Expresssions de la somme x1 + x2 de deux indéterminées x1, x2 en fonction de x1x2 + c (x1 + x2).

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **14 (1941-1942)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14308

Expressions de la somme $x_1 + x_2$ de deux indéterminées x_1, x_2 en fonction de $x_1 x_2 + c(x_1 + x_2)$

Par D. MIRIMANOFF, Genève

Introduction

Dans un article récent publié ici-même[1]) j'ai fait connaître une méthode permettant de former les expressions les plus simples, canoniques et réduites, de la somme p de deux indéterminées x_1, x_2 en fonction de leur produit q. J'ai ajouté qu'on pouvait en déduire les expressions de p et q en fonction de $G = q + cp$, qui interviennent dans certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre. Mais le procédé dont je me suis servi pour former l'expression cherchée dans le cas de $n = 4$, a des inconvénients. Il ne permet pas, en particulier, de se faire une idée précise de la structure et des propriétés caractéristiques de l'expression ainsi obtenue. Aussi ai-je cru utile de reprendre l'étude de ce problème. En l'examinant de plus près, je me suis aperçu que le passage des expressions en fonction de q aux expressions en fonction de G peut être effectué directement, à l'aide d'une transformation très simple, que, malgré son caractère élémentaire, je crois utile d'indiquer.

§ 1. Envisageons n nouvelles indéterminées x'_i liées aux anciennes x_i par les relations

$$x'_i = x_i + c \ .$$

Désignons par f'_i les fonctions symétriques élémentaires correspondantes, par p' la somme $x'_1 + x'_2$, par q' le produit $x'_1 x'_2$. Il est évident que les expressions de p' en fonction de q' s'obtiennent de celles de p en fonction de q en remplaçant q par q' et les f_i par les f'_i.

Or,

$$\begin{aligned} p' &= (x_1 + c) + (x_2 + c) = p + 2c \\ q' &= (x_1 + c)(x_2 + c) = G + c^2 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Quant aux f'_i, ce sont des fonctions linéaires de $f_1, f_2, \ldots, f_i$, qui se calculent facilement. On a, en effet,

$$f'_i = \beta_1 f_i + \beta_2 c f_{i-1} + \cdots + \beta_i c^{i-1} f_1 + \beta_{i+1} c^i \ , \tag{2}$$

[1]) Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit. C. M. H. t. 14, p. 1.

les coefficients $\beta_1 = 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_i, \beta_{i+1}$ étant les nombres du triangle arithmétique de Pascal rangés le long de la i^e parallèle à l'hypoténuse, en comptant à partir du sommet de l'angle droit. On a, en particulier,

$$f_1' = f_1 + nc \quad ; \quad f_2' = f_2 + (n-1)\, c f_1 + \frac{n(n-1)}{2} c^2 \ ; \text{ etc.}$$

Pour avoir l'expression de p en fonction de G, il suffit donc de remplacer q' et les f_i' par leurs expressions (1) et (2) et de retrancher $2c$ de la formule ainsi obtenue. La relation $q = G - cp$ permettra ensuite d'en tirer l'expression de q en fonction de G.

§ 2. Cas de $n = 4$ et de $n = 5$.

Lorsque $n = 4$, la somme p est donnée par la formule[2])

$$p = \frac{f_1 q^2 - f_3 q}{q^2 - f_4} .$$

Par conséquent

$$p' = \frac{f_1' q'^2 - f_3' q'}{q'^2 - f_4'} .$$

Or,

$$f_1' = f_1 + 4c \ ; \quad f_2' = f_2 + 3cf_1 + 6c^2 \ ;$$

$$f_3' = f_3 + 2cf_2 + 3c^2 f_1 + 4c^3 \ ; \quad f_4' = f_4 + cf_3 + c^2 f_2 + c^3 f_1 + c^4;$$

par suite

$$p = \frac{(f_1 + 4c)(G + c^2)^2 - (f_3 + 2cf_2 + 3c^2 f_1 + 4c^3)(G + c^2)}{(G + c^2)^2 - (f_4 + cf_3 + c^2 f_2 + c^3 f_1 + c^4)} - 2c$$

$$= \frac{f_1 G^2 - f_3 G + 2c(G^2 - f_2 G + f_4) - c^2(f_1 G - f_3)}{G^2 - f_4 - cf_3 + c^2(2G - f_2) - c^3 f_1} ,$$

et l'on retrouve la formule (10) de l'article cité.

Pour $n = 5$, on a, en vertu des formules (14) et (15) du même article

$$p = \frac{f_1' q'^5 - f_3' q'^4 + f_2' f_5' q'^2 - f_4' f_5' q'}{q'^5 - f_4' q'^3 + f_1' f_5' q'^2 - f_5'^2} - 2c .$$

Or,

$$f_1' = f_1 + 5c \ ; \ f_2' = f_2 + 4cf_1 + 10c^2 \ ; \ f_3' = f_3 + 3cf_2 + 6c^2 f_1 + 10c^3 \ ;$$

$$f_4' = f_4 + 2cf_3 + 3c^2 f_2 + 4c^3 f_1 + 5c^4 \ ; \ f_5' = f_5 + cf_4 + c^2 f_3 + c^3 f_2 + c^4 f_1 + c^5 .$$

---

[2]) Ibid., formule (9), pag. 8.

Je crois inutile de donner l'expression finale de p .

Le même procédé permet de former les expressions réduites de p en fonction de G . Et en général, à toute expression de p en fonction de q correspond une expression de p en fonction de G .

§ 3. Deux propriétés des polynômes R_i .

J'indiquerai en terminant deux propriétés curieuses des polynômes R_i .

1° Adjoignons au système canonique $R_3 = 0, R_4 = 0, \ldots, R_{n-1} = 0$ les équations $R_2 = 0$ et $R_n = 0$. De ce système nouveau de $n - 1$ équations on peut éliminer les $n - 2$ inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$, en égalant à 0 le déterminant des coefficients. L'équation qu'on obtient alors est du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en q, et l'on retrouve ainsi par une voie différente l'équation dont les racines sont les produits $x_i x_j$.

Soit $n = 4$. Le système nouveau s'écrit

$$\begin{aligned} R_2 &= q\alpha_2 - f_1 q\alpha_1 + f_2 q - f_4 = 0 \\ R_3 &= (q^2 - f_4)\alpha_1 - f_1 q^2 + f_3 q = 0 \\ R_4 &= -f_4\alpha_2 + f_3 q\alpha_1 + q^3 - f_2 q^2 = 0 . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} q & -f_1 q & f_2 q - f_4 \\ & q^2 - f_4 & -f_2 q^2 + f_3 q \\ -f_4 & f_3 q & q^3 - f_2 q^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

En développant ce déterminant on retrouve l'équation dont les racines sont les produits $x_i x_j$ et qui s'écrit

$$q^6 - f_2 q^5 + (f_1 f_3 - f_4) q^4 - (f_1^2 f_4 - 2 f_2 f_4 + f_3^2) q^3 + (f_1 f_3 f_4 - f_4^2) q^2 - f_2 f_4^2 q + f_4^3 = 0 .$$

2° Deuxième propriété des R_i:

Pour $i > 2$, $R_i = - q\alpha_{i-3} R_1 + \alpha_{i-2} R_2$.

Démonstration. Par définition, cette propriété est vraie pour R_3; on vérifie aisément qu'elle est vraie pour R_4 . Supposons maintenant qu'elle soit vraie pour R_i et R_{i+1} , je dis qu'elle sera encore vraie pour R_{i+2} . En effet ,

$$\begin{aligned} R_{i+2} = -qR_i + pR_{i+1} = &-q(-q\alpha_{i-3}R_1 + \alpha_{i-2}R_2) \\ &+p(-q\alpha_{i-2}R_1 + \alpha_{i-1}R_2) \\ = -q(p\alpha_{i-2} - q\alpha_{i-3})R_1 &+ (p\alpha_{i-1} - q\alpha_{i-2})R_2 \\ = -q\alpha_{i-1}R_1 + \alpha_i R_2 \ . & \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout $i > 2$.

Je crois qu'en s'appuyant sur ces propriétés il est possible de simplifier certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre.

(Reçu le 20 septembre 1941.)