich sein könnten. In dieser Hinsicht erwähnen wir folgendes:

Satz 5 *Sei die Funktion $f(z)$ in und auf dem Rande des Winkelraumes $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär und beschränkt. Sei ferner*

$$\int_1^{\infty} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\rho}{\rho} \quad (14)$$

konvergent. Dann besitzt $f(z)$ im Innern des Winkelraumes keine Nullstellen.

⁵⁾ Je näher a_0 einem Jordanbogen J_ν kommt, um so länger ist sein Bildbogen und um so größer der „Richtungsunterschied“ der beiden angrenzenden Kreisbogen. Die Formeln (12') und (13') zeigen, daß alle Richtungsunterschiede von 0 bis 2π möglich sind.

Beweis: Wegen (6) und den Voraussetzungen des Satzes muß

$$2\pi \int_{\varepsilon}^r n(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho} = \int_{\varepsilon}^r \{ \arg f(\varrho e^{i\varphi_1}) - \arg f(\varrho e^{i\varphi_2}) \} \frac{d\varrho}{\varrho} + \\ + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(re^{i\theta})| - \log |f(\varepsilon e^{i\theta})| \} d\theta$$

bei $r \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, wie klein auch $\varepsilon (> 0)$ gewählt werde. Dies kann aber nur sein, wenn $n(\varrho) \equiv 0$ ist.

Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle zugleich mit (14) auch der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(re^{i\theta})| \cdot d\theta$$

existiert.

(Eingegangen den 5. April 1941.)