

# Expressions de la somme $x_1 + x_2$ de deux indéterminées $x_1, x_2$ en fonction de $x_1x_2 + c$ ( $x_1 + x_2$ ).

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **14 (1941-1942)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14308>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Expressions de la somme $x_1 + x_2$ de deux indéterminées $x_1, x_2$ en fonction de $x_1 x_2 + c(x_1 + x_2)$

Par D. MIRIMANOFF, Genève

## Introduction

Dans un article récent publié ici-même<sup>1)</sup> j'ai fait connaître une méthode permettant de former les expressions les plus simples, canoniques et réduites, de la somme  $p$  de deux indéterminées  $x_1, x_2$  en fonction de leur produit  $q$ . J'ai ajouté qu'on pouvait en déduire les expressions de  $p$  et  $q$  en fonction de  $G = q + cp$ , qui interviennent dans certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre. Mais le procédé dont je me suis servi pour former l'expression cherchée dans le cas de  $n = 4$ , a des inconvénients. Il ne permet pas, en particulier, de se faire une idée précise de la structure et des propriétés caractéristiques de l'expression ainsi obtenue. Aussi ai-je cru utile de reprendre l'étude de ce problème. En l'examinant de plus près, je me suis aperçu que le passage des expressions en fonction de  $q$  aux expressions en fonction de  $G$  peut être effectué directement, à l'aide d'une transformation très simple, que, malgré son caractère élémentaire, je crois utile d'indiquer.

§ 1. Envisageons  $n$  nouvelles indéterminées  $x'_i$  liées aux anciennes  $x_i$  par les relations

$$x'_i = x_i + c .$$

Désignons par  $f'_i$  les fonctions symétriques élémentaires correspondantes, par  $p'$  la somme  $x'_1 + x'_2$ , par  $q'$  le produit  $x'_1 x'_2$ . Il est évident que les expressions de  $p'$  en fonction de  $q'$  s'obtiennent de celles de  $p$  en fonction de  $q$  en remplaçant  $q$  par  $q'$  et les  $f_i$  par les  $f'_i$ .

Or,

$$\begin{aligned} p' &= (x_1 + c) + (x_2 + c) = p + 2c \\ q' &= (x_1 + c)(x_2 + c) = G + c^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Quant aux  $f'_i$ , ce sont des fonctions linéaires de  $f_1, f_2, \dots, f_i$ , qui se calculent facilement. On a, en effet,

$$f'_i = \beta_1 f_i + \beta_2 c f_{i-1} + \dots + \beta_i c^{i-1} f_1 + \beta_{i+1} c^i , \tag{2}$$

---

<sup>1)</sup> Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit. C. M. H. t. 14, p. 1.

les coefficients  $\beta_1 = 1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}$  étant les nombres du triangle arithmétique de Pascal rangés le long de la  $i^e$  parallèle à l'hypoténuse, en comptant à partir du sommet de l'angle droit. On a, en particulier,

$$f'_1 = f_1 + nc \quad ; \quad f'_2 = f_2 + (n-1)cf_1 + \frac{n(n-1)}{2}c^2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

Pour avoir l'expression de  $p$  en fonction de  $G$ , il suffit donc de remplacer  $q'$  et les  $f'_i$  par leurs expressions (1) et (2) et de retrancher  $2c$  de la formule ainsi obtenue. La relation  $q = G - cp$  permettra ensuite d'en tirer l'expression de  $q$  en fonction de  $G$ .

§ 2. Cas de  $n = 4$  et de  $n = 5$ .

Lorsque  $n = 4$ , la somme  $p$  est donnée par la formule<sup>2)</sup>

$$p = \frac{f_1 q^2 - f_3 q}{q^2 - f_4} .$$

Par conséquent

$$p' = \frac{f'_1 q'^2 - f'_3 q'}{q'^2 - f'_4} .$$

Or,

$$f'_1 = f_1 + 4c \quad ; \quad f'_2 = f_2 + 3cf_1 + 6c^2 \quad ;$$

$$f'_3 = f_3 + 2cf_2 + 3c^2f_1 + 4c^3 \quad ; \quad f'_4 = f_4 + cf_3 + c^2f_2 + c^3f_1 + c^4 ;$$

par suite

$$\begin{aligned} p &= \frac{(f_1 + 4c)(G + c^2)^2 - (f_3 + 2cf_2 + 3c^2f_1 + 4c^3)(G + c^2)}{(G + c^2)^2 - (f_4 + cf_3 + c^2f_2 + c^3f_1 + c^4)} - 2c \\ &= \frac{f_1 G^2 - f_3 G + 2c(G^2 - f_2 G + f_4) - c^2(f_1 G - f_3)}{G^2 - f_4 - cf_3 + c^2(2G - f_2) - c^3f_1} , \end{aligned}$$

et l'on retrouve la formule (10) de l'article cité.

Pour  $n = 5$ , on a, en vertu des formules (14) et (15) du même article

$$p = \frac{f'_1 q'^5 - f'_3 q'^4 + f'_2 f'_5 q'^2 - f'_4 f'_5 q'}{q'^5 - f'_4 q'^3 + f'_1 f'_5 q'^2 - f'_5} - 2c .$$

Or,

$$f'_1 = f_1 + 5c \quad ; \quad f'_2 = f_2 + 4cf_1 + 10c^2 \quad ; \quad f'_3 = f_3 + 3cf_2 + 6c^2f_1 + 10c^3 \quad ;$$

$$f'_4 = f_4 + 2cf_3 + 3c^2f_2 + 4c^3f_1 + 5c^4 \quad ; \quad f'_5 = f_5 + cf_4 + c^2f_3 + c^3f_2 + c^4f_1 + c^5 .$$

<sup>2)</sup> Ibid., formule (9), pag. 8.

Je crois inutile de donner l'expression finale de  $p$ .

Le même procédé permet de former les expressions réduites de  $p$  en fonction de  $G$ . Et en général, à toute expression de  $p$  en fonction de  $q$  correspond une expression de  $p$  en fonction de  $G$ .

### § 3. Deux propriétés des polynômes $R_i$ .

J'indiquerai en terminant deux propriétés curieuses des polynômes  $R_i$ .

1° Adjoignons au système canonique  $R_3 = 0, R_4 = 0, \dots, R_{n-1} = 0$  les équations  $R_2 = 0$  et  $R_n = 0$ . De ce système nouveau de  $n - 1$  équations on peut éliminer les  $n - 2$  inconnues  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$ , en égalant à 0 le déterminant des coefficients. L'équation qu'on obtient alors est du degré  $\frac{n(n-1)}{2}$  en  $q$ , et l'on retrouve ainsi par une voie différente l'équation dont les racines sont les produits  $x_i x_j$ .

Soit  $n = 4$ . Le système nouveau s'écrit

$$\begin{aligned} R_2 &= q\alpha_2 - f_1 q\alpha_1 + f_2 q - f_4 = 0 \\ R_3 &= (q^2 - f_4)\alpha_1 - f_1 q^2 + f_3 q = 0 \\ R_4 &= -f_4\alpha_2 + f_3 q\alpha_1 + q^3 - f_2 q^2 = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} q & -f_1 q & f_2 q - f_4 \\ & q^2 - f_4 & -f_1 q^2 + f_3 q \\ -f_4 & f_3 q & q^3 - f_2 q^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant on retrouve l'équation dont les racines sont les produits  $x_i x_j$ , et qui s'écrit

$$\begin{aligned} q^6 - f_2 q^5 + (f_1 f_3 - f_4) q^4 - (f_1^2 f_4 - 2f_2 f_4 + f_3^2) q^3 + (f_1 f_3 f_4 - f_4^2) q^2 \\ - f_2 f_4^2 q + f_4^3 = 0. \end{aligned}$$

2° Deuxième propriété des  $R_i$ :

Pour  $i > 2$ ,  $R_i = -q\alpha_{i-3}R_1 + \alpha_{i-2}R_2$ .

Démonstration. Par définition, cette propriété est vraie pour  $R_3$ ; on vérifie aisément qu'elle est vraie pour  $R_4$ . Supposons maintenant qu'elle soit vraie pour  $R_i$  et  $R_{i+1}$ , je dis qu'elle sera encore vraie pour  $R_{i+2}$ . En effet,

$$\begin{aligned}
R_{i+2} &= -qR_i + pR_{i+1} = -q(-q\alpha_{i-3}R_1 + \alpha_{i-2}R_2) \\
&\quad + p(-q\alpha_{i-2}R_1 + \alpha_{i-1}R_2) \\
&= -q(p\alpha_{i-2} - q\alpha_{i-3})R_1 + (p\alpha_{i-1} - q\alpha_{i-2})R_2 \\
&= -q\alpha_{i-1}R_1 + \alpha_iR_2 .
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout  $i > 2$ .

Je crois qu'en s'appuyant sur ces propriétés il est possible de simplifier certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre.

(Reçu le 20 septembre 1941.)